Methodisches Handbuch
für den
Gesammt-Unterricht
im
Rechnen.

Als
Leitfaden beim Rechenunterrichte und zur
Selbstbelehrung.

Von
Dr. F. A. W. Diesterweg und **P. Heuser.**

In zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung
bearbeitet von
Dr. F. A. W. Diesterweg,
Director des Seminars für Stadtschulen in Berlin.

Vierte, verbesserte Auflage.

Elberfeld, 1844.
Büschler'sche Verlagsbuchhandlung.

Gedruckt bei Sam. Lucas
in Elberfeld.

Vorrede.

Die Vorrede zur ersten Auflage dieses Buches verbreitete sich sowohl über den Zweck und die Einrichtung, als auch über die Methode, den erwünschten Gebrauch und den möglichen Mißbrauch desselben. Ein abermaliger Abdruck derselben erschien in den folgenden Auflagen und erscheint auch jetzt als überflüssig, da Zweck, Einrichtung und Methode in der Art der Abfassung dem Auge des Lesers vorliegen und der rechte Gebrauch nicht ausbleiben kann, wo man sich von ihm leiten läßt. Darum verdrängen jene, damals für zeit- und ortgemäß erachteten Worte nachfolgende Bemerkungen, die ich möglichst zusammenzudrängen suchen werde. —

Welchem (allgemeinen) Prinzip, fragen wir zuerst, huldigt dieses Buch?

Noch sind wir bekanntlich nicht so weit gekommen, daß wir für die Pädagogik, Didaktik und Methodik allgemein anerkannte Prinzipien überall aufzustellen vermöchten. Den Beweis für diesen Satz liefert die pädagogische Literatur. Es ist darum auch von uns hier, wo es sich von der Methodik eines einzelnen Unterrichtsgegenstandes handelt, nicht zu fordern, einen vollgültigen unbestrittenen obersten Grundsatz für alle Erziehung und jedweden Unterricht namhaft zu machen. Aber in beschränkterem Kreise, für alle rationellen Gegenstände, zu welchen unbestritten der Unterricht in der Zahlenlehre gehört, glauben wir ein oberstes Prinzip aufstellen zu können. Wir entdecken es, wenn wir den Zustand des Kindes, aus dem ein Mann werden soll, mit der Beschaffenheit des vollendeten Mannes vergleichen. Der Unterschied beider muß uns das zu erreichende Ziel und das zu befolgende Prinzip nennen. Nun finden wir in dem Kinde die Empfänglichkeit (die Receptivität), in dem ausgebildeten Manne die Selbstthätigkeit (die Spontaneität) vorherrschen. Folglich soll jene zu dieser umgebildet werden, und unser Prinzip für die Methodik, wenigstens der rationellen Unterrichtsgegenstände, heißt: Unterrichte so, daß überall die Selbstthätigkeit des Schülers möglichst

ausgebildet werde! Gleich dem kantischen obersten Grundsatze der Moral ist dasselbe ein formales Prinzip. Es stellt nicht nur die Norm oder die Richtschnur für jede entwickelnde, folglich für jede (!) wahrhaft bildende Unterrichtsthätigkeit, sondern auch einen Maßstab für Beurtheilung jedes Buches und jedes Lehrers auf, welche dem Endziele formaler Bildung, der Selbstthätigkeit, dienen sollen und wollen.

Das Gegentheil dieses Zieles ist die reine Empfänglichkeit oder das leidende Verhalten (die Passivität, die geistige Ruhe oder der geistige Tod) des Schülers, und die diesem Extrem dienende Methode (wenn anders dieser Ehrenname hier noch anwendbar ist) heißt Mechanismus, der seine Zwecke durch Vor- und Nachsprechen, durch unverstandenes Regelwerk und damit verwandte, den Geist fesselnde Mittel erreicht. Ist daher jenes Prinzip richtig und wahr, und soll es in der That das Panier sein, unter dem sich alle Lehrer, die zur Entfesselung des jugendlichen Geistes beitragen wollen, versammeln sollen; so bedarf es nicht weiterhin noch eines besondern Anlaufes zur Bekämpfung und endlichen Erlegung des alten Riesen, Mechanismus genannt, und er ist dann ein für alle Mal in der Ueberzeugung der Denkenden, wenn auch nicht eben so schnell in der Wirklichkeit, d. h. in der Praxis des Privat- und des öffentlichen Unterrichts, erlegt und getödtet. Aber dieß ist der Gang der Entwicklung unsrer Zustände: Erst wird die Nothwendigkeit der Umbildung, Fortentwicklung, Reformation erkannt, dann wird dieselbe (wenigstens von jedem Consequenten in seinem Wirkungskreise — ohne Tropfen kein Meer!) in's Leben eingeführt.

Wie daher in allen rationellen Unterrichtsgegenständen (ja in allen ohne Ausnahme!) die Selbstthätigkeit und dadurch die dereinstige Selbstständigkeit des Zöglings angestrebt werden soll, also auch durch den Unterricht in der Zahlenlehre, folglich auch durch dieses Buch. Darum dringen wir überall auf vollkommne Einsicht und Erkenntniß des Gegenstandes und betreten den Weg, welcher ausschließlich und allein zu diesem Ziele führen kann. Auf diesem Wege geht man überall von dem Einzelnen, Anschaulichen, Concreten, dem Beispiel (Exempel) aus, um von ihm aus zu dem Allgemeinen und Abstrakten, zu der Regel aufzusteigen.

Diese Bemerkungen geben dem Leser den Maßstab in die Hand, nach dem das vorliegende Buch beurtheilt sein will, und sie bezeichnen die Art und Weise, wie es gebraucht werden möchte. —

Wir halten es für zweckmäßig, uns noch auf einzelne Bemerkungen einzulassen.

1) Es gibt im Wesentlichen nur ein Rechnen, nicht zweierlei der Art nach, etwa wie Kopf- und Tafelrechnen, sondern alles Rechnen ist der Art nach dasselbe. Es beruht auf einer verständigen Beurtheilung der in einer Aufgabe enthaltenen Sach- und Zahlverhältnisse, woraus sich die Art der Abhängigkeit der gesuchten Zahlen von den gegebenen ergibt, und woraus erkannt wird, durch welche Operationen an und mit den gegebenen Zahlen die gesuchten gefunden werden. Ohne diese besonnene Beurtheilung ist gar kein bildendes Rechnen möglich. Sie macht die Hauptsache beim Rechnen aus, muß jeder anzustellenden Operation vorhergehen und diese als nothwendiges Resultat erzeugen. Um die Art der Ausrechnung muß man sich daher zu Anfang gar nicht bekümmern, sondern nur nüchtern und ruhig die gegebenen Verhältnisse betrachten. Schlecht unterrichtete Schüler und Erwachsene fragen immer gleich mit Unruhe und Aengstlichkeit darnach, wie man eine Aufgabe ausrechnet. Das findet sich aber ganz von selbst, sobald man eine Aufgabe versteht. Versteht man sie nicht, so liegt das entweder an der Nicht-Kenntniß der Sach-, oder an dem Mangel der Erkenntniß der Zahlverhältnisse. Die Kenntniß der Sache ist meist historischen (empirischen), die Erkenntniß der Zahlenverhältnisse rationellen Ursprunges. Ist daher ein Schüler unfähig, eine Aufgabe aufzulösen, so muß der Lehrer untersuchen, worin dieses Unvermögen seinen Grund hat, ob in dem Einen, oder in dem Andern, oder in Beidem, um die Hindernisse aus dem Wege zu schaffen. Die anschauliche Durchsichtigkeit der Aufgabe und Lösung derselben muß aber stets der Ausrechnung vorhergehen, weil sich Jenes zu Diesem wie Grund und Folge, Ursache und Wirkung verhält.

2) **Das richtige Rechnen muß man daher abhängig machen vom richtigen Erkennen und vollokmmner mündlicher Darstellung, nicht von Ueber-**

einstimmung des gefundenen Resultates mit dem im Buche angegebenen Facit, nicht von dem Bestehen einer sogenannten Probe.

Dem Grundsatze: der Schüler darf nicht zum Ausrechnen zugelassen werden, bis er die Aufgabe durchschauet hat (einem nicht durch falschen Unterricht verleiteten Menschen fällt dergleichen auch gar nicht ein; aber in Schulen kommt Solches nur zu häufig vor), muß man den zweiten beifügen: der Ausrechnung muß auch eine in jeder Beziehung genügende mündliche Darstellung vorhergehen. Wie will man sonst erfahren, daß der Schüler richtig gedacht hat, und auf welche andere Weise will man den Schüler nöthigen, richtig zu denken? — Erst dann, wenn er die darin liegende Anforderung befriedigt hat, läßt man ihn an die Ausrechnung gehen. Hat man in dieser Beziehung verbildete Schüler vor sich, die überall nach dem Facit haschen, so läßt man sie, um sie aus dieser falschen Richtung herauszunöthigen, viele Aufgaben beurtheilen und lösen, ohne die Ausrechnung beizufügen. Dadurch ergreifen sie thatsächlich das Wesen der Sache, welches nicht in der Ausrechnung, sondern in der rationellen Beurtheilung liegt. In ihr ruht das Bildende des Zahlenunterrichts und das Vergnügen an der Beschäftigung mit demselben. — Was richtig gedacht ist, trägt die Gewißheit in sich selbst. Es bedarf dann keines äußeren Probirens, welches immer auf Mechanismus hinausfällt. Allenfalls ist es zur Bewahrheitung der Fehlerlosigkeit einer Ausrechnung zuweilen zuzulassen.

3) Fertigkeit in der Behandlung der Zahlen ist nothwendig ein Augpunkt bei dem Unterricht in der Zahlenlehre, aber man beschränke die Forderung derselben auf das gehörige Maß!

Treibt man in ursprünglich-pestalozzischer Weise in der Schule fast nichts als Zahlen-, Formen- und Sprachlehre, d. h. vernachläßigt man in unverantwortlicher Weise andre, höchst wichtige Gegenstände des allgemeinen Schulunterrichts, so kann man ohne besondre Intelligenz und ohne ausgezeichnetes donum didacticum (wie die Alten sich ausdrückten; = Lehrgabe) den Schülern eine oft bewunderte, aber eitle Fertigkeit aneignen.

Doch wozu? Das Leben verlangt sie nicht, und von wem es sie verlangt, der wird sie durch Uebung schon gewinnen, ist nur in der Schule ein solides Fundament gelegt; die allgemeine Menschenbildung verlangt sie auch nicht; darum nochmals: Wozu? — Eine mäßige, mit den übrigen gerechten Anforderungen an wohlunterrichtete Schüler übereinstimmende Fertigkeit, mit steter Berücksichtigung des ganzen Standpunktes und des künftigen Berufes der Schüler ist durchweg hinreichend. In einer allgemeinen Volksschule soll man es in keinem Stücke auf ausgezeichnete, vereinzelt hervorstechende Leistungen anlegen. Denn solche lassen sich nur mit Hintansetzung anderer wichtigen Dinge oder mit gleich tadelnswerther Berücksichtigung einzelner einseitigen Talente erzielen. Das gewöhnliche Leben fordert von dem Menschen nicht die Lösung ungewöhnlicher Aufgaben, nicht die Schlichtung sehr zusammengesetzter, verwickelter Verhältnisse, nicht enorme Fertigkeiten. Die allgemeine Volksschule hat die allgemeinen, nicht die besondern Bedürfnisse zu berücksichtigen, jenen aber in vollem Maße zu genügen.

4) Da es nur ein Rechnen, nämlich ein Rechnen mit Verstand gibt, so ist alles Rechnen Kopfrechnen oder Kopf-, nicht Handarbeit. Von einem durchgreifenden Gegensatze des Kopf- und Tafel-, mündlichen und schriftlichen, Gedanken- und Zifferrechnens kann daher nicht die Rede sein. Diesen vermeintlichen, leider noch nicht ganz veralteten Gegensatz muß man erst im Bewußtsein ganz vernichten, ehe man das richtige Verhältniß aufzufassen im Stande ist.

Man rechnet überall mit Zahlen d. h. Vorstellungen von Zahlen oder Mengen von Einheiten. Diese Zahlenvorstellungen sind von äußern Zeichen ganz unabhängig, wenn man sie auch zu Anfang durch Aeußeres veranschaulicht und sich späterhin, z. B. bei verwickelteren Rechnungen, der allgemeinen üblichen Zahlzeichen, d. h. der Ziffern, bedient. Das eigentliche Rechnen geschieht daher stets ohne die Vorstellung irgend eines Zeichens. Es besteht in der Erkenntniß der gegenseitigen Abhängigkeit der Zahlenvorstellungen und in der Vollziehung dieser Abhängigkeit oder in der Entwicklung der einen Zahl aus der andern. Solches Rechnen hat man willkürlich Kopfrech-

nen genannt, und von Tafelrechnen spricht man, wenn man sich der Ziffern bedient. Beides setzt jederzeit in derselben Weise den Gebrauch des Verstandes voraus: beides ist also in gleicher Art Kopfarbeit. Deßhalb stelle man beides weder in dem Unterricht noch auf dem Stundenplane einander gegenüber! Sonst gelangt man zu einem gar nicht in der Sache liegenden, also unwahren, in seinen Folgen nachtheiligen Gegensatz. — Man untersucht überall die Zahlenverhältnisse, übt sich in der Erkennung und Anwendung derselben mit lauterem Verständniß, und bedient sich entweder gar keiner oder willkürlich gewählter, auch der herkömmlichen Zeichen in der einmal allgemein gültigen, darum zu lernenden Darstellungsweise.

5) Der Unterschied zwischen dem sogenannten Kopf- und Tafelrechnen besteht also nicht darin, daß man bei jenem den Kopf, bei diesem nur Hand und Auge gebraucht, sondern

a. Darin: daß man beim Kopfrechnen an gar keine Zeichen also auch an keine Ziffer denkt, bei dem schriftlichen Rechnen dagegen die Zahlvorstellungen und die Operationen, die man mit ihnen vollzieht, sichtbar darstellt;

b. Darin, daß man leichtere Aufgaben mit nicht allzu großen Zahlen, frisch und rasch weg, ohne Griffel und Feder, schwere dagegen mit großen Zahlen, die nicht leicht zu behalten sind, der größeren Sicherheit wegen schriftlich ausrechnet. (In der Beurtheilung, d. h. in der Erkenntniß der Abhängigkeit einer Zahl von einer andern, kommt — wie schon bemerkt — gar kein Unterschied vor. Deßhalb kann auch eine sogenannte Probe nie die Falschheit der Beurtheilung, sondern nur sogenannte Rechnungsfehler herausbringen.) Dieselben Aufgaben, die daher von stärkeren Schülern ohne äußere Erleichterungs- und Hülfsmittel gelöset werden, werden von den schwächeren ganz oder theilweise durch Mitgebrauch der Ziffern behandelt. Der Unterschied zwischen Kopf- und Tafelrechnen ist darum kein objectiver, sondern ein subjectiver, kann wenigstens, nach der vorausgegangenen Erklärung ohne Zweideutigkeit, so genannt werden.

c. Darin, daß man sich beim Nichtgebrauch der Ziffern, d. h. beim Kopfrechnen, viel freier bewegt als beim Zifferrechnen.

Das Rechnen mit Ziffern geschieht, weil schriftlich, oft oder meist um Andrer willen, welchen man vollzogene Rechnungen vorlegen will. Um des allgemeinen Verständnisses willen ist man darum über bestimmte Darstellungsweisen übereingekommen, von welchen man sich auch schon deßwegen nicht zu entfernen hat, weil sie in der Regel in scharfsinniger Weise einen möglichst kurzen und leicht zu übersehenden Weg einschlagen. In dieser Beziehung herrscht hier die Gebundenheit. Beim Kopfrechnen dagegen herrscht viel mehr Freiheit, welche eigene Bewegung, Auswahl und Belieben zuläßt. Darum lieben geistig bewegliche Kinder so sehr das Kopfrechnen. Es gefällt ihnen, eine Aufgabe in mannigfaltiger Art, auf ihre Weise, zu behandeln. Auch trägt diese Seite des Kopfrechnens viel zu seinem bildenden Einfluß bei. Denn dadurch wird es möglich, eine Aufgabe von mancherlei Seiten zu betrachten. Der Scharfsinn kann sich an den Aufgaben üben. Wer ihn besitzt, spürt an denselben, besonders wenn sie verwickelt sind, die verborgenen Seiten, von welchen sie angreifbar sind, das versteckte Ende auf, mit dem sie an Bekanntes angereiht und daraus entwickelt werden können. Darum strebe man ja an den Kopfrechenaufgaben durch möglichst mannigfaltige Auflösungsweisen die Entfesselung und Befreiung des jugendlichen Geistes an! Wenn es daher auch in den meisten Fällen gerathen ist, die Größe der Zahlen, mit welchen man operirt, nach den dekadischen Einheiten, die sie enthalten, zu betrachten, weil dadurch gewöhnlich leichte Auflösungsweisen entstehen, so ist dies doch keinesweges immer der Fall; vielmehr führt häufig eine andere Zerlegungsweise leichter zum Ziele. Soll z. B. mit 125 multiplicirt werden, so werde ich diese Zahl nicht in 1 Hunderter 2 Zehner und 5 Einer zerlegen, sondern als $1\frac{1}{4}$ Hundert betrachten; und soll der 12te Theil von 150 genommen werden, so paßt die Zerlegung in 100

und 50 nicht, sondern in 96 und 54, oder in 144 und 6 u. s. w.

6) Nun stellen wir einige allgemeine Regeln, die sich beim Kopfrechnen bewähren, zusammen. Wir fangen mit negativen an.

a. Gehe beim Kopfrechnen ganz von den Vorstellungen beim Zifferrechnen ab, stelle dir die Zahlen nicht als Ziffern oder durch Ziffern dargestellt vor!

Es gibt zwar Menschen, die beim nicht-schriftlichen Rechnen alle Zahlen in Ziffern vor sich sehen, die einzelnen Stellen nach ihrem dekadischen Werthe behandeln, also in der Regel sehr viel Einzelnes zu behalten haben, und dennoch mit Fertigkeit und Sicherheit rechnen; aber dies sind seltne Fälle, und es ist ein solches Rechnen kein eigentliches Kopfrechnen. Die eigentlichen Vortheile des Kopfrechnens gehen dadurch verloren. Schlecht geleitete Schüler, deren Zahlvorstellungen immer an Ziffern gebunden worden, rechnen auch im Kopfe mit Ziffern, und es hält dann außerordentlich schwer, solche falsche Gewöhnung wieder zu vertilgen. Darum beuge man dieser verkehrten Richtung durch den ganzen Gang des Unterrichts sorgfältig vor! Und man übersehe die an verschiedenen Stellen dieser Schrift gemachte Bemerkung nicht, daß in ihr häufig der Kürze wegen Ziffern gebraucht sind, wo eigentlich nur Zahlwörter stehen sollten, veranstalte daher die Entwickelung der Zahlgesetze und die ersten Uebungen eines neuen Abschnittes stets ohne Ziffern!

b. Man übe den Schülern solche Operationen und Resultate, welche sehr häufig vorkommen, ganz fest ein!

Der Lehrer ist es ihnen schuldig, daß er ihnen das Lernen erleichtere. Nicht zum Spielen sind sie in der Schule, und es gibt keine bildende, sondern nur eine verflachende Spielmethode; aber alles hat sein Maß. Unsere Schüler müssen viel lernen, und sie sollen Schweres lernen; darum erleichtere man ihnen das, was Jedem schwer wird! Dadurch entsteht die Lust am Unterricht.

Unverzeihlich und wahrhaft unverantwortlich ist es daher, wenn man die armen Jungen, die einen großen Theil ihrer schönen Jugendzeit innerhalb der oft ganz nackten, traurigen Schulwände zubringen müssen, Dinge auswendig lernen läßt, ohne auf wiederholende Uebungen zu denken, welche den Zweck haben, daß die Schüler das mühsam und vielleicht unter Thränen Gelernte nie wieder vergessen. Der wohlmeinende, den Fortschritt des Unterrichts und die Bedürfnisse des Lebens kennende Lehrer übt ihnen das, was sie auf den folgenden Stufen und im Leben brauchen, so fest ein, daß sie es nie wieder vergessen. Er macht es ihnen mundrecht, daß sie nach Belieben, gleichsam im Schlafe, damit schalten und walten können. Merken sie solche schöne Eigenschaften und so edle Bemühungen des Lehrers, dann schätzen und lieben sie seine Treue, seine Unermüdlichkeit, sein Dringen auf Genauigkeit, Festigkeit und Sicherheit. Die Materialien, aus welchen man ein Gebäude bauen soll, müssen zuvor behauen, und zugerichtet sein, bequem zur Handhabung. Sonst verschwindet dem Baumeister der Plan des Ganzen aus den Gedanken. So erfordern die höheren Uebungen die Fertigkeit in allem Niederen. Wer z. B. mit größeren Zahlen im Kopfe multipliciren soll, muß das kleine und große Einmaleins fertig auswendig wissen. Der niedere Gedankenlauf muß sich dieser großen Erleichterungsmittel bemächtigt haben, damit der höhere in seinen Schlüssen nicht gestört werde. — Diese Bemerkungen würdige man, wie im Zahlunterricht, so im Allgemeinen, nach ihrer ganzen Wichtigkeit.

c. Man suche eine Mehrheit von Operationen auf möglichst wenige, eine Reihe von Zahlen auf eine kleinere Anzahl, große auf kleine zurückzuführen!

Hat man z. B. eine Reihe von Summanden zu behalten, so bringe man sie in eine Summe, weil es leichter ist, eine Zahl zu behalten, als mehrere. Hat man mit großen Zahlen zu operiren, so thue man dieses nicht immer unmittelbar, sondern suche dieselben in kleinere

zu zerlegen und aus der großen Aufgabe mehrere kleine zu machen, um eine nach der andern aufzulösen, das Resultat sich im Gedächtniß zurechtzulegen, nachher mit dem zweiten zu verbinden u. s. w. Freilich kommt es auf die Natur der Aufgabe an, ob dadurch wirklich eine Erleichterung entsteht, oder das Gegentheil. Jedenfalls aber trachte man darnach, daß man im Verlauf der Aufgabe, wo möglich, immer nur eine Zahl, als Resultat des bisherigen Ganges, zu behalten hat! Sonst entsteht leicht Verwirrung oder Verwechselung und Ermüdung, oder gar Verzweiflung.

d. Man schließe die Reihenfolge der vorzunehmenden Operationen genau an den sprachlichen Ausdruck an und komme dem Gedächtniß durch mündliche Wiederholung der bereits gewonnenen Resultate zu Hülfe!

Soll man z. B. eine complexe oder Collectiv-Zahl, etwa 5 Ctr. 58 Pfd. 7 Loth, mit einer Zahl, z. B. mit 8 multipliciren, so beginnt man die Multiplication mit den Centnern, schreitet dann zu den Pfunden fort 2c., weil wir die Gewichte in dieser Ordnung, von den höheren zu den niederen Einheiten, zu nennen gewöhnt sind. Und hätte man zu 5 Ctr. 58 Pfd. 7 Loth noch 10 Ctr. 12 Pfd. 2 Loth hinzuzufügen, so spreche man nicht: 10 Ctr. zu 5 Ctr. = 15 Ctr., sondern: 10 Ctr. zu 5 Ctr. 58 Pfd. 7 Loth = 15 Ctr. 58 Pfd. 7 Loth; dazu noch 12 Pfd. gibt 15 Ctr. 70 Pfd. 7 Loth; dazu noch 2 Loth gibt 15 Ctr. 70 Pfd. 9 Loth. Der wiederholte Ausdruck hindert das Vergessen oder Verwechseln.

e. Man nenne jede Aufgabe nur einmal, betone aber die wichtigeren Wörter scharf und deutlich!

Wissen die Schüler, daß man eine Aufgabe mehr als einmal nennt, so ist ihre Aufmerksamkeit nicht gespannt genug, und es ist keine Gränze mehr vorhanden, wo man aufhören soll. Denn nenne ich eine Aufgabe um eines Schüler willen zweimal, warum soll ich sie um eines noch weniger aufmerksamen Schülers willen nicht

dreimal nennen u. s. w. Darum stehe die aufgestellte Regel fest (die natürlich, nach der Natur der Aufgaben, Ausnahmen zuläßt); aber nun spreche man auch alles Wichtige, die Zahlwörter besonders, **mit scharfen Accenten!** Dadurch erleichtert man den Schülern die Sache außerordentlich, und man gewöhnt sie dadurch von selbst zu charakteristischem Sprechen.

f. **Man mache sie auf einzelne Kunstgriffe und sogenannte Vortheile, die sich im Fortschritt des Rechnens von selbst ergeben, aufmerksam!**

Man wählt statt einer Zahl eine bequemere, runde, und verbessert nachher den Fehler. Z. B. statt 98 zu addiren oder mit ihr zu multipliciren, nimmt man 98 = 100 — 2; statt 148 von 312 abzuziehen, zieht man 148 von 300 ab und fügt zu dem Reste 12 hinzu ꝛc. —

Man verwechsele bei der Multiplication die Factoren mit einander, wenn dadurch eine Erleichterung entsteht; z. B. statt 110 mal 97 Pfd. setzt man 97 × 110 Pfd. = 97 Ctr.

Auf solche Vortheile und Kunstgriffe kommen die Schüler von selbst. Auf ihrer Handhabung beruht zu großem Theile die Fertigkeit und Festigkeit im Kopfrechnen.

g. **Man gewöhne die Schüler an Ruhe und Besonnenheit!**

Schnelligkeit und Raschheit im Fragen und Antworten bezeichnen den eifrigen Lehrer und die ihm ähnlich gewordenen Schüler. Aber die Besonnenheit und die Ruhe des Geistes dürfen, zumal beim Kopfrechnen, nicht fehlen. Verhaspelt sich ein Schüler (dem sanguinischen begegnet dieses am ersten), so lasse man ihn ruhig die Entwicklung wieder von vorn anfangen, und man setze seiner Unruhe feste, männliche Haltung entgegen. Man **stehe** daher auch auf seinem Posten! Das wirkt wie magnetischer Einfluß.

In Verbindung steht dieses Buch mit folgenden, bei demselben Verleger erschienenen Büchern für Schüler:

a. Practisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürgerschulen von **Diesterweg** und **Heuser**:

erstes Uebungsb. 15te Aufl. 7 Sg. od. $5^2/_3$ Gg. od. $25^1/_4$ Kr.
zweites » 7te » 7 » » $5^2/_3$ » » $25^1/_4$ »
drittes » 3te » 7 » » $5^2/_3$ » » $25^1/_4$ »

b. Auflösungen der Aufgaben in diesen drei Büchern. 15 Sgr. oder 12 Ggr. Dritte berichtigte Auflage.

c. Practisches Rechenbuch für die untern und mittlern Klassen der Elementarschulen, so wie auch für Mädchenschulen. Von Denselben. Dritte Aufl. 1842. 5 Sgr. oder 4 Ggr.

Das erste Uebungsbuch soll den Anforderungen, welche man in Betreff der practischen Fertigkeit im Rechnen an gehobene Elementarschulen macht, genügen; das zweite soll in dieser Beziehung die Bedürfnisse höherer Bürgerschulen befriedigen; das dritte soll weitergehende, nicht unmittelbar von den Bedürfnissen des practischen Lebens geforderte, aber die Geistesbildung durch die Kenntniß mathematischer Gegenstände fördernde Einsichten und Fertigkeiten erstreben und erzielen.

Das Rechenbuch unter c. beschränkt sich in seinen Aufgaben auf das Nothwendigste und Unentbehrlichste, gibt aber Hinreichendes; sein Zuschnitt ist nach den Anforderungen, wie sie in so häufig vorkommenden beschränkten Verhältnissen nach Billigkeit gemacht werden können und (nur) dürfen, berechnet. Mädchen namentlich sollen zwar allerdings das Nothwendigste des Rechnens lernen; ein Mehr lassen aber meistens die übrigen Verhältnisse, welche Berücksichtigung verdienen (z. B. Gesundheitsrücksichten, Handarbeiten u. dgl.), nicht zu.

»Es werde Licht!« Diesem großen Gedanken soll jeder rationelle, also auch jeder Rechenunterricht dienen. Denn der Mensch soll ein Diener sein des Ewigen. Als Er das große Wort (denn es war eine That): »Es werde Licht!« sprach, gab er zu erkennen, was er wolle, daß es sei — sei für immer und ewig. Er, der Unendliche, der ewig Allmächtige, der nicht einmal geschaffen hat, sondern ewig schafft, weil das Schaffen (wenn es den Sterblichen überhaupt erlaubt ist, Solches zu denken und davon zu reden) zu seinem Wesen gehört, hat nur selten zu den Kreaturen gesprochen, und noch seltener direkt und unmittelbar. Darum sind die wenigen Gedanken und Worte, die wir ihm beizulegen wagen mögen, um so kost-

barer, um so beherzigenswerther. Und einer dieser Gedanken — eine dieser Thaten ist: »Es werde Licht!« Nicht: hier oder da, in diesem oder jenem Jahrhundert, in der und der Schicht der menschlichen Gesellschaft; sondern unbedingt, absolut und ewig, für alle ewige Zeiten, alle Orte und Stände soll es licht, soll das Licht werden. Denn jenes »werde« bezieht sich nicht auf einen, sondern auf alle Momente. Was er, der Unveränderliche einmal will, will er immer. Der Mensch aber, als sein Geschöpf, sei ein Diener seines Schöpfers! Darum sagen wir: auch durch uns soll es licht werden, durch jeden von uns in seinem Kreise, durch seine Thätigkeit, durch seinen Unterricht, durch jeden Gegenstand des Unterrichts. Keiner ist für diesen Zweck zu hoch, keiner zu niedrig; alle sollen fördern helfen den großen Zweck, den der Weltschöpfer selbst für hoch genug hielt, um seiner Aufmerksamkeit gewürdigt zu werden. Darum läßt der einzelne, verständige, denkende Mensch sich nicht schrecken durch Gespenster und Unholde: Irrlichter, Sternschnuppen, feurige Drachen, die lichtscheue Menschen ihm vorhalten, um ihm das Licht selbst verdächtig zu machen; er hält sich ewig an das große Wort: »Es werde Licht!« — So sei es!

»Es werde Licht« muß noch lange der Refrain bleiben, mit dem wir unsre pädagogischen Reden schließen. Denn noch ist es nicht an der Zeit, die Hände in den Schooß zu legen, noch ist der alte Kampf gegen die Finsterniß nicht beendigt, vielleicht nicht einmal entschieden. Manche Zeichen deuten ernstlich darauf hin, daß dem Prinzip der modernen Schule ein erneuerter Kampf bevorsteht. Wir werden sehen, ob es bereits in den Köpfen und in der Praxis so fest sitzt, daß es ihn siegreich bestehen wird. Zwar werden zuerst andere Gebiete als der Rechenunterricht von der unleugbar eingetretenen (wenigstens versuchten) Reaction bedroht; aber auch er würde an die Reihe kommen, wenn die gegen die Naturgemäßheit des Unterrichts, gegen das formale Princip der Erziehung, gegen die Selbstthätigkeit im Subjecte, kurz gegen die pestalozzische Schule und ihre Fortbildung gerichtete Reaction den Sieg davon tragen sollte. Darum sei der Spruch: principiis obsta! ein ernster Mahnruf für uns, wie für Alle, welche an der Fortentwicklung des Le-

bens, an der Befreiung des Menschengeschlechts von alten Banden mitzuarbeiten für ihren Beruf erkannt haben. Es ist ein alter Kampf; aber er muß überall aufgenommen, auf jedem Gebiete durchgefochten werden. Die Freiheit besteht nicht in Einem, sondern in Allem. Der Fortschritt in Einem schlägt zum Fortschritt im Ganzen um. Darum ist Jeder zum Mitkämpfen berufen. Den Muth zum Kampfe schöpfen wir aus dem Blick auf die bereits erfochtenen Siege, aus der Ueberzeugung, daß wir für das Rechte und Wahre streiten, und aus dem Glauben an die endliche Befreiung des ganzen Menschengeschlechts von jeder Art der Knechtschaft. Der Unterricht in der Zahlenlehre, nämlich der vernünftige, d. h. das Denk- nicht das Regelrechnen, hat dazu seinen Beitrag zu liefern. Er lehrt den Schüler anschauen, denken, vernünftig sein — sprechen, operiren, handeln, — bildet ihn zur verständigen, raschen Thätigkeit im Leben. Die Schule ist eine Versammlung von Kindern, welche daselbst unter Leitung eines Mannes zu einem Menschen-würdigen Leben Anleitung erhalten sollen. Die Schule löset nicht diese ganze, unermeßliche Aufgabe, aber einen Theil derselben. Ohne die Schule ist sie unter uns nicht zu lösen. Aus diesem universalen Gesichtspunkte betrachtet jeder sociale Mensch der Gegenwart seine Stellung, jeder Lehrer seine Thätigkeit, seinen Beruf. Die Schule ist ein Glied in einer großen Kette, der einzelne Lehrer ist ein Arbeiter auf dem Acker der Menschheit. Dieses Bewußtsein verleiht ihm die nöthige Selbstachtung und befeuert ihn zu nie ermüdender Thätigkeit im kleinsten Kreise, in jedem versteckten Winkel der Erde. Jedes Menschenkind hat Ansprüche auf ein Menschen-würdiges Dasein, jedes Kind hat die Anlagen dazu, der Lehrer kann durch jeden Unterricht dazu mitwirken. Es ist ein großer, ein göttlicher Gedanke, zu denen zu gehören, durch welche »die Menschheit sich fortpflanzt.« Ein Mittel dazu ist der Unterricht, ist jeder Unterricht, jeder bildende Unterricht. Es ist ein langer, dummer und abgeschmackter Wahn, daß man für das Rechte und Gute erziehe durch den Religions-Unterricht, nicht aber durch andern, nicht durch den Rechen-Unterricht. Aller wahre Unterricht wirkt Menschenbildung. Mehr kann man nicht leisten, so viel soll man aber auch leisten. Auch der Rechenunterricht bildet für das Wahre, Gute, Tüchtige; er erzeugt die Liebe zum Wahren, er hat folglich eine sittliche Wirkung.

Durch Alles das Eine: Menschenbildung!

Berlin, Anfang 1844.

Der Verfasser.

Erste Stufe.

Behandlung der Zahlen von Eins bis Zehn (der Grundzahlen.)

Erste Uebung.

§. 1. Das Zählen von Eins bis Zehn und die mündliche und schriftliche Bezeichnung der Zahlen.

I. Mündlich.

(Anschauen und Benennen der Grundzahlen.)

I . . . . ein Strich	IIIIII . . . . . sechs Striche
II . . . . zwei Striche	IIIIIII . . . . sieben —
III . . . . drei —	IIIIIIII . . . acht —
IIII . . . . vier —	IIIIIIIII . . neun —
IIIII . . . . . . fünf —	IIIIIIIIII . zehn —

Gang dieser Uebung.

Der Lehrer macht an die schwarze Wandtafel einen Strich und spricht: das ist ein Strich. Die Kinder sprechen: das ist ein Strich. Der Lehrer macht noch einen Strich und spricht: das ist noch ein Strich; ein Strich und noch ein Strich sind zwei Striche. Die Kinder sprechen: ein Strich und ein Strich sind zwei Striche. So weiter bis zu zehn Strichen. — Der Zweck dieser Uebung ist, daß die Kinder die Zahlen von eins bis zehn anschaulich auffassen und benennen lernen. Deshalb muß hier so lange verweilt werden, bis die Kinder dieses vollständig können.

Noch einige Winke.

1) Die Kinder machen obige Strichreihen auf ihre Schiefertafeln. Nachher sprechen sie: das ist ein Strich; das sind zwei Striche rc.

2) Der Lehrer nimmt dieselbe Uebung mit Punkten und mit seinen Fingern vor.

3) Der Lehrer diktirt: machet zwei — vier — sieben — neun rc. Striche! — Hebet in die Höhe drei — fünf — sieben rc. Finger! —

4) Er fragt: wie viel Fenster, Thüren, Tische, Bänke (nicht über zehn) sind in dieser Stube? Wie viel Knöpfe an diesem Rocke? Wie viel Fensterscheiben an diesem Fenster? Wie viel Schritte sind dieses? Wie viel

Thore, Thürme 2c. sind in dieser Stadt? Wie viele Laute (Buchstaben) hat das Wort das — du — Hund — Papier? 2c.

5) Die Kinder antworten in der Regel in ganzen Sätzen; z. B. wie viel Finger sind das? — Antw. Dies sind **vier** Finger.

Anmerkung. Ungemein wichtig für richtiges Auffassen der Zahlen und der Hauptvorstellungen, wenn von Quantitäten geredet wird, ist die scharfe, accentvolle Betonung der Fragewörter: wie viel, der wie vielste 2c., und der Zahlwörter, welche die Antwort enthalten. Z. B. Lehrer: Wie viel Finger strecke ich jetzt in die Höhe? Schüler: Vier Finger. — Dies ist wichtiger, als man glaubt. Wir werden noch an mehreren Stellen darauf aufmerksam machen, und das Accentwort zuweilen, besonders zu Anfang einer Uebung durch den Druck hervorheben. Alles characteristisch, sicher, kräftig! Licht und Schatten! Sonst fehlt die erregende, doctrinelle Kraft, welche den Knaben aufrütteln, ermuthigen, stählen soll.

§. 2. Auf- und Abwärts-, oder Vorwärts- und Rückwärtszählen.

Aufwärts: auf eins folgt zwei; auf zwei folgt drei 2c. bis zehn.
Abwärts: vor zehn ist (steht) zunächst neun; vor neun ist acht u. s. w. bis eins.

Zusammen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn — zehn, neun, acht, sieben, sechs, fünf, vier, drei, zwei, eins.

Winke.

1) Zuerst alles mit Anschauung, dann ohne Anschauung (auswendig).
2) Fragen. Welche Zahl folgt auf vier 2c.? — Welche Zahl liegt zwischen fünf und sieben? — Welche Zahlen liegen zwischen zwei und fünf? — Wie viel Zahlen liegen zwischen drei und sechs? —
3) Verbinden des Auf- und Abwärtszählens:

eins, zwei; zwei, eins.
eins, zwei, drei; drei, zwei, eins.
eins, zwei, drei, vier; vier, drei, zwei, eins.
u. s. w.

§. 3. Angabe der Stelle jeder Zahl.

Dies ist der erste, dies der zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste, siebente, achte, neunte, zehnte Strich.

Winke.

1) Fragen. Der wie vielste Strich ist dieses? dieses? — Wo steht der erste, zweite, achte Strich?
2) Der wie vielste Knabe bist du von hier an? von hier? — Welcher ist der erste Knabe? 2c.

§. 4. Angabe der Einer.

Ein Strich ist ein Mal ein Strich, ein Einer oder ein Mal eins.
Zwei Striche sind zwei Mal ein Strich, zwei Einer oder zwei Mal eins.
Drei Striche sind drei Mal ein Strich, drei Einer oder drei Mal eins u. s. w.

Eins ist ein Mal eins.	Ein Einer ist ein Mal eins.
Zwei — zwei — —.	Zwei — sind zwei — —.
Drei — drei — —.	u. s. w.

1) Fragen. Sechs ist wie viel Mal eins? — Acht Einer sind wie viel Mal ein Einer? — Wie viel Einer enthält die Zahl vier? — Wie nennt man kurzweg sechs Mal eins?

2) Aufgaben. Welche Dinge sind in diesem Zimmer ein, zwei, drei, vier Mal? ꝛc. — Wie oft Mal hast du ein Auge? einen Arm? ein Bein? einen Finger an einer Hand? einen Finger an beiden Händen? — Wie viel Mal einen Groschen mußt du bezahlen, wenn du sieben Groschen zu bezahlen hast? — Wie oft kann man einen Groschen von neun Groschen wegnehmen, bis kein Groschen mehr da ist?

Anmerkung. Daß sechs, sechs Mal eins oder sechs Mal die Grundeinheit ist, muß den Schülern bis zur höchsten Deutlichkeit gebracht werden. Aus diesem Grunde läßt man auch in der Folge häufig den Werth einer Zahl, wie sie gewöhnlich ausgesprochen wird, in Einheiten oder Einer auflösen. Die Eins selbst erklären wir aber nicht weiter; denn was sie sei, ist dem Schüler klar, bedarf also keiner Auseinandersetzung. — Das Prinzip der Anschaulichkeit soll, wie die Lehrer wissen, den ganzen Elementarunterricht beherrschen. Aber worin besteht die Anschaulichkeit der Zahlvorstellungen? Etwa darin, daß man sich der Striche, Punkte, Würfel ꝛc. bedient? — Mit nichten, sondern darin, daß man sich bei jeder Zahl die Menge der Einheiten vorstellt, die sie enthält. Darum muß jede Zahl auf die Grundvorstellung Eins und (späterhin) auf die höheren Einheiten zurückgeführt werden.

II. Schriftlich.

§. 5. Kennen und Schreiben der Ziffern.

Ziffer 1 bedeutet . . . . |
— 2 — . . . . ||
— 3 — . . . . |||
— 4 — . . . . . . ||||
— 5 — . . . . . |||||

Ziffer 6 bedeutet . . . ||||||
— 7 — . . . |||||||
— 8 — . . ||||||||
— 9 — . . |||||||||
— 10 — . ||||||||||

Fragen. Mit welchem Zeichen wird die Zahl sechs bezeichnet? — Was bedeutet die Ziffer 6? — Wie viel Einer werden bezeichnet mit 2, 7, 9? — Zeige mir die Ziffer 4 und sage mir, wie viel Einer damit bezeichnet werden? — Wie folgen die Ziffern auf einander? — Welches ist die umgekehrte Reihe? — Zwischen welchen Ziffern steht die Ziffer 9? — Welche Ziffern stehen zwischen 3 und 7? — Bezeichnet mit Ziffern die Anzahl dieser Knaben, dieser Fenster ꝛc.

Anmerkung. Die Kinder üben sich im Schreiben der Ziffern. — Die zunächst folgenden Uebungen haben es immer nur mit Zahlen zu thun. Der Kürze wegen sind bei der schriftlichen Darstellung in diesem Buche Ziffern gebraucht. Der Unterschied zwischen Zahl und Ziffer, zwischen Sache und Zeichen muß den Kindern unvergeßlich gemacht werden. Manchem Lehrer ist dieser Unterschied noch nicht recht klar. Denn noch immer hört man z. B. von dem Gesange nach Zahlen. — Wo bei den zunächst folgenden mündlichen Uebungen Anschauungsmittel gebraucht werden, bedient sich der Lehrer in der Regel der Striche, nicht der Ziffern. Denn dieselben hindern den Schüler zuerst an der klaren Auffassung der Zahl. Also zuerst Rechnen mit Zahlen (Zahlenvorstellungen), Veranschaulichung derselben und der mit ihnen vorzunehmenden Operation durch Striche, Punkte ꝛc., dann Mitgebrauch der Ziffern. Wir befolgen überall diesen Gang: 1) mündlich, d. h. ohne Ziffern, wenn auch mit sichtbaren Veranschaulichungsmitteln von Seiten des Lehrers und der Schüler; 2) schriftlich, d. h. mit den Ziffern. Also sogenanntes Kopf- und Tafelrechnen in steter Verbindung, immer aber erst die Sache mit Versinnlichungsmitteln ohne Ziffern, dann das sichtbare Zeichen, d. h. die Ziffer. Wer das Rechnen lediglich auf die Ziffern baut und Alles an sie anknüpft, legt einen falschen Grund und führt ein schlechtes Gebäude auf.

Zweite Uebung.

Das Zusammenzählen (Addiren).

I. Mündlich.

§. 6. Hinzufügen eines Striches (der Zahl **eins**) zu andern Strichen (Zahlen).

Ein Strich und noch ein Strich sind zwei Striche; 1 und 1 sind 2 (Mal 1).
2 Striche — — — 3 — ; 2 — 1 — 3.
3 — — — — 4 — ; 3 — 1 — 4.
u. s. w. bis 9 und 1 sind 10 oder 10 Mal eins.
Nun wiederhole dasselbe mit den Ausdrücken **Einer** und **Einheiten**.

§. 7. Hinzufügen der Zahl 2.

1) 1 Strich und 2 Striche sind 3 Striche; 1 und 2 sind 3 (Mal 1).
2 Striche — — — 4 — ; 2 — — 4.
3 — — — — 5 — ; 3 — — 5.
4 — — — — 6 — ; 4 — — 6.
u. s. w. bis 8; 8 und 2 sind 10.

2) 1 Mal eins und 2 Mal eins gibt 3 Mal eins.
2 — — — — — 4 —
3 — — — — — 5 —
| | |
8 — — — — — 10 —

3) 2 Mal eins und 1 Mal eins gibt 3 Mal eins.
— — — 2 — — — 4 —
— — — 3 — — — 5 —
— — — 4 — — — 6 —
| | |
— — — 8 — — — 10 —

§. 8. Hinzufügung der Zahlen 3 bis 9.

Mit 3. 1 und 3 macht 4.
2 — 3 — 5; u. s. w.
3 und 1 macht 4.
3 — 2 — 5; u. s. w.
Mit 4. 1 und 4 macht 5.
2 — 4 — 6; u. s. w.
4 und 1 macht 5.
4 — 2 — 6; u. s. w.
Mit 5. 1 und 5 macht 6.
2 — 5 — 7; u. s. w.
5 und 1 macht 6.
5 — 2 — 7; u. s. w.

Ebenso mit den übrigen Zahlen bis 9, doch so, daß nicht über 10 herauskommt.

Bemerkung. Alle diese Uebungen werden zuerst an Strichen vorgenommen, dann auswendig, bis zur vollkommnen Geläufigkeit. In diesem §. 8. sind eigentlich zwei Uebungen zusammengestellt, welche darin übereinstimmen, daß zwei Zahlen, deren Summe nicht über 10 beträgt, zusammengezählt werden. Die erste Uebung besteht darin, daß die Zahlen in der natürlichen Zahlenreihe nach einander zu derselben Zahl, die zweite Uebung darin, daß dieselbe Zahl zu den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe hinzugefügt wird. Beide müssen angestellt werden.

Fragen. Wie viel macht 3 und 1? — Was kommt heraus, wenn man 4 und 5 zusammen thut? — 6 Einer und 3 Einer, wie viel Einer zusammen? — Welche Zahl entsteht, wenn man 4 um 3 vermehrt? — Wie heißt die Zahl, welche so viel ist, als 3 Mal 1 und 4 Mal 1 zusammen?

Aufgaben. 3 Bücher und noch 2 Bücher, wie viel Bücher? — 5 Bücher, 3 Bücher und noch 1 Buch ꝛc., wie viel Bücher? — 3 Blumen und 5 Blumen, wie viel Blumen? — Zähle zusammen 2 Rthlr., 3 Rthlr. und 1 Rthlr. — In einem Zimmer sind 2 Knaben, 3 Mädchen und 4 Erwachsene. Wie viel Personen zusammen? — Aehnliche Aufgaben bilden die Kinder selbst.

Anmerkung. 1. Der Schüler vollzieht die Aufgaben in §. 6 – 8 mit Strichen, welche unter oder neben einander gestellt werden. In letzterem Falle kann man hier schon die Bedeutung der Zeichen (+ und =) erklären.

Anmerkung 2. Spricht man von Gleichheit, so muß man auch von Ungleichheit reden, also von gleichen und von ungleichen Zahlen, von mehr und weniger, größer und kleiner. Ueberall im Unterricht stelle man die Gegensätze neben einander; denn die Gegensätze beleuchten einander. — §. 8. z. B. wird so ausgeführt.

| + | = ||, || + | = |||, ||| + | = ||||, ꝛc.

§. 7.: | + || = |||, || + || = ||||, ||| + || = |||||, ꝛc.

§. 9. Auflösen einer Zahl in mehrere Andere.

In 2. Die Zahl 2 besteht aus 1 und 1
3 besteht aus 2 und 1
1 — 2
4 läßt sich zerlegen in 3 und 1
2 — 2
5 — — — — 4 und 1
3 — 2
6 — — — — 5 und 1
4 — 2
3 — 3
7 — — — — 6 — 1
5 — 2
4 — 3 u. s. w. bis 10.

In 3. 3 läßt sich zerlegen in 1 — 1 — 1
4 — — — — 2 — 1 — 1
5 — — — — 3 — 1 — 1
2 — 2 — 1
6 — — — — 4 — 1 — 1
3 — 2 — 1
2 — 2 — 2 u. s. w. bis 10.

Auf diese Art kann der Lehrer auch noch die Zahlen in 4, 5 und mehr Theile zerlegen lassen.

Aufg. 1. Zerlege die Zahlen 2 bis 10 in 2 Theile, auf alle mögliche Weisen, mit Strichen!

|| = | + |
||| = || + |
|||| = ||| + | = || + || rc.

Aufg. 2. Zerleget die Zahlen 3 bis 10 in 3 Theile, auf möglichst verschiedene Weise!

||| = | + | + |
|||| = || + | + |
||||| = || + | + | + | = || + || + | rc.

Aufg. 3. Zerleget |||||| Striche in alle möglichen Theile:

||||||

||||| | — 5 und 1
|||| || — 4 — 2
||| ||| — 3 — 3
|||| | | — 4 — 1 und 1
||| || | — 3 — 2 — 1
|| || || — 2 — 2 — 2
||| | | | — 3 — 1 — 1 und 1
|| || | | — 2 — 2 — 1 — 1
|| | | | | — 2 — 1 — 1 — 1 und 1
| | | | | | — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 und 1

Fragen. Wie viel muß man zu 4 hinzuthun, um 7 zu erhalten? — Welche 3 Zahlen machen 8? — 3 Zahlen machen zusammen 9; die eine ist 5: welches sind die beiden andern? — Welche Zahlen lassen sich in 2 gleiche Theile zerlegen? In 3 gleiche? — Welches sind die 2 einander nächsten Zahlen, in welche ich 7 zerlegen kann? — Welches sind die an Größe verschiedensten Zahlen, in welche 9 zerlegt werden kann?

Anmerkung. Das Zählen von eins bis zehn geschieht durch Zusammensetzung (synthetisch); das Gegentheil ist die Zergliederung oder Zerlegung (analytisch). Beide Arten der Behandlung der Zahlen ergänzen einander, müssen daher auf einander folgen.

§. 10. II. Schriftlich.

Das Zeichen des Zusammenzählens ist ein stehendes kleines Kreuz (+), welches zwischen diejenigen Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen, gesetzt wird. Z. B. 3 + 2 heißt: die Zahlen 3 und 2 sollen zusammengezählt werden. (3 + 2) wird gelesen: 3 und 2, oder 3 zu 2, oder 2 zu 3, oder 3 und 2 zusammen, oder 3 und 2 zusammengezählt. Da 3 und 2 zusammen 5 gibt, so ist 3 und 2 gleich 5. Man schreibt dies so: 3 + 2 = 5. Die beiden Striche (=) heißen das Gleichheitszeichen. 3 + 2 = 5 wird gelesen: 3 und 2 sind gleich 5, oder 3 und 2 sind 5, oder 3 und 2 machen 5, oder 3 und 2 macht 5. — Zwei Zahlen zusammenzählen heißt: eine Zahl finden, welche so viel Einer (Einheiten, mal eins) hat, als die zwei Zahlen zusammen.

Winke.

Hierauf läßt der Lehrer ähnliche Bezeichnungen lesen, und angeben, was herauskommt, und was jedes Zeichen bedeutet. Z. B.

2 + 4 = ? 5 + 3 = ?

Auch schreiben die Schüler in Zeichen nieder, was der Lehrer sagt. Z. B. der Lehrer spricht: fünf und zwei gibt sieben. Die Schüler schreiben:

5 + 2 = 7

Dann sollen die Schüler auf ihren Schiefertafeln in fortlaufenden Reihen die bisherigen Uebungen des Zusammenzählens darstellen. Dadurch entstehen z. B. folgende Reihen:

1 + 1 = 2 2 + 2 = 4
2 + 1 = 3 2 + 3 = 5
3 + 1 = 4 ꝛc. 2 + 4 = 6 ꝛc.

6 = 5 + 1 = 2 + 2 + 2
= 4 + 2 = 3 + 1 + 1 + 1
= 3 + 3 = 2 + 2 + 1 + 1
= 4 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1
= 3 + 2 + 1 = 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 u. s. w.

Die Schüler lesen vor, was sie geschrieben haben.

Dritte Uebung.

Abziehen (Subtrahiren).

I. Mündlich.

§. 11. Abziehen der Zahlen von 1 bis 9.

Abziehen der 1. Wenn ich von 2 Strichen 1 wegnehme, so bleibt 1 Strich
— — — 3 — 1 — — — 2 Striche
— — — 4 — 1 — — — 3 —
— — —10 — 1 — — — 9 —

Dann: 1 von 10 bleibt 9
1 — 9 — 8
1 — 8 — 7
1 — 1 — nichts.

Dann: 10 weniger 1 ist 9
9 — 1 — 8
8 — 1 — 7
1 — 1 — nichts.

Abziehen der 2 bis 9. 10 weniger 2 ist 8
9 — 2 — 7
8 — 2 — 6 ꝛc.
10 — 3 — 7
10 — 4 — 6 ꝛc.:

u. s. w. mit allen Zahlen von 1 bis 9, abgezogen von 10 u. s. w. — Zuerst wird dieselbe Zahl von allen Zahlen, von 10 abwärts weggenommen; dann werden von derselben Zahl alle kleineren Zahlen weggenommen.

Fragen. Was bleibt übrig: wenn ich von 9 Mal eins 4 Mal eins wegnehme? — Wie viel ist 10 weniger 2? — Wie viel muß von 10 weggenommen werden, wenn 4 übrig bleiben soll? — Welche 2 Zahlen sind um 3 von einander verschieden? Antwort: 10 u. 7, 9 u. 6, 7 u. 4 ꝛc. — Wie groß ist der Unterschied von fünf Mal eins und zwei Mal eins?

Aufgaben. Von 8 Sgr. werden 2 ausgegeben. Wie viele bleiben übrig? Adolph hatte 10 Tauben. Wie viel hatte er noch, nachdem ihm 5 geschossen worden waren? — Karoline sollte 4 Räthchen stricken; sie strickt aber 9. Wie viel hatte sie mehr gestrickt, als sie sollte? — Aehnliche Aufgaben! Auch die Kinder machen dergleichen.

Anmerkung. Auch die Aufgaben des §. 11. werden am zweckmäßigsten zuerst mit Strichen gelöset. Man läßt entweder die wegzunehmenden durchstreichen, oder macht die Schüler hier schon mit dem Zeichen (—) bekannt.
Also entweder: zwei weniger eins = | | weniger | = |
drei — eins = | | | — | = | | ꝛc.
Oder: | | — | = |, | | | — | = | | ꝛc.

§. 12. Verbindung des Zuzählens und Abzählens.

Wie viel ist: 4 und 2 weniger 1?
6 — 3 — 4? ꝛc.
5 weniger 4, und 3?
10 — 8, — 9? ꝛc.

Zu 7 thut 4 und nehmt 3 weg. Was bleibt?
4 — 4 — — 4 — — — ?

Nun läßt man Reihenfolgen bilden, welche von einzelnen und von allen Kindern zusammen ausgeführt werden.

1) Gleichviel zu- und abgezählt.

a. 1 zu- und abgezählt.
$1 + 1 - 1 = 1$
$2 + 1 - 1 = 2$
$3 + 1 - 1 = 3$

b. 2 zu- und abgezählt.
$1 + 2 - 2 = 1$
$2 + 2 - 2 = 2$
$3 + 2 - 2 = 3$

c. 3 zu- und abgezählt.
$1 + 3 - 3 = 1$
$2 + 3 - 3 = 2$ ꝛc.

2) Ungleichviel zu- und abgezählt.

a. 2 zu- und 1 abgezählt
$1 + 2 - 1 = 2$
$2 + 2 - 1 = 3$
$3 + 2 - 1 = 4$

b. 1 zu- und 2 abgezählt.
$1 + 1 - 2 = 0$
$2 + 1 - 2 = 1$
$3 + 1 - 2 = 2$ ꝛc.

c. 3 zu- und 1 abgezählt.
$1 + 3 - 1 = 3$
$2 + 3 - 1 = 4$

d 1 zu- und 3 abgezählt.
$2 + 1 - 3 = 0$
$3 + 1 - 3 = 1$ ꝛc.

e. 3 zu- und 2 abgezählt.

f. 2 zu- und 3 abgezählt.

Aufgaben. Klementine hatte 4 Sgr. Sie erhielt noch zum Geschenk 6 Sgr. Dann kaufte sie ihrer Mutter ein Band für 3 Sgr. Wie viel Sgr. hatte sie noch? — Karl trug 9 Rthlr. nach Hause. Er verlor aber 8, und fand nur 3 wieder. Wie viel hatte er nun verloren, und wie viel brachte er mit nach Hause? — Aehnliche Aufgaben! Die Schüler müssen bei jeder dieser Uebungen so lange verweilen, bis sie selbst dergleichen Aufgaben mit Leichtigkeit und Lust bilden, und bis sie jede, ohne Nachhülfe des Lehrers, auflösen können. Die letzte Aufgabe z. B. löset ein aufmerksames Kind also: Da Karl 8 Rthlr. verlor, so hatte er nun 8 Rthlr. weniger als im Anfange, also 9 Rthlr. weniger 8 Rthlr., d. h. 1 Rthlr.; nun fand er 3 Rthlr. wieder, also vermehrte sich seine Baarschaft wieder um 3 Rthlr.; er hatte also nun 1 Rthlr. und 3 Rthlr., d. h. 4 Rthlr. Er brachte also

4 Rthlr. mit nach Hause, und hatte 9 Rthlr. weniger 4 Rthlr. d. h. 5 Rthlr. verloren.

Anmerkung. Mit Unermüdlichkeit müssen die Schüler in diesen mündlichen Darstellungen geübt werden. Es ist nicht genug, daß sie Aufgaben still für sich richtig machen, sie müssen die Operationen auch in ganz genauen Ausdruck fassen können. Denn die Rechenübungen sollen Denk- und Sprechübungen sein. So überall, auf allen Stufen! Man muß gar nicht nachlassen, bis es geht. So wird das Rechnen gleich von Anfang an eine praktische Logik. Auch die kleinste Aufgabe besteht aus einem oder mehreren Schlüssen.

Daß aber schwache Schüler nicht gleich so zusammenhangend sprechen können, weiß jeder Lehrer. Es ist auch nicht gleich nothwendig, ja man darf nicht Alles von Allen verlangen. Wenn schwache Schüler auf die leitenden Fragen des Lehrers richtig antworten, oder still für sich die Operationen richtig vollziehen, ohne Alles, was sie machen, sagen zu können, — man sei zufrieden und bezeige freudig (weil dadurch anspornend) seine Zufriedenheit. „Nie ganz zufrieden sein," tödtet in dem kleinen Menschen die Lust. Merke es dir, strebender Lehrer!

§. 13. II. Schriftlich.

Um schriftlich zu bezeichnen, daß eine Zahl von einer andern abgezogen werden soll, setzt man einen kleinen wagerechten Strich vor diejenige, welche abgezogen werden soll. Z. B. 4 — 1 heißt: von der Zahl 4 soll die Zahl 1 weggenommen werden; es wird gelesen 4 weniger 1, oder: von 4 eins weggenommen.

Die Schüler machen nun die vorhergehenden mündlichen Uebungen schriftlich, wie es hier auf dem Papiere größtentheils schon ist. Dadurch entstehen ganze Reihenfolgen, bei welchen man entweder die kleinere oder die größere Zahl dieselbe bleiben läßt. Z. B.

1 — 1 = 0	10 — 1 = 9	10 — 2 = 8
2 — 1 = 1	9 — 1 = 8	9 — 2 = 7
3 — 1 = 2 ꝛc.	8 — 1 = 7 ꝛc.	8 — 2 = 6 ꝛc.

10 — 1 = 9	9 — 1 = 8
10 — 2 = 8	9 — 2 = 7
10 — 3 = 7 ꝛc.	9 — 3 = 6 ꝛc.

Will man auch das Wort von gebrauchen, so sieht es so aus:

1 von 1 = 0	1 von 10 = 9
1 — 2 = 1	2 — 10 = 8
1 — 3 = 2 ꝛc.	3 — 10 = 7 ꝛc.

Auch das Zu- und Abzählen in Verbindung werde nun auf die angegebene Weise schriftlich geübt! Zugleich wird das Aufgeschriebene von den Kindern gelesen und erklärt. Z. B.

6 + 4 — 3 = 7	8 — 5 + 2 = 5
Denn 6 + 4 = 10	Denn 8 — 5 = 3
10 — 3 = 7	3 + 2 = 5
Folglich ist 6 + 4 — 3 = 7	8 — 5 + 2 = 5

Das sind kurze und einfache Schlüsse, welche das Nachdenken und Sprechvermögen der Kinder außerordentlich üben. Nur wolle der Lehrer nichts übereilen. Aller Anfang ist schwer, und jeder gründliche Unterricht schreitet ganz langsam vorwärts, wie jede ordentliche Bildung. Die übereilte Bildung taugt nichts. — Ein sicheres Fortschreiten im Rechnen ist nur dem Kinde möglich, welches in den ersten Uebungen recht befestigt worden ist.

Vermischte Aufgaben zur ersten Stufe.

1) Nennet Gegenstände, an welchen sich dasselbe Ding 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 Mal befindet!
Der Mensch hat einen Kopf, am Himmel ist eine Sonne ꝛc.
Der Mensch hat 2 Beine, 2 Augen ꝛc.
Manche Tische haben 3 Füße ꝛc.
Ich habe an beiden Händen zusammen 10 Finger.

2) Wie viel Uhr schlägt es eine Stunde vor 10 Uhr? vor 9 Uhr?

3) Wie heißt der erste, zweite, siebente Tag der Woche? Der erste, zweite, zehnte Monat des Jahres?

4) 2 Personen haben 6 Pfennige zu theilen; wie viel kann jeder bekommen?

5) 10 Schüler sitzen an 3 Pulten; wie viele können an jedem Pulte sitzen?
Am ersten 1, am zweiten 1, am dritten 8; oder am ersten 1, am zweiten 2, am dritten 7; ꝛc.

6) Suchet die Zahlen von 1 bis 10 auf, welche sich in 2 gleiche Zahlen theilen lassen! 2, 4, 6, 8, 10.

7) Suchet die Zahlen von 1 bis 10 auf, welche sich nicht in 2 gleiche Zahlen zerlegen lassen!

8) Suchet die Zahlen von 1 bis 10, welche sich in 3 gleiche Zahlen zerlegen lassen! 3, 6, 9.

9) 10 Aepfel sollen so unter 4 Kinder getheilt werden, daß sie alle ungleich viel erhalten; wie viel Aepfel erhält jedes Kind?
Das erste 1, das zweite 2, das dritte 3, das vierte 4.

10) Der Unterschied zweier Zahlen ist 2; welche Zahlen können es sein?
1 und 3, 2 und 4 ꝛc.

11) Der Unterschied zweier Zahlen ist 3; welche Zahlen können es sein?
1 und 4, 2 und 5 ꝛc.

12) Ich denke mir eine Zahl; ich thue 3 zu ihr hinzu; dann erhalte ich 9; welche Zahl habe ich mir gedacht? 6.

13) Wie viel ist 5 + 4 zusammen mehr als 2? 5 + 5 mehr als 4 + 4?

14) Ein Schüler hat 8 Pfennige; ein anderer 5 weniger; wie viel hat dieser?

15) Wie viel ist 3 + 4 weniger 4 + 5?

16) Die Zahl 9 besteht aus 3 Theilen, deren erster 4 ist; welches sind die beiden andern Theile? 4 und 1 oder 3 und 2.

17) 2 mehr als 3, und 4 mehr als 1, wie viel zusammen?

18) 6 weniger als 9, und 4 weniger als 8, wie viel zusammen?

Anmerkung 1. Am Ende jeder Stufe übt man die einzelnen Uebungen durcheinander

Anmerkung 2. Nochmals und ein für alle Mal: langsam und gründlich. Nicht eher weiter gegangen, bis Alles festliegt, vollkommen anschaulich geworden, von den Schülern selbst anschaulich dargestellt und mit geläufiger Zunge rasch und sicher hörbar gemacht werden kann. Eilt man auf den ersten Stufen, so daß man später genöthigt ist, das früher schlecht Eingeübte von neuem einzuüben, so ist ein unverzeihlicher Fehler begangen worden. Hier liegt der Grund, warum der Rechenunterricht in manchen Schulen den Kindern keine Freude macht. Denn es fehlt ihnen das belohnende, befeuernde Gefühl der Sicherheit, der gewachsenen Kraft.

Anmerkung 3. Die Grundzahlen von eins bis zehn haben wir zusammengezählt und von einander abgezogen; auch sind Theilungs- und Vervielfachungsaufgaben vorgekommen. Also sind auf dem kleinen Zahlenraume

von eins bis zehn außer dem Numeriren sämmtliche vier Species angewandt worden, gemäß dem allgemein-didactischen Grundsatze: man muß einen Gegenstand von allen Seiten betrachten; oder: es ist besser, einen Gegenstand von vielen Seiten zu handhaben, als viele Gegenstände einseitig.

Anmerkung. Die äußere Ordnung bei den Uebungen, wo es auf Fertigkeit ankommt, ist die: Der Lehrer steht vor den Schülern, daß Alle ihn sehen können (er geht nicht umher, noch weniger läuft er umher — er steht still); er sieht Alle an; Alle sehen ihn an und halten die rechte Hand vor die Brust. So wie eine Aufgabe gegeben (einmal, nicht mehrmals gegeben) worden, hebt der Schüler, welcher die Aufgabe gelöset hat, den Zeigefinger (nicht die Hand, noch weniger den Arm) in die Höhe, und der Lehrer ruft einen der Schüler, welche die Antwort geben können, mit Namen oder durch einen Wink dazu auf. Alle die Schüler, welche die gegebene Antwort billigen, ziehen den Zeigefinger ein; die aber, welche ein anderes Resultat haben, heben den Zeigefinger etwas höher. So weiß der Lehrer immer, was jeder denkt; Alle denken und antworten mit. — Wie wichtig das Halten auf solche äußere Ordnung und Anständigkeit ist, weiß jeder praktische Lehrer. Regsamkeit, Lebendigkeit, Rührigkeit, Raschheit, innere und äußere; aber kein Schreien, Rufen, Lärmen, keine wilde Wirthschaft! Ernste, feste Haltung, Zügelung, Lenkung und Richtung der jugendlichen Kraft! Geistesgymnastik! — Das Certiren oder Streiten um den Platz (nicht aus Ehrgeiz, sondern aus jugendlicher Lust — als belebendes Spiel betrachtet,) ist auch ein Mittel, Kinder in lebendiger Thätigkeit zu erhalten, geistesträge hinein zu versetzen. Bei Wiederholungen ist es am rechten Platze!

Zweite Stufe.

Die Behandlung der Zahlen von Zehn bis Hundert.

Erste Uebung.

Das Zählen von Zehn bis Hundert.

I. Mündlich.

§. 14. Das Zählen von 10 bis 20.

Diese und die folgenden Uebungen werden immer zuerst anschaulich, z. B. an der Pestalozzischen Einheitentabelle, vorgenommen. Der Lehrer schreibt die Zahlen in Reihen an die Tafel, die Kinder auf ihre Schiefertafeln.

Zehn und eins ist eilf (elf);
Zehn und zwei ist zwölf;
Zehn und drei ist drei und zehn = dreizehn;
Zehn und vier ist vier und zehn = vierzehn ꝛc.
Zehn und zehn ist zwei Mal zehn = zwanzig.

Die Kinder werden nun im Auf- und Abzählen von zehn bis zwanzig geübt.

Fragen. Dreizehn ist zehn und — ? — Siebenzehn ist zehn und — ? — Zehn und zwei heißt — ? — Zehn und neun heißt — ? — Zwischen welchen Zahlen liegt achtzehn? — Zwanzig ist wie viel Mal zehn?

§. 15. Das Zählen von 10 bis 100 in Zehnern.

1	Mal	10	ist	1	Zehner	oder	1	Mal	10	Einer	(10)						
2	—	—	sind	2	—	—	2	—	—	—	oder zwanzig	(20)					
3	—	—	—	3	—	—	3	—	—	—	—	dreißig	(30)				
4	—	—	—	4	—	—	4	—	—	—	—	vierzig	(40)				
5	—	—	—	5	—	—	5	—	—	—	—	fünfzig	(50)				
6	—	—	—	6	—	—	6	—	—	—	—	sechszig	(60)				
7	—	—	—	7	—	—	7	—	—	—	—	siebenzig	(70)				
8	—	—	—	8	—	—	8	—	—	—	—	achtzig	(80)				
9	—	—	—	9	—	—	9	—	—	—	—	neunzig	(90)				
10	—	—	—	10	—	—	10	—	—	—	—	hundert	(100)				

Fragen. 3 Zehner wie viel Einer? — 5 Zehner wie viel Einer? — 7 Zehner wie viel Einer? — 6 Zehner wie viel Mal eins? — 9 Zehner wie viel Mal eins? — Neunzig Einer wie viel Zehner? — Zwanzig Einer wie viel Zehner? — Siebenzehn Einer wie viel Zehner und Einer? — Vierzehn Einer wie viel Zehner und Einer?

§. 16. Das Zählen von 10 bis 100 in Zehnern und Einern.

Zwischen den einzelnen Zehnern liegen noch andere Zahlen, nämlich die aus Zehnern und Einern zusammengesetzten Zahlen. Sie entstehen, wenn man Einer zu den Zehnern hinzuthut. Dies ist aber schon mit einem Zehner geschehen, wodurch die Zahlen der Einer von zehn bis zwanzig entstanden. Hier muß dies noch mit den übrigen Zehnern geschehen.

2 Zehner sind zwanzig Einer (20);
— — und 1 Einer sind zwanzig und ein, oder ein und zwanzig Einer (21);
— — 2 Einer sind zwanzig und zwei, oder zwei und zwanzig Einer (22);
— — 3 Einer sind zwanzig und drei, oder drei und zwanzig Einer (23);
u. s. w. mit allen Zehnern und Einern bis zu 10 Zehnern oder hundert Einern.

Hiernach entstehen die (der Kürze wegen hier mit Ziffern bezeichneten) Zahlenreihen;

1)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3)	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
4)	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
5)	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
6)	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
7)	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
8)	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
9)	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Hier kommt es vorzüglich auf folgende Punkte an:

a) Daß die Kinder die Anzahl der Einer, welche jede Zahl bis hundert bezeichnet, sinnlich angeschaut haben, folglich sich die Anzahl derselben klar vorstellen.

b) Daß die Kinder jede Anzahl Einer in Zehner und Einer auflösen können; z. B. drei und sechszig sind sechs Zehner und drei Einer.

c) Daß sie die Art der Bezeichnung der Zehner- und Einermenge mit Worten richtig aufgefaßt haben. Z. B. vier Zehner heißen vierzig Einer; vier Zehner sind vierzig Mal eins. Sieben und achtzig Einer sind sieben Einer und acht Zehner oder sieben Einer und achtzig Einer.

d) Daß sie mit Geläufigkeit von 1 bis 100 auf- und abwärts zählen lernen. Deshalb lasse der Lehrer auf die mannigfaltigste Weise zählen. Z. B.
1) in der natürlichen Reihenfolge vorwärts 10, 11, 12 rc.
— — — rückwärts 100, 99, 98 rc.
2) unterbrochen. Zählt von 24 bis 40
— — 88 bis 70 rc.
3) von 10 zu 10 steigend und fallend. Z. B. 10, 20, 30, rc.
100, 90, 80, rc.
1, 11, 21, 31, rc.
2, 12, 22, 32, rc.
3, 13, 23, 33, rc.
99, 89, 79, 69, rc.
98, 88, 78, 68, rc.

Anmerkung 1. Vorzüglich wichtig ist das Zählen in Reihenfolgen. Es geschieht abwechselnd von einzelnen Schülern und im Chor. Alles bis zur größten Geläufigkeit und Mundfertigkeit.

Anmerkung 2. Wenn die Kinder die Zahlen 40, 60, 80 rc. in Strichen angeschaut und selbst dargestellt haben; so werden sie das Bedürfniß einer kürzeren Bezeichnungsweise der Zahlen lebhaft empfinden. Solches Bedürfniß bearbeitet die Seele des Kindes für den folgenden Unterricht. — Gar nicht unpassend ist es übrigens, die römische X zuerst als Zahlzeichen für zehn Einer zu gebrauchen, so wie man die Tillich'schen Rechenstäbe sehr gut zur Versinnlichung des, unser ganzes Rechnen beherrschenden, Zehnergesetzes gebrauchen kann. Die Anwendung dieser Lehrmittel wird dem Lehrer sehr dringend empfohlen.

II. Schriftlich.

§. 17. Das Aufschreiben der Zahlen von 10 bis 20.

Die Zahl Zehn wird bezeichnet mit der Ziffer 1 und der Null. Diese steht auf der rechten, jene auf der linken Seite. Die Einer kommen in die erste Stelle, von der rechten zur linken Hand gezählt.

10 und 1 oder eilf = 10 + 1 = 11
10 — 2 — zwölf = 10 + 2 = 12
10 — 3 — dreizehn = 10 + 3 = 13

Fragen. Was bedeuten diese Ziffern: 14, 18, 19, 11 rc.? — Wie schreibt man sechszehn, siebenzehn? — Schreibet zehn, fünfzehn, zwanzig rc.!

§. 18. Das Aufschreiben der Zehner.

Wie ein Zehner durch eine 1 zur Linken und eine 0 zur Rechten bezeichnet wurde, so stellt man überhaupt alle Zehner in die zweite Stelle zur Linken und eine 0 ihnen zur Rechten, wenn bloß Zehner geschrieben werden sollen.

1	Zehner	(zehn oder 1 zig)	=	10
2	—	(2 zig oder zwanzig)	=	20
3	—	(3 zig oder dreißig)	=	30
4	—	(4 zig)	=	40
5	—	(5 zig)	=	50
6	—	(6 zig)	=	60
7	—	(7 zig)	=	70
8	—	(achtzig)	=	80
9	—	(neunzig)	=	90
10	—	(zehn zig oder hundert)	=	100

Die Zehner stehen in der zweiten Stelle (zur Linken). So viel Einer eine Ziffer (an sich in der ersten Stelle) bedeutet, so viel Zehner bezeichnet sie in der zweiten Stelle.

§. 19. Das Aufschreiben der Zehner und Einer bis 100.

Wie bei den Zahlen von 10 bis 20 die Zehner in die zweite, die Einer in die erste Stelle zu stehen kommen, also ist es auch bei den übrigen Zahlen von 20 bis 100, folglich von 10 bis 100. In der ersten Stelle stehen die Einer, in der zweiten die Zehner.

Ein	und	zwanzig	=	zwanzig	und	1 = 20 + 1 = 21
Zwei	—	—	=	—	—	2 = 20 + 2 = 22
Drei	—	—	=	—	—	3 = 20 + 3 = 23

u. s. w. bis 100.

Aufgaben.

1) Der Lehrer diktirt den Schülern Zahlen, welche in dem Gebiete von 1 bis hundert liegen.

2) Er schreibt Zahlen an die Tafel, und läßt sie lösen und auflösen. Hier gehen die beiden Uebungen Zahlen schreiben und Zahlen lesen parallel mit einander fort.

3) Er diktirt ihnen verschiedene Zahlenpaare, welche mit denselben Ziffern geschrieben werden.

Z. B. 12, 21, — 13, 31, — 14, 41 2c.
21, 12, — 23, 32, — 24, 42 2c.
34, 43, — 35, 53, — 36, 63 2c.

Hieraus entnehmen die Schüler den Satz: Der Werth einer Ziffer hängt von der Stelle ab, welche sie einnimmt. Sie unterscheiden daher genau den Werth einer Ziffer an sich (ihren absoluten Werth) von ihrem Stellenwerthe (ihrem relativen Werth).

4) Die Schüler diktiren einander Zahlen. Auch der Lehrer kann sie (zuweilen absichtlich falsch) an die Tafel schreiben.

5) Die Schüler bezeichnen die angegebenen Zahlen mit Ziffern und mit Strichen.

6) Der Lehrer diktirt ihnen Zehner und Einer, die Schüler schreiben sie in einem Satze.

Z. B. Schreibet	4	Zehner	und	3	Einer	(43)
—	8	—	—	9	—	(89)
—	7	Einer	—	4	Zehner	(47)
—	0	—	—	6	—	(60)
—	8	—	—	0	—	(8)
—	4	—	—	8	Einer	(12)
—	6	Zehner	—	2	Zehner	(80) 2c.

Zweite Uebung.

Das Zuzählen der Grundzahlen.

(Grundzahlen heißen die ersten 10 Zahlen.)

§. 20. I. Mündlich.

In dem Zusammenzählen derselben zu allen Zahlen bis 100 muß der Schüler eine große Gewandtheit besitzen. Man läßt ihn daher mündlich und schriftlich sich im Zusammenzählen üben. Was hier geschehen soll, wird am übersichtlichsten in Reihenfolgen gezeigt.

a. Zuerst läßt man alle Zahlen von 1 bis 10 zusammenzählen, welche vereinigt mehr als 10 machen. Dies gibt Reihenfolgen, wie folgt:

9 + 1 = 10	7 + 4 = 11	4 + 7 = 11
9 + 2 = 11	7 + 5 = 12	4 + 8 = 12
9 + 3 = 12	7 + 6 = 13	4 + 9 = 13
9 + 4 = 13	7 + 7 = 14	
9 + 5 = 14	7 + 8 = 15	3 + 8 = 11
9 + 6 = 15	7 + 9 = 16	4 + 9 = 12
9 + 7 = 16		
9 + 8 = 17	6 + 5 = 11	2 + 9 = 11
9 + 9 = 18	6 + 6 = 12	
	6 + 7 = 13	
8 + 3 = 11	6 + 8 = 14	
8 + 4 = 12	6 + 9 = 15	
8 + 5 = 13		
8 + 6 = 14	5 + 6 = 11	
8 + 7 = 15	5 + 7 = 12	
8 + 8 = 16	5 + 8 = 13	
8 + 9 = 17	5 + 9 = 14	

b. Mit derselben Zahl wird fortgezählt.

10 + 2 = 12; 12 + 2 = 14 ꝛc. bis 100
10 + 3 = 13; 13 + 3 = 16 ꝛc. — —
10 + 4 = 14; 14 + 4 = 18 ꝛc. — —
| |
10 + 10 = 20; 20 + 10 = 30 — —

c. Alle Zahlen von 1 bis 10 werden zu derselben Zahl gefügt.

10 + 1 = 11; 10 + 2 = 12, bis 10 + 10 = 20
11 + 1 = 12; 11 + 2 = 13, — 11 + 10 = 21
12 + 1 = 13; 12 + 2 = 14, — 12 + 10 = 22
u. s. w.

d. Dieselbe Zahl wird zugezählt, indem die andern Zahlen immer um 10 steigen.

10 + 1 = 11; 20 + 1 = 21; 30 + 1 = 31 ꝛc.
10 + 2 = 12; 20 + 2 = 22; 30 + 2 = 32 ꝛc.
u. s. w.
11 + 1 = 12; 21 + 1 = 22; 31 + 1 = 32 ꝛc.
11 + 2 = 13; 21 + 2 = 23; 31 + 2 = 33 ꝛc.
u. s. w.

Fragen, Aufgaben und Winke.

1) 7 + 5 = ? 19 + 2 = ? 22 + 8 = ? ꝛc.

2) Ich kenne 2 Zahlen, welche zusammen 24 machen. Die eine ist 16. Welches ist die andere?

3) Welche 2 Zahlen machen zusammen 17?
17 = 16 + 1 = 15 + 2 = 14 + 3 ꝛc.

4) Welche 3 Zahlen machen zusammen 20?
20 = 18 + 1 + 1 = 17 + 2 + 1 = 16 + 3 + 1 = 16 + 2 + 2. ꝛc.

6) Zählet mit 2, 3, 4 ꝛc. aufwärts, immer 1, 2, 3 ꝛc. Zahlen überspringend!
10, 12, 14, 16 ꝛc. — 10, 13, 16, 19 ꝛc.

7) Die durch vorstehende Uebung entstehenden Zahlen läßt man abwechselnd von einzelnen Kindern oder ganzen Bankreihen nennen.

Iste Bank:		IIte Bank:		IIIte Bank:	
	12;		14;		16;
—	18;	—	20;	—	22.

7) Die erste Bank zählt jedes Mal 2, die zweite Bank 3 und die dritte Bank 4 zu.

Iste Bank:		IIte Bank:		IIIte Bank:	
	12;		15;		19;
—	21;	—	24;	—	28;
—	30;	—	33;	—	37 ꝛc.

8) Am meisten zu üben sind die Uebergänge von einer Zehnerreihe in die folgende.
$37 + 4 = 41$; $36 + 6 = 42$ ꝛc.
Hier ist es zweckmäßig, die zur ersten Zahl hinzufügende zu zerlegen, daß jedes Mal zuerst eine Anzahl Zehner entsteht.
$48 + 7$. Hier wird 7 in $2 + 5$ zerlegt.
$48 + 2 = 50$; $50 + 5 = 55$.
Folglich ist: $48 + 7 = 55$.
Dies gibt kleine Schlüsse.
$67 + 9$, wie viel?
Antw. $9 = 3 + 6$
$67 + 3 = 70$
$70 + 6 = 76$

$67 + 9 = 76$.
Oder man zerlegt die erste Zahl in Zehner und Einer, fügt diese Einer zu den folgenden Einern, verwandelt die Summe in Zehner und Einer, und zählt nun Zehner zu Zehnern.
$28 + 9$, wie viel?
Antw. 28 = 2 Zehner + 8 Einer
9 Einer + 8 Einer = 17 Einer
17 Einer = 1 Zehner + 7 Einer
2 Zehner + 1 Zehner = 3 Zehner
3 Zehner + 7 Einer = 37 Einer

28 + 9 = 37 Einer.
Diese Uebung ist zur Befestigung der Schüler in dem Zehnergesetz sehr wichtig, und die Schüler gewöhnen sich dadurch an zusammenhängende Darstellungen.

9) Auf wie mancherlei Weise kann 36 durch Zusammenfügung von 3, 4 ꝛc. Zahlen herausgebracht werden? — Welche 5 Zahlen machen 50? ꝛc.

10) 40 Sgr. und 9 Sgr., wie viel zusammen? — 37 Aepfel + 4 Aepfel + 7 Aepfel machen? — In einem Garten stehen 63 Obstbäume. Man pflanzt 9 hinzu. Wie viel sind es nun?

11) Die Schüler geben einander Aufgaben.

§. 21. II. Schriftlich.

Was vorstehend mündlich geschah, soll nun schriftlich geschehen. Die Art der Reihenfolgen ergibt sich, da wir uns oben schon der schriftlichen Bezeichnungsweise bedient haben, von selbst. Es sind dies zweckmäßige Aufgaben für den Privatfleiß, oder für stille Arbeit in der Schule. Doch müssen die Schüler auch angeleitet werden, senkrecht stehende Reihen zusammen zu zählen.

$14 + 3 + 2 + 1 = 20$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 20 \end{array}$$

Legen die Schüler Rechenschaft von ihrem Thun ab, oder wird an der Tafel gemeinschaftlich zusammengezählt, so läßt man jedes Mal die Wörter Einer oder Mal Eins hinzufügen, und die Summe in Einer und Zehner auflösen.

Z. B. 64
9
8
7
6

6 Einer und 7 Einer sind 13 Einer. 13 Einer und 8 Einer sind 21 Einer. 21 Einer und 9 Einer sind 30 Einer. 30 Einer und 4 Einer sind 34 Einer. 34 Einer sind 3 Zehner und 4 Einer. Also kommt in die erste Stelle die Ziffer 4. 3 Zehner und 6 Zehner sind 9 Zehner. Also kommt in die zweite Stelle die Ziffer 9. Obige Zahlen machen also zusammen 94 Einer.

Bis zur völligen Geläufigkeit muß diese Art des Zusammenzählens fortgeübt werden. Diejenigen Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen, heißen Summanden, und die durch die Zusammenzählung der Summanden entstehende Zahl heißt die Summe. Die Operation selbst heißt das Zusammenzählen oder das Addiren (die Addition). Die Summe hat so viel Einer, als alle Summanden zusammen.

Dritte Uebung.

Das Abziehen der Grundzahlen.

§. 22. I. Mündlich.

a. Die Grundzahlen werden von den Zahlen 11 bis 20 abgezählt. Wir stellen die Sache gleich in Reihenfolgen dar.

11 — 1 = 10	11 — 4 = 7	14 — 9 = 5
12 — 1 = 11	12 — 4 = 8	15 — 9 = 6
zc.	zc.	16 — 9 = 7
11 — 2 = 9	11 — 5 = 6	17 — 9 = 8
12 — 2 = 10	12 — 5 = 7	18 — 9 = 9
13 — 2 = 11	zc.	19 — 9 = 10
zc.	:	
11 — 3 = 8	11 — 9 = 2	
12 — 3 = 9	12 — 9 = 3	
zc.	13 — 9 = 4	

Fragen. Wie viel ist 16 weniger 5? — Wie viel muß von 18 abgezogen werden, wenn 9 übrig bleiben soll? — Welche Zahl ist um 7 kleiner als 15?

Diejenige Zahl, von welcher eine andere abgezogen werden soll, nennt man die Vollzahl (den Minuend); diejenige, welche von der

Vollzahl abgezogen werden soll, die **Abzugszahl** oder den **Abzug** (den Subtrahend); diejenige Zahl, welche übrig bleibt, die **übrige Zahl**, den **Rest**, den **Unterschied** (die Differenz). Der Unterschied hat so viel Einer, als die Vollzahl mehr hat, als die Abzugszahl. Die Vollzahl hat so viel Einer, als die Abzugszahl und der Unterschied zusammen. Die Abzugszahl hat so viel Einer, als die Vollzahl mehr hat als der Unterschied.

16 — 4 = 12. Hier ist 16 die Vollzahl, 4 die Abzugszahl, 12 der Rest.

16 = 12 + 4
4 = 16 — 12
12 = 16 — 4

---

b. Die Grundzahlen werden von den Zahlen 20 bis 100 abgezogen.

1) Man zieht alle Grundzahlen von allen Zahlen ab.

1 von 20 bleibt 19;	1 von 21 bleibt 20;	1 von 22 bleibt 21
2 — — — 18;	2 — — — 19;	2 — — — 20
3 — — — 17;	3 — — — 18;	3 — — — 19
2c.	2c.	2c.

2) Oder man fängt mit den größeren Zahlen an.

29 weniger 1 = 28;	28 — 1 = 27;	27 — 1 = 26 2c.
29 — 2 = 27;	28 — 2 = 26;	27 — 2 = 25
2c.	2c.	2c.
39 — 1 = 38		
39 — 2 = 37	2c.	

3) Man zählt von dem Reste wieder dieselbe Zahl ab.

30 weniger 2 = 28;	28 — 2 = 26;	26 — 2 = 24 2c.
30 — 3 = 27;	27 — 3 = 24;	24 — 3 = 21 2c.
|	|	|
100 — 2 = 98;	98 — 2 = 96;	96 — 2 = 94 2c.
100 — 3 = 97;	97 — 3 = 94;	94 — 3 = 91 2c.
|	|	|
99 — 2 = 97;	97 — 2 = 95;	95 — 2 = 93 2c.
99 — 3 = 96 2c.		
2c. 2c.		

Also zuerst 100 weniger 1 = 99; 99 — 1 = 98 2c.
100 — 2 = 98; 98 — 2 = 96 2c.
100 — 3)
100 — 4) = ?
|
100 — 10)
Dann 99 — 1
99 — 2
|
99 — 10 2c.
Dann mit 98 u. s. w.

4) Man steigt mit den Vollzahlen um 10 und zieht die Grundzahlen ab.

12 — 2 = 10	13 — 2 = 11
22 — 2 = 20	23 — 2 = 21
32 — 2 = 30	33 — 2 = 31
2c.	2c.
13 — 3 = 10	14 — 3 = 11
23 — 3 = 20	24 — 3 = 21
2c.	2c.

5) Man verweilt am längsten bei denjenigen Zahlenpaaren, welche einen Uebergang aus einer Zehnerreihe in eine andere hervorbringen. Soll z. B. 7 von 63 abgezogen werden, so bleiben 56 Einer. Statt 6 Zehner und 3 Einer hat man nun 5 Zehner und 6 Einer. Man läßt daher abziehen

von	10, 20, 30 —	bis	100 die	Grundzahlen	1 bis 10
—	11, 21, 31 —	—	91 —	—	2 — 10
—	12, 22, 32 —	—	92 —	—	3 — 10
—	13, 23, 33 —	—	93 —	—	4 — 10
—	14, 24, 34 —	—	94 —	—	5 — 10
—	15, 25, 35 —	—	95 —	—	6 — 10
—	16, 26, 36 —	—	96 —	—	7 — 10
—	17, 27, 37 —	—	97 —	—	8 — 10
—	18, 28, 38 —	—	98 —	—	9 — 10
—	19, 29, 39 —	—	99 —	—	10

Fragen, Aufgaben und Winke.

1) Wie viel ist 57 mehr als 51? — Wie viel weniger als 67 ist 59? — Welches ist der Unterschied von 38 und 29? — Wie viel bleibt, wenn man 8 von 97 abzieht? — Wie viel Einer muß man zu 21 Einern hinzuthun, um 30 Einer zu erhalten? — Welche Zahl ist um 7 × 1 kleiner als 52 × 1? — Wie viel Einer muß man von 77 × 1 abziehen, wenn 68 × 1 bleiben soll? — Aehnliche Fragen in der verschiedensten Ausdrucksweise!

2) Erleichterungen (Kunstgriffe) beim Abziehen, auf welche die Schüler entweder von selbst oder durch leichte Hindeutung kommen werden, sind z. B. folgende:

a. Soll 8 von 19 abgezogen werden, so zerlegt man 19 in 10 × 1 und 9 × 1 und zieht die 8 × 1 von 9 × 1 ab; es bleibt 1 × 1. Also ist 19 — 8 = 10 × 1 + 1 × 1 = 11 × 1.

b. Soll 8 von 17 abgezogen werden, so zerlegt man 8 in 7 und 1, zieht nun von 17 erst 7 ab und dann 1. 17 — 7 — 10; 10 — 1 = 9. Folglich ist 17 weniger 8 = 9.

c. Soll 7 von 16 abgezogen werden, so kann man sich die Sache so vorstellen, als solle man eine Zahl suchen, zu welcher 7 hinzugefügt werden soll, damit 16 herauskomme; oder 16 bestehe aus 7 und welcher Zahl; nämlich aus 7 + 9. Also ist 16 — 7 = 9.

d. Soll eine nur um einige Einer von 10 verschiedene Grundzahl, nämlich 9, 8 oder 7 von einer Zahl abgezogen werden, so zieht man lieber 10 ab und zählt zu dem Reste wieder 1, 2 oder 3 hinzu, nämlich so viel Einheiten, als man zu viel abgezogen hat. Z. B. 72 — 9?

72 — 10 = 62
62 + 1 = 63
―――――――
72 — 9 = 63

94 — 8? 94 — 10 ist 84; 84 + 2 ist 86; folglich ist 94 — 8 = 86.

47 — 8?
47 — 10 = 37
37 + 2 = 39
―――――――
47 — 8 = 39

3) Jemand besitzt 48 Thlr. Er gibt 7 davon aus. Wie viel Thlr. hat er noch? — Ein Knabe verliert von 85 Sgr. 9 Sgr. Wie viel mehr hat er noch als 70 Sgr.? — Karl hat 21 Sgr. Er verwendet 8 Sgr. zu einem Geburtstags-Geschenk für seine Mutter. Wie viel Sgr. hat er noch? — Eine Mutter hat 100 Ellen Leinewand. Sie verfertigt davon für das jüngste Kind 2 Hemden, jedes von 4 Ellen, für das zweite Kind 2 Hemden, jedes von 5 Ellen, für das dritte 2 Hemden, jedes von 6 Ellen. Wie viel Ellen Leinewand hatte die Mutter noch?

4) Wie viel ist 16 und 8 weniger 5? 24 + 5 + 4 — 8?
— 36 + 6 — 5? 47 + 9 — 2?
— 64 — 8 + 2? 100 — 10 + 7?
— 18 + 9, mehr als 20? 72 + 8, mehr als 70?
— 94 — 7, wen. als 90? 93 — 9, wen. als 80?

In diesen letzten Beispielen ist das Zuzählen mit dem Abziehen verbunden. Man vermehrt, erleichtert und erschwert die Aufgaben nach dem Bedürfniß der Schüler. Will man dieses in Reihenfolgen thun lassen, so läßt man eine bestimmte Zahl zu- und eine andere bestimmte Zahl abzählen und fortfahren. Z. B. 1 + 6 = 7; 7 — 4 = 3 ꝛc.
3 + 6 = 9; 9 — 4 = 5 ꝛc.

Die Schüler bilden selbst Aufgaben!

Anmerkung. §. 21. a sind ohne weitere Erklärung die Ausdrücke Rest und Unterschied oder Differenz als gleichbedeutend gebraucht, und einige Sätze über die Größe der beim Abziehen vorkommenden Zahlen im Verhältniß zu den übrigen sind gleich angehängt. Vielleicht bedarf es darüber für manche Anfänger noch einer besonderen Entwickelung. Sie besteht in Folgendem:

Spricht man vom Unterschiede zweier Zahlen, so will man wissen, um wie viel Einer eine Zahl größer ist als die andere, oder: um wie viel Einer die eine Zahl kleiner ist als die andere. Ein Unterschied setzt also zwei ungleiche Zahlen voraus; gleiche Zahlen geben keinen Unterschied; denn, da sie gleich groß sind, d. h. gleich viel Einer enthalten, so ist keine größer oder kleiner als die andre. Z. B. 4 — 4 = 0; 6 — 6 = 0. Zwischen ungleichen Zahlen aber besteht ein Unterschied; z. B. zwischen 12 und 8. Dieser Unterschied kann auf dreifache Weise gefunden werden.

1) Man zieht die kleinere Zahl von der größeren ab; 12 — 8 = 4; Unterschied: 4.
2) Man geht von der größeren aus und sieht zu, wie viel Einer man wegnehmen muß, um die kleinere Zahl übrig zu behalten; 12 — 4 = 8; Unterschied: 4.
3) Man geht von der kleineren Zahl aus und sieht zu, wie viel Einer man zu ihr hinzu thun muß, um die größere zu erhalten; 8 + 4 = 12. Unterschied: 4.

Auf letzte Weise wird es schwachen Schülern am leichtesten.

Die Gründe für diese drei Arten, den Unterschied zweier Zahlen zu finden, liegen in folgenden einfachen Sätzen:

Der Unterschied zweier Zahlen ist gleich der größeren weniger der kleineren.
Die kleinere ist gleich der größeren — dem Unterschiede.
Die größere ist gleich der kleineren + dem Unterschiede.
Diese Sätze wurden oben schon auf andere Weise ausgedrückt.
Wie groß ist der Unterschied zwischen 54 und 9?

1) 54 — 9 = 45.
2) Nehme ich 44 von 54 weg, so habe ich 10, also 1 zu viel weggenommen. Ich thue daher zu 44 wieder 1 hinzu. Also ist 54 um 45 größer als 9. Daher ist 54 — 9 = 45.
3) 50 zu 9 gefügt gibt 59, welches 5 mehr ist als 54. Folglich muß ich 5 weniger als 50 d. h. 45 zu 9 hinzuthun, um 54 zu erhalten; d. h. 9 ist um 45 kleiner als 54.

Man übt die Schüler in diesen 3 Rechnungsweisen, auf welche sie gewöhnlich von selbst kommen, durch Aufgaben, welche man in die Fragen

kleidet: Wie viel bleibt, wenn ich 4 von 18 abziehe ꝛc.? Um wie viel ist 18 mehr als 4? Um wie viel ist 4 weniger als 18?

Noch einige Beispiele auf folgende Weise:

Ich kenne 2 Zahlen. Die größere ist um 6×1 größer als die kleinere. Welche Zahlen sind es?

Diese Aufgabe läßt eine unzählige Menge richtiger Antworten zu, da unzählig viele Zahlenpaare denselben Unterschied darbieten. Solche Aufgaben heißen unbestimmte. Das kleinste Zahlenpaar, welches der Aufgabe Genüge leistet, ist 1 und 7. Dann folgen 2 und 8, 3 und 9 ꝛc.

2 Zahlen. Die größere ist um 9 größer als die kleinere, welche 19 ist. Welches ist die größere? Antw. Da die größere um 9×1 größer ist als 19, so ist sie = 19 + 9 = 28.

2 Zahlen. Die kleinere ist um 8 kleiner als die größere, welche 5 mehr ist als 60. Welches ist die kleinere? Antw. Die größere Zahl ist 60 + 5 = 65. Da die kleinere Zahl 8 weniger ist als 65, so ist sie 65 — 8 = 57.

2 Zahlen. Die größere zweier Zahlen ist 100; der Unterschied ist 7; welches ist die kleinere?

2 Zahlen. Die eine zweier Zahlen ist 5 mehr als 67; die andere ist um 8 von ihr verschieden. Welches sind die beiden Zahlen? Antw. Diese Aufgabe ist unbestimmt, weil nicht angegeben ist, welches die größere Zahl sei.

Die eine ist 67 + 5 = 72. Die andere ist nun entweder 8 mehr oder 8 weniger; also entweder 72 + 8 = 80, oder 72 — 8 = 64. Die beiden Zahlen, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, heißen also 80 und 64.

§. 23. II. Schriftlich.

Was die Schüler bisher mündlich geübt haben, machen sie nun schriftlich. Man läßt sie ganze Reihenfolgen schriftlich abziehen.

Z. B. 100 — 8 = 92;
92 — 8 = 84 ꝛc.
1 + 8 — 5 = 4;
4 + 8 — 5 = 7;
7 + 8 — 5 = 10; ꝛc.

Zu dem Ende werden sie mit dem Abziehungszeichen (—) bekannt gemacht, wenn es nicht schon früher geschehen ist. Die abzuziehende Zahl wird hinter diesen Strich gesetzt; z. B. 12 weniger 7 = 12 — 7. Dies wird gelesen: 12 weniger (minus) 7. Oder: 12 × 1 soll um 7 × 1 verringert werden. Oder: der Unterschied von 12 und 7 soll angegeben werden. Oder: man soll suchen, um wie viel 12 mehr ist als 7. Oder: man soll suchen, um wie viel 7 weniger ist als 12. In diesen verschiedenen Ausdrucksweisen diktirt der Lehrer den Schülern eine Anzahl Aufgaben. Z. B. Gebet durch Zeichen an, daß der Unterschied von 20 und 9 gesucht werden soll! — daß 20 um 9 verringert — daß 9 von 20 abgezogen werden soll! —

Hierauf werden die Schüler angeleitet, die Abzugszahl unter die Vollzahl, die Einer unter die Einer zu schreiben.

Z. B. 29 — 8 = 21.

$$\begin{array}{r} 29 \\ 8 \\ \hline 21 \end{array}$$

24 — 8 = 16.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

Letzteres Beispiel führt auf die Nothwendigkeit des sogenannten Leihens oder Borgens, welches dadurch vorbereitet wurde, daß die Schüler früher angeleitet wurden, die Vollzahl zu zerlegen, z. B. 24 Einer in einen Zehner und 14 Einer. Man läßt nämlich den Stellenwerth der Ziffer der Vollzahl angeben und die Einer der Abzugszahl von den Einern der Vollzahl abziehen. Da dieses nicht immer geht, so läßt man die Schüler suchen, wie solches nun zu machen sei.

Die besseren Köpfe finden es von selbst, nämlich dieses:

Wenn die Zahl der Einer der Abzugszahl größer ist als die Zahl der Einer der Vollzahl, so können jene von diesen nicht abgezogen werden. Man geht alsdann zu den Zehnern der Vollzahl über, und nimmt von ihnen einen Zehner weg, welcher 10 Einer beträgt. Diese 10 Einer zählt man zu den Einern der Vollzahl, und von dieser Einersumme zählt man die Einer der Abzugszahl ab. Zu diesem Reste fügt man die übriggebliebenen Zehner der Vollzahl hinzu, so hat man den ganzen Unterschied.

Z. B. Man soll 8 von 34 abziehen. 8 Einer können nicht von 4 Einern abgezogen werden. Man nimmt daher von den 3 Zehnern 1 Zehner = 10 Einer, fügt diese zu den 4 Einern = 14 Einer. Von diesen 14 Einern zieht man 8 Einer ab, = 6 Einer. Zu diesen 6 Einern thut man die 2 übrig gebliebenen Zehner der Vollzahl, so hat man als Rest 2 Zehner und 6 Einer = 26.

Schriftlich
34
8
———
26

Daß man von den Zehnern einen weggenommen habe, macht man — um dem Irrthume vorzubeugen — durch einen, oben zur Rechten der Zehner gesetzten, Punkt bemerklich. Man nennt die beschriebene Operation Leihen oder das Borgen.

Endlich wird noch das schriftliche Abziehen von 100 gelehrt. Dazu diene folgendes Beispiel.
100
6
———

6 Einer können nicht von 0 Einer abgezogen werden.

Ich gehe zu den Zehnern über. Es sind 10 Zehner oder ein Hunderter vorhanden. In der zweiten Stelle, der Stelle der Zehner, steht Null, in der dritten steht 1, welches den Hunderter bedeutet. Dieser eine Hunderter bedeutet 10 Zehner. Von diesen 10 Zehnern nehme ich einen Zehner weg; es bleiben also noch 9 Zehner übrig. Der weggenommene Zehner ist = 10 Einer. 6 Einer von 10 Einern bleiben 4 Einer. Dazu die übriggebliebenen 9 Zehner gefügt, gibt 9 Zehner und 4 Einer = 94.

Aus diesen und ähnlichen Beispielen entnimmt der Schüler die Regel: wenn in der Stelle der Zehner eine Null steht und man einen Hunderter (zum Behuf des Abziehens der Einer) leiht, so verwandelt sich die Null in der Zehnerstelle in die Ziffer 9.

Dritte Stufe.

Die Behandlung größerer Zahlen.

Unter der Behandlung der Zahlen haben wir bisher das Zählen, das Zusammenzählen und das Abziehen, das Lesen und das Schreiben der Zahlen verstanden. Das genannte Wort nehmen wir auch hier noch in diesem beschränkten Sinne.

Das Kind kann nun bereits die Zahlen von 1 bis 100 übersehen und behandeln. Es soll nun weiter geführt werden, sowohl mündlich als schriftlich. Als nächste Stufe ergibt sich der Zahlenraum von 100 bis 1000, welchen zu überschreiten nicht für alle Schüler rathsam ist.

Da indeß die Gesetze mit größeren Zahlen ganz dieselben sind, wie mit kleineren; da eine größere Zersplitterung der einen Sache die Uebersicht nicht erleichtern, sondern erschweren würde; da es dem Lehrer ja jederzeit überlassen werden muß, zuzuthun und wegzuschneiden, je nach dem Bedürfniß seiner Schüler: so halte ich es für das Rathsamste, hier das Gesetz unsers Zahlensystems vollständig zu entwickeln. Der einzelne Lehrer mag die allzu großen Zahlen weglassen und später, bei gesteigerter Anschauungskraft seiner Schüler, auf diesen Gegenstand noch einmal zurückkommen, wenn dieses anders für ersprießlich gehalten wird. Nothwendig für das praktische Leben ist die Fertigkeit in der Behandlung sehr großer Zahlen selten. Daher verschone man die Kinder mit ellenlangen Zifferreihen! Sie haben — und eben so wenig der Erwachsene — gar keine Anschauung von einer Menge von Zehn- und Mehrtausenden. Das weiß Jeder, der sich selbst beobachtet hat. Auch braucht es dem Lehrer nicht eingeschärft zu werden, daß er überall der Anschauung möglichst zur Hülfe komme, sich also der Striche bediene, und z. B. einen großen Strich einen Zehner, einen noch größeren einen Hunderter 2c. bedeuten lasse. Aus dem Nachfolgenden wird dem Verständigen die Art der Behandlung klar werden. Das Einzelne kann hier nicht überall angegeben werden. Das tüchtige Einüben bis zur vollkommnen Fertigkeit bleibt Hauptsache.

Erste Uebung.

Das Zählen von Hundert bis Tausend.

§. 24. I. Mündlich.

Zehn Einer heißen, wie bekannt, ein Zehner. Zehn Zehner heißen ein Hunderter. Ein Zehner ist zehn Einer, ein Hunderter ist zehn Zehner oder hundert Einer. Wir betrachten daher zehn Einer als eine Einheit, oder zehn einfache Einheiten wieder als eine Einheit. Wenn wir die Einer die Einheiten der ersten Ordnung nennen wollen; so bilden die Zehner die Einheiten der zweiten Ordnung. Auf dieselbe Art betrachten wir zehn Zehner, d. h. zehn Einheiten der zweiten Ordnung, als eine Einheit der dritten Ordnung, welche wir Hunderter nennen. Zehn Einheiten der dritten Ordnung bilden eine Einheit der vierten Ordnung, welche Tausender heißt. Kurz, das allgemeine Grundgesetz unseres Zahlensystems, das Zehnergesetz, heißt: zehn Einheiten irgend einer Ordnung bilden eine Einheit der nächst höheren Ordnung.

Stellen wir das Bisherige übersichtlich zusammen, so erhalten wir Folgendes:

Zehn Einer sind	1	Zehner		(10)
Zwanzig	—	2	—	(20)
Dreißig	—	3	—	(30)
Hundert	—	10	—	(100)
Zweihundert	—	20	—	(200)
Dreihundert	—	30	—	(300)
Vierhundert	—	40	—	(400)
Fünfhundert	—	50	—	(500)
Sechshundert	—	60	—	(600)
Siebenhundert	—	70	—	(700)
Achthundert	—	80	—	(800)
Neunhundert	—	90	—	(900)
Zehnhundert / Tausend	—	100	—	(1000)

So wie man von 1 bis 100 zählt, so zählt man auch von 100 bis 200, von 200 bis 300 rc. Einhundert und eins, einhundert und zwei, einhundert und drei rc.

Dieses Zählen geht ganz leicht von Statten. Das Wichtigste ist hier, daß der Schüler jede Zahl in Hunderter, Zehner und Einer aufzulösen im Stande sei, und umgekehrt jede Anzahl Einer in Zehner und Hunderter verwandeln könne. Hierin muß ihm eine besondere Geläufigkeit angeeignet werden. Daher stelle man ihm z. B. Fragen wie folgende:

Einhundert und zwanzig (nämlich Einer oder Mal Eins), wie viel Hunderter und Zehner; wie viel Zehner und wie viel Einer? Antw. Einhundert und zwanzig sind: a. einhundert und zwanzig Einer oder einhundert Mal eins und zwanzig Mal eins; b. ein Hundert und 2 Zehner, oder ein Hunderter und zwanzig Einer; c. zwölf Zehner.

17 Zehner und 5 Einer — wie viel Hunderter, Zehner, Einer? Antw. 175 Einer = 1 Hunderter und 75 Einer = 1 Hunderter, 7 Zehner und 5 Einer.

3 Hunderter, 2 Zehner und 73 Einer? Antw. 3 Hunderter sind dreihundert Einer, 2 Zehner sind 20 Einer; dazu 73 Einer gibt: dreihundert und drei und neunzig Einer = 39 Zehner und 3 Einer.

Aehnliche Aufgaben, bis zur Geläufigkeit!

§. 25. **II. Schriftlich.**

Die Einheiten der ersten Ordnung, die Einer, kommen in die erste Stelle zu stehen; die Einheiten der zweiten Ordnung, die Zehner, in die zweite Stelle; die Einheiten der dritten Ordnung, die Hunderter, in die dritte Stelle; die Einheiten der vierten Ordnung, die Tausender, in die vierte Stelle. Eine Ziffer in der ersten Stelle bedeutet also Einer, in der zweiten Stelle Zehner, in der dritten Hunderter, in der vierten Tausender. Der Werth einer Ziffer hängt also, wie wir auch oben schon sahen, von ihrer Stelle ab. Man muß daher den absoluten Werth einer Ziffer von ihrem Stellenwerthe unterscheiden. Die Ziffer 8 bedeutet für sich allein stehend 8 Mal eins; in der zweiten Stelle (80) bedeutet sie 8 Zehner oder achtzig Mal eins; in der dritten Stelle (800) bedeutet sie 8 Hunderter oder 80 Zehner oder achthundert Mal eins; in der vierten Stelle (8000) bedeutet sie 8 Tausender, oder 80 Hunderter, oder 800 Zehner, oder achttausend Mal eins.

Der Lehrer schreibt nun ein-, zwei-, drei- und vierstellige Zahlen, d. h. Zahlen, welche mit 1, 2, 3, 4 Ziffern geschrieben werden, an die Tafel, und läßt sie von den Kindern lesen — und auflösen.

Z. B. 3095!

5 Einer, 9 Zehner, 0 oder kein Hunderter, 3 Tausender — 95 Einer und 3 Tausender — 95 Einer und 30 Hunderter — 3 Tausender, 0 Hunderter, 9 Zehner, 5 Einer, — 30 Hunderter, 9 Zehner, 5 Einer — 309 Zehner, 5 Einer — 3095 Einer. — Von rechts nach links und von links nach rechts.

Dann diktirt der Lehrer eine Menge Zahlen, welche die Schüler schreiben.

Z. B. Schreibet vierhundert und ein und fünfzig Einer! dreihundert Mal eins und neun und sechszig Mal eins; 9 Hunderter und 7 Zehner! 8 Hunderter und 9 Einer! 5 Tausender und 2 Zehner! ꝛc. ꝛc.

Die Stellen, in welchen keine Einheiten stehen, werden mit der Null (0) ausgefüllt. Sie hat also an sich keinen Werth, sondern sie dient nur dazu, um den Werth der weiter zur linken Hand stehenden Ziffern richtig anzugeben. Eine oder einige Nullen ganz zur linken Hand bedeuten daher Nichts; z. B. 05 = 5; 0075 = 75 ꝛc.

Noch einige Winke.

1) Die Schüler werden darauf aufmerksam gemacht, wie durch Veränderung der Stellen der Ziffern auch der Werth der Zahl sich ändert; z. B. 123, 321 ꝛc. Man gibt ihnen daher die Aufgabe, mit 3 oder 4 Ziffern alle möglichen Zahlen zu schreiben. Z. B. mit 5, 9, 1. Sie sind:
915 — 951 — 591 — 519 — 195 — 159.
Wie viel Zahlen können durch Versetzung der Ziffern 9, 4, 0 — 4, 4, 8 — 8, 8, 8, — 1, 2, 3, 4 ꝛc. gebildet werden?
2) Man mache die Schüler darauf aufmerksam, daß, so viel Ziffern auch neben einander stehen mögen, dadurch nur eine Zahl bezeichnet werden soll. Eine Zahl wird daher mit einer oder mehreren Ziffern geschrieben.
3) Man diktire eine Menge Zahlen, und lasse dieselben in Reihen senkrecht unter einander schreiben, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter.
4) Die Schüler diktiren einander Zahlen.

Zweite Uebung.

Das Zählen über Tausend hinaus.

§. 26. I. Mündlich.

Wir sind schon, fast ohne es zu wollen, über Tausend hinaus gegangen. Die Sache geht in einerlei Weise weiter, und das Zählen von 1000 an hat gar keine Schwierigkeiten.

Ein	Tauf.	Einer	sind =	100	Zehn. =	10	Hund. =	1	Tausender.
Zwei	—	—	— =	200	— =	20	— =	2	—
Drei	—	—	— =	300	— =	30	— =	3	—
Vier	—	—	— =	400	— =	40	— =	4	—
Zehn	—	—	— =	1000	— =	100	— =	10	—
							=	1	Zehntausdr.
Zwanzig	—	—	— =	2000	— =	200	— =	2	—
Dreißig	—	—	— =	3000	— =	300	— =	3	—
Hundert	—	—	— =	10000	— =	1000	— =	10	—
							=	1	Hunderttſ.

u. s. w. Die auf einander folgenden Einheiten der verschiedenen Ordnungen heißen Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender, Zehnhunderttausender oder Millioner (Millionen), Zehnmillioner 2c., Billioner (Billionen) 2c. Zehnhunderttausend Billionen heißen eine Trillion 2c. Das Gesetz: daß 10 Einheiten irgend einer Ordnung eine Einheit der nächst höheren Ordnung sind, ist also in unserm Zahlensystem ganz durchgreifend.

Der Lehrer wird wissen, wie weit er hier zu gehen hat. Das Wichtigste ist, daß die Schüler jede Zahl aufzulösen im Stande sind. Man lege ihnen daher Fragen vor, wie diese: dreitausend vierhundert und siebenzehn (Mal eins) — wie viel Einheiten der verschiedenen Ordnungen?

Antw. Drei Einheiten der vierten Ordnung, 3 Tausender; vier Einheiten der dritten Ordnung, 4 Hunderter; eine Einheit der zweiten Ordnung, 1 Zehner; sieben Einheiten der ersten Ordnung, 7 Einer.

§. 27. II. Schriftlich.

Die Tausender stehen in der vierten, die Zehntausender in der fünften, die Hunderttausender in der sechsten, die Millioner in der siebenten, die Billioner in der dreizehnten, die Trillioner in der neunzehnten Stelle 2c.

Es bedeutet also eine Ziffer in der

ersten	Stelle	— Einer
2ten	—	— Zehner
3ten	—	— Hunderter
4ten	—	— Tausender
5ten	—	— Zehntausender
6ten	—	— Hunderttausender
7ten	—	— Millioner
8ten	—	— Zehnmillioner
13ten	—	— Billioner
14ten	—	— Zehnbillioner
19ten	—	— Trillioner
20sten	—	— Zehntrillioner 2c.

Der Lehrer schreibt nun 3, 4 und mehrstellige Zahlen an die Tafel, und läßt sie lesen und zergliedern.

Z. B. 43215!

4 Zehntausender, 3 Tausender, 2 Hunderter, 1 Zehner, 5 Einer — 43 Tausender — 432 Hunderter — 4321 Zehner — 43215 Einer u. s. w.

Fragen. Was bedeutet die 2 in der dritten Stelle? Was würde sie in der fünften bedeuten? Wie viel Mal so viel würde sie bedeuten, wenn man sie um eine, zwei, drei Stellen nach der linken Hand rückte? Wie viel Zifferstellen muß man bilden, um Tausend, Hunderttausend, Millionen, hundert Millionen zu schreiben? Welchen Namen hat die in der vierten, achten, zwölften Stelle stehende Ziffer? Was steht links der Hunderter? rechts der Hunderter? 2c. Was steht zwischen den Zehnern und Millionern? 2c.

Hierauf diktirt der Lehrer eine Menge 4, 5 und mehrstelliger Zahlen, welche so untereinander geschrieben werden können, daß die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner 2c. kommen. Zugleich läßt

man den Grund angeben, warum der Schüler diese oder jene Zahl so und so geschrieben habe.

Z. B. Schreibet vier und dreißig tausend und acht und zwanzig!

Antw. Vier und dreißig tausend sind 3 Zehntausender und 4 Tausender. Die Zehntausender stehen in der fünften Stelle. Ich bilde also 5 Stellen, setze in die fünfte die Ziffer 3, in die vierte die Ziffer 4. Da die Hunderter fehlen, so kommt in die dritte Stelle eine Null. Acht und zwanzig sind 2 Zehner und 8 Einer. Die Zehner stehen in der zweiten, die Einer in der ersten Stelle. Deshalb setze ich in die zweite Stelle die Ziffer 2, in die erste die Ziffer 8. Die obige Zahl wird daher so geschrieben: 34028.

Man gehe in andern Beispielen von den Einern aus!

Einige Winke.

1) Zur Erleichterung des Lesens großer Zahlen macht man an die Ziffern gewisse Zeichen. Man theilt die Ziffern von der ersten Stelle an in Klassen von 3 zu 3 Ziffern, setzt oben zur Rechten der vierten Ziffer ein Komma, oben zur Rechten der siebenten Ziffer einen Punkt, an die zehnte ein Komma, an die dreizehnte 2 Punkte rc., abwechselnd ein Komma und einen Punkt mehr.

Z. B. 456789 45671290 25490765480123

Bei jedem Komma spricht man Tausend, bei jedem ersten Punkt Millionen, beim zweiten Billionen, beim dritten Trillionen. Obige Zahlen heißen z. B. 456 Tausend, 789 — 45 Millionen, 671 Tausend, 290 — 25 Billionen, 490 Tausend, 765 Millionen, 480 Tausend, 123 (nämlich mal eins).

2) Man diktire den Schülern die Zahlen auf ganz verschiedene Weise. Man nenne bald die niedrigsten, bald die höchsten, bald mittlere Einheiten zuerst und lasse dieselben gleich in die richtige Stelle schreiben. Zu dem Ende müssen vorher die verschiedenen Stellen bezeichnet werden, z. B. durch folgendes Täflein.

19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
											1	5	8	8		5		

Alsdann diktirt man z. B.: Schreibet 5 Hunderter, 8 Hunderttausender rc. 15 Millionen, 80 Tausend — wie heißt die ganze Zahl? 15880500. Hierauf läßt man die Bedeutung jeder Ziffer, welche in das Täflein geschrieben ist, angeben.

Das praktische Rechenbuch I. enthält im zweiten Abschnitte eine hinreichende Menge von Uebungen.

Anmerkung. Hier werden die Schüler mit den römischen Ziffern bekannt gemacht, wozu das praktische Rechenbuch die nöthige Anleitung enthält. Als Regel gilt: steht ein kleineres Zahlzeichen vor einem größeren, so wird letzteres um so viel Einheiten vermindert, als jenes Einheiten bedeutet. — Z. B. IV = 5 — 1 = 4. XC = 100 — 10 = 90. XL = 50 — 10 = 40. CM = 1000 — 100 = 900.

Steht ein kleineres Zahlzeichen hinter einem größeren, so vermehrt es dasselbe um so viel Einheiten, als es anzeigt. Z. B.

VI = 5 + 1 = 6 LX = 50 + 10 = 60
VIII = 5 + 3 = 8 LXXX = 50 + 30 = 80
CLXIV = 100 + 50 + 10 + 4 = 164
DCCL = 500 + 200 + 50 = 750.

Die Anzahl der Tausende bezeichnet man entweder so, daß man so viel M neben einander schreibt, als Tausende bezeichnet werden sollen, oder so, daß man die Zahl der Tausende durch eine Ziffer bezeichnet, welche so viel Einheiten hat, als Tausende angegeben werden sollen, mit einem darauf folgenden M, welches von der ersten Ziffer durch einen Punkt getrennt ist. Z. B. 4000 = MMMM = IV.M. 30000 = XXX.M. 100000 = C.M. Derjenige Leser, welcher andere Zahlengesetze, als das zehntheilige, kennen lernen will, sehe z. B. Diesterweg's Theorie der Arithmetik. Bonn bei Weber, 1823. §. 1 — 4.

Dritte Uebung.

Das Zusammenzählen größerer Zahlen.

Vorerinnerung. Man vermeide allzu große Zahlen. Wenn die Kinder mündlich 2- oder 3-stellige Zahlen geläufig zusammenzählen können, so kann man sie mit größeren Zahlen verschonen. Das praktische Leben führt solche Aufgaben selten vor, und alsdann thut man jederzeit wohl, der Sicherheit wegen, sich der schriftlichen Darstellung zu bedienen. Das Wichtigste bei allem Rechnen ist, daß die Rechner Alles mit klarem Erkennen der Gründe thun und diese Gründe anzugeben wissen. Wenn die Aufgaben richtig aufgelöset werden, so legt diese Auflösungsweise schon die Gründe dar. Einen Beweis außer der richtigen Auflösungsweise gibt es also nicht, wie manche Jünger der Pestalozzischen Schule meinten. Die richtige Auflösungsweise ist der Beweis selbst. Bei allen folgenden Uebungen stelle ich nur einige Beispiele auf, dem Lehrer die weitere Ausführung, je nach dem Bedürfniß seiner Schüler, überlassend.

I. Mündlich.

§. 28. Das Zusammenzählen zweistelliger Zahlen.

1) Bloßer Zehner.

Wie viel ist 30 und 40? Antw. 30 + 40 = 70. Denn:

a. 30 + 10 = 40; 40 + 10 = 50; 50 + 10 = 60; 60 + 10 = 70.

b. 30 = 3 mal 10; 40 = 4 mal 10. Also ist 30 + 40 = (3 + 4) mal 10 = 7 mal 10 = 70 mal eins.

c. 30 = 3 Zehner; 40 = 4 Zehner. 3 Z. + 4 Z. = 7. Z. = 70 Einer; folglich ist 30 + 40 = 70.

2) Zehner und Einer, indem weder die Summe der Zehner noch die der Einer die Neun übersteigt.

Wie viel macht 20 und 33 zusammen? (Die eine Zahl besteht nur aus Zehnern, die andere aus Zehnern und Einern.) Antw. 20 + 33 = 53. Denn:

a. 20 + 30 = 50; 50 + 3 = 53.

b. 20 = 2 Z.; 33 = 3 Z. + 3 E.; 2 Z. + 3 Z. = 5 Z.; 5 Z. = 50 E.; 50 E. + 3 E. = 53 E. Also ist 20 + 33 = 53.

Wie viel macht 27 und 72 zusammen? (Beide Summanden bestehen aus Zehnern und Einern.) Antw. 27 + 72 = 99. Denn:

a. 27 + 70 = 97; 97 + 2 = 99.

b. 72 + 20 = 92; 92 + 7 = 99.

c. 27 = 2 Z. + 7 E.; 72 = 7 Z. + 2 E.; 2 Z. + 7 Z. = 9 Z. = 90 E.; 7 E. + 2 E. = 9 E.; 90 E. + 9 E. = 99 E.; folglich ist 27 + 72 = 99.

3) Zehner und Einer, indem die Summe der Zehner oder die Summe der Einer die Neun übersteigt.

Welcher Zahl ist die Summe von 19 und 24 gleich? (Die Summe der Einer geht über 9.) Antw. 19 + 24 = 43. Denn:
a. 19 + 20 = 39; 39 + 4 = 43.
b. 24 + 10 = 34; 34 + 9 = 43.
c. 24 + 20 + 44; 44 — 1 = 43.
d. 19 = 1 Z. + 9 E. = 24 = 2 Z. + 4 E.; 1 Z. + 2 Z. = 3 Z.; 9 E. + 4 E. = 13 E. = 1 Z. + 3 E.; 3 Z. + 1 Z. = 4 Z. = 40 E.; 40 E. + 3 E. = 43 E. Also ist 19 + 24 = 43.

Welche Zahl entsteht, wenn man 46 und 82 zusammenfügt? (Die Summe der Zehner geht über 9.) Antw. 46 + 82 = 128. Denn:
a. 46 = 40 + 6; 82 = 80 + 2. 40 + 80 = 120; 6 + 2 = 8; 120 + 8 = 128; 46 + 82 = 128.
b. 46 = 4 Z. + 6 E.; 82 = 8 Z. + 2 E.; 4 Z. + 8 Z. = 12 Z. = 120 E.; 6 E. + 2 E. = 8 E.; 120 E. + 8 E. = 128 E. Also ist 46 + 82 = 128.

Wie viel ist 67 und 79 zusammen? (Die Summe der Zehner und die Summe der Einer geht über 9.) Antw. 67 + 79 = 146. Denn:
a. 67 = 60 + 7; 79 = 70 + 9. 60 + 70 = 130; 7 + 9 = 16; 130 + 16 = 146.
b. 67 = 6 Z. + 7 E.; 79 = 7 Z. + 9 E.; 6 Z. + 7 Z. = 13 Z.; 7 E. + 9 E. = 16 E. = 1 Z. + 6 E.; 13 Z. + 1 Z. = 14 Z. = 140 E.; 140 E. + 6 E. = 146. Also ist 67 + 79 = 146.
c. 60 + 80 = 140; 140 + 7 = 147; 147 — 1 = 146.

Anmerkung 1. Die Lehrer sehen, daß die Auflösung der Summanden in Zehner und Einer die weitläuftigere Auflösungsweise herbeiführt. Menschen des praktischen Lebens pflegen sie nicht zu wählen; es ist also eine Auflösungsweise der Schule; aber sie ist wichtig, weil sie die Aufmerksamkeit im vorzüglichen Grade schärft.

Anmerkung 2. Die Fertigkeit wird vorzüglich durch Reihenfolgen befördert, die im Chore eingeübt werden können, taktmäßig. Z. B.
mit 11: 1 + 11 = 12; 12 + 11 = 23; 23 + 11 = 34 rc.
mit 12: 1 + 12 = 13; 13 + 12 = 25; 25 + 12 = 37 rc.
Durch solche Uebungen kommen die Schüler von selbst auf allerhand Vortheile, in deren Handhabung zum Theil die Fertigkeit im Kopfrechnen besteht.

Anmerkung 3. In allen Uebungen muß Ordnung herrschen. Darum müssen nicht eher Uebungen durcheinander vorgenommen werden, bis die einzelnen, stufenmäßig geordneten, vom Leichteren zum Schwereren fortschreitenden Uebungen beendigt sind. Auch muß nicht bloß der Lehrer, sondern auch der Schüler wissen, an welcher Uebung jetzt die Klasse steht. Leicht wird es ihnen dann, zu erkennen, welche Uebung nun folgen wird. Die Einsicht in den Gang des Fortschreitens und Zusammenhanges bildet; intellectuelle Bildung besteht weniger im Wissen des Einzelnen, als in der Erkenntniß des Zusammenhanges.

§. 29. Das Zusammenzählen zwei- und dreistelliger Zahlen.

1) Bloßer Zehner und Hunderter.

60 um 300 vermehrt, gibt welche Zahl? Antw. 60 + 300 = 360. Denn:

a. 60 = 60 mal 1; 300 = 300 mal 1; 60 mal 1 und 300 mal 1 = 360 mal 1 = 360.

b. 60 = 6 Z.; 300 = 30 Z.; 6 Z. + 30 Z. = 36 Z. = 360 E. = 360.

2) Zehner und Einer und Hunderter, Zehner und Einer, ohne daß die Summe der Zehner oder Einer die Neun übersteigt.

Wie viel ist 54 und 123? Antw. 54 + 123 = 177. Denn:

a. 54 = 50 + 4; 123 = 120 + 3; 50 + 120 = 170; 4 + 3 = 7; 170 + 7 = 177.

b. 54 = 5 Z. + 4 E.; 123 = 12 Z. + 3 E.; 5 Z. + 12 Z. = 17 Z. = 170 E.; 4 E. + 3 E. = 7 E.; 170 E. + 7. E. = 177 E. Also ist 54 + 123 = 177.

3) Zehner und Einer und Hunderter, Zehner und Einer, so daß die Summe der Zehner, oder die Summe der Einer, oder beide zugleich die Neun übersteigen.

Bildet die Summe von 78 und 451! Antw. 78 + 451 = 529. Denn:

a. 78 = 70 + 8; 451 = 400 + 50 + 1. 70 + 50 = 120; 8 + 1 = 9. 400 + 120 = 520; 520 + 9 = 529.

b. 78 = 7 Z. + 8 E.; 451 = 45. Z. + 1 E.; 7 Z. + 45 Z. = 52 Z. = 520 E.; 8 E. + 1 E. = 9 E.; 520 E. + 9 E. = 529 E. = 529.

c. 78 = 7 Z. + 8 E.; 451 = 4 H. + 5 Z. + 1 E.; 4 H. = 400 E.; 7 Z. + 5 Z. = 12 Z. = 120 E.; 400 E. + 120 E. = 520 E.; 8 E. + 1 E. = 9 E.; 520 E. + 9 E. = 529 E. Also ist 78 + 451 = 529.

Vermehret 369 um 27! Antw. 369 + 27 = 396. Denn:

a. 369 = 360 + 9; 27 = 20 + 7; 360 + 20 = 380; 9 + 7 = 16; 380 + 16 = 396.

b. 369 = 36 Z. + 9 E.; 27 = 2 Z. + 7 E.; 36 Z. + 2 Z. = 38 Z.; 9 E. + 7 E. = 16 E. = 1 Z. + 6 E.; 38 Z. + 1 Z. = 39 Z. = 390 E.; 390 E. + 6 E. = 396 E. = 396.

c. 369 = 3 H. + 6 Z. + 9 E.; 27 = 2 Z. + 7 E.; 3 H. = 300 E.; 6 Z. + 2 Z. = 8 Z. = 80 E.; 300 E. + 80 E. = 380 E.; 9 E. + 7 E. = 16 E.; 380 E. + 16 E. + 396 E. Also ist 369 + 27 = 396.

Füget die Zahlen 826 und 99 in eine Summe! Antw. 826 + 99 = 925. Denn:

a. 826 = 820 + 6; 99 = 90 + 9; 820 + 90 = 910; 6 + 9 15; 910 + 15 = 925.

b. 826 + 100 = 926; 926 — 1 = 925.

c. 826 = 82 Z. + 6 E.; 99 = 9 Z. + 9 E.; 82 Z. + 9 Z. = 91 Z.; 6 E. + 9 E. = 15 E. = 1 Z. = 5 E.; 91 Z. + 1 Z. = 92 Z. = 920 E.; 920 E. + 5 E. = 925 E. = 925.

d. 826 = 8 H. + 2 Z. + 6 E.; 99 = 9 Z. + 9 E.; 8 H. = 800 E.; 2 Z. + 9 Z. = 11 Z. = 110 E.; 800 E. + 110 E. = 910 E.; 6 E. + 9 E. = 15 E.; 910 E. + 15 E. = 925 E. = 925.

§. 30. Das Zusammenzählen dreistelliger Zahlen.

1) Hunderter und Hunderter.

Wie viel ist 500 und 400? Antw. 500 + 400 = 900. Denn:

a. 500 = 500 mal 1; 400 = 400 mal 1; 500 mal 1 und 400 mal 1 = 900 mal 1 = 900.

b. 500 = 50 Z.; 400 = 40 Z.; 50 Z. + 40 Z. = 90 Z.; 90 Z. = 900 E. = 900.

c. 500 = 5 H.; 400 = 4 H.; 5 H. + 4 H. = 9 H. = 900 E. = 900.

Anmerkung. Aufgaben, wie die vorstehende, sind leichter als frühere. Man kann sie daher vorausgehen lassen! Doch schadet es auch nichts, wenn leichtere Aufgaben mit schwereren wechseln. Der Zusammenhang ist auch etwas werth.

2) Hunderter und Zehner in beiden Summanden.

360 und 480 ist wie viel zusammen? Antw. 360 + 480 = 840. Denn:

a. 360 = 300 mal 1 und 60 mal 1; 480 = 400 mal 1 und 80 mal 1. 300 mal 1 und 400 mal 1 = 700 mal 1; 60 mal 1 und 80 mal 1 = 140 mal 1; 700 mal 1 und 140 mal 1 = 840 mal 1 = 840.

b. 360 = 36 Z.; 480 = 48 Z.; 36 Z. + 48 Z. = 84 Z. = 840 E. = 840.

c. 360 = 3 H. + 6 Z.; 480 = 4 H. + 8 Z.; 3 H. + 4 H. = 7 H. = 700 E.; 6 Z. + 8 Z. = 14 Z. = 140 E.; 700 E. + 140 E. = 840 E. = 840.

3) Hunderter, Zehner und Einer in beiden Summanden.

Welche Zahl entsteht, wenn man 657 und 564 zusammenfügt? Antw. 1221. Denn:

a. 657 = 600 + 50 + 7; 564 = 500 + 60 + 4; 600 + 500 = 1100; 50 + 60 = 110; 1100 + 110 = 1210: 7 + 4 = 11; 1210 + 11 = 1221.

b. 657 = 65 Z. + 7 E.; 564 = 56 Z. + 4 E.; 65 Z. + 56 Z. = 121 Z.; 7 E. + 4 E. = 11 E. = 1 Z. + 1 E.; 121 Z. + 1 Z. = 122 Z. = 1220 E.; 1220 E. + 1 E. = 1221 E. = 1221.

c. 657 = 6 H. + 5 Z. + 7 E.; 564 = 5 H. + 6 Z. + 4 E.; 6 H. + 5 H. = 11 H.; 5 Z. + 6 Z. = 11 Z. = 1 H. + 1 Z.; 11 H. + 1 H. = 12 H.; 7 E. + 4 E. = 11 E. = 1 Z. + 1 E.; 1 Z. + 1 Z. = 2 Z. = 20 E.; 20 E. + 1 E. = 21 E.; 12 H. = 1200 E.; 1200 E. + 21 E. = 1221 E. = 1221.

Anmerkung 1. Diese Beispiele zeigen hinreichend, auf welche Weise hier verfahren wird, und wie man auch vierstellige Zahlen zu behandeln hat. Man lasse jede Aufgabe auf mehrfache Weise auflösen, und überlasse es den Kindern selbst, die ihnen bequemste Art zu gebrauchen.

Anmerkung 2. Aus den vorhergehenden Beispielen folgt: 1) daß nur gleichnamige Zahlen zu einander gefügt werden können, Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern, Hunderter zu Hundertern 2c.; 2) daß, wenn ungleichnamige Zahlen zusammengefügt werden sollen, dieselben in gleichnamige verwandelt werden müssen. Sollten z. B. Hunderter und Zehner zusammen gezählt werden, so daß sie einen Namen bekommen, so muß man die Hunderter in Zehner, oder Hunderter und Zehner in Einer verwandeln.

Aufgaben.

1) 34 Rthlr. + 57 Rthlr. + 24 Rthlr.; wie viel zusammen? (115.)
2) 92 Sgr. + 17 Sgr. + 88 Sgr., wie viel Sgr.? (197.)
3) 100 Gänse + 22 Hühner + 54 Enten + 18 Tauben — wie viel Stück Federvieh? (194.)
4) In der ersten Klasse einer Schule sind 94 Schüler, in der zweiten Klasse 106, in der dritten 122, in der vierten 130. Wie viele Schüler besuchen die Schule? (452.)
5) In einem Garten stehen 52 Pflaumen-, 24 Aepfel-, 39 Birn-, 104 Kirschbäume. Wie viel Obstbäume zusammen? (219.)
6) 500 Soldaten + 254 Soldaten + 860 Soldaten + 54 Soldaten. Wie viel Soldaten zusammen? (1668.)
7) 1200 Sgr. + 1560 Sgr. + 2460 Sgr. + 120 Sgr. — wie viel Sgr.? (5340.) u. s. w.

II. Schriftlich.

§. 31. Das Zusammenzählen (Addiren) mehrerer zwei-, drei- und mehrstelliger Zahlen.

Die Schüler wissen schon, daß man die Summanden senkrecht unter einander zu schreiben pflegt, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter 2c., kurz die gleichnamigen Stellen unter einander.

Die einzelnen Regeln und Abkürzungen, welche bei dem Addiren zu merken sind, ziehen die Schüler aus Beispielen selbst ab, wie es auch die ersten Erfinder gethan haben. Dieses Verfahren entspricht allein den methodischen Grundsätzen: »vom Einzelnen zum Allgemeinen! — von dem speciellen Falle zur allgemeinen Regel! — in rationellen Gegenständen heuristisch!« — — Nach gegebenen Regeln rechnen lassen, heißt den Geist der Schüler in Fesseln schlagen. — Wir gehen darum von Beispielen aus. Etwa wie folgt:

1)
```
 42
 13
 21
 11
 12
 --
 99
```

Ein Schüler addirt: 2 E. + 1 E. = 3 E.; 3 E. + 1 E. = 4 E.; 4 E. + 3 E. = 7 E.; 7 E. + 2 E. = 9 E.; 1 Z. + 1 Z. = 2 Z.; 2 Z. + 2 Z. = 4 Z.; 4 Z. + 1 Z. = 5 Z.; 5 Z. + 4 Z. = 9 Z. Die Summe der angesetzten Zahlen ist also 9 Einer + 9 Zehner = 99 Einer. — Unter die Einer kommt die Ziffer 9, unter die Zehner ebenfalls die Ziffer 9 zu stehen.

Ein anderer Schüler fängt, statt unten, oben zu addiren an. Es erscheint dieselbe Summe. Ein dritter fängt, statt mit den Einern, mit den Zehnern an. Die Summe ist wieder dieselbe. Daraus folgt:

Um die Summe zu erhalten, ist es einerlei, ob man unten oder oben, ob man mit den Einern oder mit den Zehnern anfängt.

2)

	a.	b.
	74	74
	82	82
	106	106
	39	39
	21	1
	18	18
	1	21
	301	2
		10
		1
		301

Der erste Schüler addirt vorstehendes Exempel, indem er mit den Einern beginnt (a). Die Summe der Einer ist 21 = 2 Z. + 1 E.; also kommt in die Stelle der Einer die Ziffer 1, in die Stelle der Zehner die Ziffer 2. Die Summe der Zehner ist 18 = 1 Hunderter + 8 Zehner; also kommt in die Stelle der Zehner die Ziffer 8, in die Stelle der Hunderter die Ziffer 1. Die Summe der Hunderter ist 1; also kommt noch in die Stelle der Hunderter 1. Zählt man nun die drei Summen zusammen, von der rechten zur linken Hand, so erhält man 1 Einer, 10 Zehner = 1 Hunderter + 0 Zehner, 2 Hunderter + 1 Hunderter = 3 Hunderter = 301 Einer.

Der zweite Schüler addirt vorstehendes Exempel, indem er mit den Hundertern beginnt. Oben (b) ist die Operation dargestellt. Nachher addirt er die drei einzelnen Summen. Hier ist er genöthigt, einige Operationen mehr zu machen, als im ersten Falle. Daraus entnimmt er sich die Regel: es ist bequemer, die Reihen von der rechten zur linken Hand zusammen zu zählen, als umgekehrt.

Wenn der Schüler nun mehrere solcher Aufgaben langsam und verständig gemacht hat, so findet er, daß man zuerst die Reihe der Einer zusammenzählt, die Anzahl der Zehner herauszieht und die übrig bleibenden Einer unter die Einer schreibt, die herausgezogenen Zehner zu der Reihe der Zehner addirt, aus dieser Summe die Hunderter herausnimmt, und die übrigen Zehner unter die Zehner schreibt, dann die herausgezogenen Hunderter zu den Hundertern zählt 2c. 2c.

Wir zeigen dieses noch an folgendem Beispiele, das wir auf mehrfache Weise behandeln wollen.

3)

	a.	b.
	762	762 = 700 + 60 + 2
	389	389 = 300 + 80 + 9
	1009	1009 = 1000 + 9
	5825	5825 = 5000 + 800 + 20 + 5
	25	6000 + 1800 + 160 + 25
	16	6000
	18	1800
	6	160
	7985	25
		7985

c.	762
	389
	1009
	5825
	7985

Die Auflösung a. stellt die Sache so dar, wie sie oben angegeben wurde. Die Auflösung b. zeigt auf eine andere Art, wie die Einer zu den Einern, die Zehner zu den Zehnern rc. hinzugezählt werden, nachdem die einzelnen Summanden zerlegt worden sind. Die Auflösung c. vollführt die Sache auf die kürzeste Weise. In Worten heißt diese Auflösungsweise also:

5 E. + 9 E. = 14 E.; 14 E. + 9 E. = 23 E.; 23 E. + 2 E. = 25 E.; 25 E. = 5 E. + 2 Zehner; also unter die Einer die Ziffer 5; 2 Zehner im Sinn.

2 Zehner (im Sinn) + 2 Z. = 4 Z.; 4 Z. + 8 Z. = 12 Z.; 12 Z. + 6 Z. = 18 Z. = 8 Zehner + 1 Hunderter; also unter die Zehner die Ziffer 8; 1 Hunderter im Sinn.

1 Hunderter + 8 H. = 9 H.; 9 H. + 3 H. = 12 H.; 12 H. + 7 H. = 19 H. = 9 H. + 1 Tausender; also unter die Hunderter die Ziffer 9; 1 Tausender im Sinn.

1 Tausender + 5 T. = 6 T.; 6 T. + 1 T. = 7 T.; also unter die Tausender die Ziffer 7.
Summa: 7985.

Die sogenannten im Sinne behaltenen Zahlen oder Ziffern bezeichnen die Zahlen der nächst höheren Ordnung. Man pflegt sie, damit sie nicht vergessen werden, gleich als ersten Summand der nächst höheren Ordnung anzusehen. Anfängern kann man es gestatten, diese im Sinn zu behaltenden Ziffern unter die Reihen, zu welchen sie gezählt werden sollen, zu setzen. Nach einiger Uebung aber muß dies unterbleiben. Z. B.

499
87
89
22
675

4)	40	300
	380	1400
	70	10000
		800
	490	12500

Wenn alle Summanden mit Nullen endigen, so setzt man ohne Weiteres unter dieselben Nullen, und fängt bei den geltenden Ziffern an.

5)	64		
	804		
	54		
	3804		
	6		
	74		
	290		
	8002	5 0 9 6	Summe der ersten Abtheilung.
	399	: : : :	
	44	: : : :	
	12	: : : :	
	588	: : : :	
	174	: : : :	
	3087	9 2 1 9	Summe der zweiten Abtheilung.
	844	: : : :	
	7	: : : :	
	28	: : : :	
		3 9 6 6	Summe der dritten Abtheilung.
		18281	Hauptsumme.

In diesem Beispiele ist gezeigt, wie man eine Menge zusammen zu zählender Summanden in mehrere Abtheilungen bringen und jede Abtheilung zuerst für sich, dann die Summe der Abtheilungen zusammenzählen kann. In manchen Fällen entgeht man auf diese Weise leichter einem Irrthume.

Anmerkung 1. Stehen die in eine Summe zu vereinigenden Summanden fortlaufend auf mehreren Seiten, so zählt man zuerst diejenigen zusammen, welche auf der ersten Seite stehen, und schreibt ihre Summe unten an. Man nennt diese Summe den Betrag der Seite, den Seitenbetrag (Latus).

Diesen Seitenbetrag schreibt man auf die nächstfolgende Seite als ersten Summanden oben an, mit dem Namen Uebertrag (Transport), und addirt ihn zu den übrigen Summanden. Auf diese Art verbindet man die fortlaufenden Seiten langer Rechnungen mit einander. (Man lasse die Kinder dergleichen Rechnungen sehen und machen!)

Anmerkung 2. Will man sich der Richtigkeit einer vorgenommenen Addition versichern, so macht man die Operation noch ein oder mehrere Male, bald von oben, bald von unten, jetzt ohne, dann mit Abtheilungen. Man nennt solche Untersuchung die Probe. Unter Probe versteht man im Allgemeinen dasjenige Verfahren, welches uns von der Richtigkeit einer vorgenommenen Rechnung überzeugt. Wir werden späterhin noch Mehreres von den Proben anführen.

Anmerkung 3. Siehe die Aufgaben des practischen Rechenbuches Abschnitt III. §. 12.

Vierte Uebung.

Das Abziehen größerer Zahlen.

I. Mündlich.

§. 32. Das Abziehen der Zehner von Zehnern, Hundertern, Tausendern.

1) Zehner von Zehnern.

Was bleibt übrig, wenn man 30 von 80 abzieht? Antw. Wenn man 30 von 80 abzieht, so bleibt 50 übrig. Denn:

a. 80 — 10 = 70; 70 — 10 = 60; 60 — 10 = 50.

b. 80 = 8 mal 10; 30 = 3 mal 10; 8 mal 10 weniger 3 mal 10 = 5 mal 10 = 50.

c. 80 = 8 Zehner; 30 = 3 Z.; 8 Z. — 3 Z. = 5 Z. = 50 Einer = 50.

2) Zehner von Hundertern.

Was bleibt übrig, wenn man 90 von 500 abzieht? Antw. 500 — 90 = 410. Denn:

a. 500 — 100 = 400; 400 + 10 = 410.

b. 500 = 50 Z.; 90 = 9 Z.; 50 Z. — 9 Z. = 41 Z. = 410 E. = 410.

3) Zehner von Tausendern.

Was bleibt übrig, wenn man 70 von 6000 abzieht? Antw. 6000 — 70 = 5930. Denn:

6000 — 100 = 5900; 5900 + 30 = 5930.

§. 33. Das Abziehen der Zehner von Zehnern und Einern; von Hundertern, Zehnern und Einern; von Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern.

1) Zehner von Zehnern und Einern.

Um wie viel ist 84 größer als 30? Antw. 84 ist um 54 größer als 30. Denn:

a. 84 — 10 = 74; 74 — 10 = 64; 64 — 10 = 54.

b. 84 = 8 Z. + 4 E.; 30 = 3 Z.; 8 Z. — 3 Z. = 5 Z.; 5 Z. = 50 E.; 50 E. + 4 E. = 54 E.; also ist 84 um 54 größer als 30.

2) Zehner von Hundertern, Zehnern und Einern.

365 weniger 70, was bleibt? Antw. 365 — 70 = 295. Denn:

a. 365 — 65 = 300; 300 — 5 = 295.

b. 365 = 36 Z. + 5 E.; 70 = 7 Z.; 36 Z. — 7 Z. = 29 Z. = 290 E.; 290 E. + 5 E. = 295 E. = 295.

3) Zehner von Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern.

4838 — 80, was bleibt? Antw. 4838 — 80 = 4758. Denn:

a. 4838 — 100 = 4738; 4738 + 20 = 4758.
b. 4838 = 483 Z. + 8 E.; 80 = 8 Z.; 483 Z. — 8 Z. = 475 Z. = 4750 E.; 4750 E. + 8 E. = 4758 E. = 4758.

§. 34. Das Abziehen der Zehner und Einer von größeren Zahlen.

1) Zehner und Einer von Zehnern und Einern.

Ziehet 47 von 93 ab! Antw. 93 — 47 = 46. Denn:
a. 93 — 40 = 53; 53 — 7 = 46.
b. 93 — 50 = 43; 43 + 3 = 46.
c. 93 = 9 Z. + 3 E.; 47 = 4 Z. + 7 E.; 9 Z. — 4 Z. = 5 Z. = 50 E.; 50 E. + 3 = 53 E.; 53 E. — 7 E. = 46 E. = 46.
d. 93 = 9 Z. + 3 E.; 47 = 4 Z. + 7 E. Um 7 E. abzuziehen, nehme ich zu den drei Einern einen von den 9 Zehnern, welcher = 10 E. ist. 3 E. + 10 E. = 13 E.; 7 E. von 13 E. bleiben 6 E.; 4 Z. von 8 Z. bleiben 4 Z. oder 40 E.; 6 E. + 40 E. = 46 E. Also ist 93 — 47 = 46.

2) Zehner und Einer von Hundertern, Zehnern und Einern.

Wie viel bleibt, wenn man 76 von 354 abzieht? Antw. 354 — 76 = 278. Denn:
a. 354 = 35 Z. + 4 E.; 76 = 7 Z. + 6 E.; 35 Z. — 7 Z. = 28 Z. = 280 E.; 280 E. + 4 E. = 284 E.; 284 E. — 6 E. = 278 E. = 278.
b. 354 = 254 + 100; 100 — 76 = 24; 254 + 24 = 278.
c. Von 354 nehme ich 1 Hunderter weg, so bleiben 254. 1 H. = 10 Z.; 76 = 7 Z. + 6 E.; 10 Z. — 7 Z. = 3 Z. = 30 E.; 30 E. — 6 E. = 24 E.; 254 E. + 24 E. = 278 E. = 278.

§. 35. Das Abziehen der Hunderter, Zehner und Einer.

1) 348 — 154, wie viel? Antw. 348 — 154 = 194. Denn:
a. 348 — 100 = 248; 248 — 50 = 198; 198 — 4 = 194.
b. 348 = 34 Z. + 8 E.; 154 = 15 Z. + 4 E.; 34 Z. — 15 Z. = 19 Z. = 190 E.; 8 E. — 4 E. = 4 E.; 190 E. + 4 E. = 194 E. = 194.
c. 348 = 3 H. + 48 E.; 154 = 1 H. + 54 E.; 3 H. — 1 H. = 2 H. = 200 E.; 200 E. — 54 = 146 E; 146 E. + 48 E. = 194 E. = 194.

2) 1527 — 397, wie viel? Antw. 1527 — 397 = 1130. Denn:
a. 1527 — 400 = 1127; 1127 + 3 = 1130.
b. 1527 = 152 Z. + 7 E.; 397 = 39 Z. + 7 E.; 152 Z. — 39 Z. = 113 Z. = 1130 E.; 7 E. — 7 E. = 0. Also ist 1527 — 397 = 1130.
c. 1527 = 15 H. + 27 E.; 397 = 4 H. — 3 E.; 15 H. — 4 H.

= 11 H. = 1100 E. Dazu 3 E. gibt 1103 E.; 1103 E. + 27 E. = 1130 E. = 1130.

Anmerkung 1. Die bisherigen Uebungen werden hinreichen, die Art zu zeigen, wie diese Subtractionsaufgaben im Kopfe gelöset werden. Alle Aufgaben wurden auf verschiedene Art behandelt; denn also geschieht es in allen Schulen, in welchen die Schüler nicht maschinenmäßig, sondern denkend unterrichtet werden. Diese verschiedenen Auflosungsweisen derselben Aufgaben von demselben oder von verschiedenen Schülern stellen die Sache vielseitig dar, wodurch vielseitige Anregung und Bildung erzielt wird. Der Lehrer gebe den Schülern eine Menge solcher Aufgaben in den verschiedensten Ausdrücken, damit sie in der Behandlung der Zahlen recht geübt werden.

Anmerkung 2. Die Lehrer werden bemerken, daß in vorstehenden Auflösungsweisen nicht immer Alles gesagt wurde, was gedacht wurde und gedacht werden mußte. Was ist davon zu halten? Ist es so recht? Ist das noch rationeller Unterricht? Oder ist der Verfasser dieser Anleitung seinen Grundsätzen untreu geworden und in den Mechanismus gerathen?

Ich denke nicht.

Um an einem Beispiele zu zeigen, was ich meine, betrachte man die Auflösung der Aufgabe: 1527 — 397, unter a. Hier mußte gedacht werden: 397 = 400 — 3; aber es wurde nicht ausgesprochen. Es war nicht nöthig, obgleich es hätte geschehen können. Aber Alles zu sagen, was man denkt, jede kleine Operation mit Worten zu bezeichnen, fällt keinem gesunden Menschen ein. Es führt gradezu zur Pedanterie. Ich denke hierbei mehr, als ich sage. Die Lehrer mögen es sich merken! Daß man hinterher frage, warum 400 abgezogen und 3 zum Reste wieder hinzugezählt wurden, ist ganz gut, um sich zu überzeugen, ob sich der kleine Rechner ganz klar ist; aber es verwirrt ihn leicht, wenn man Alles haarklein verlangt. Es ist Pedantismus! Dinter erzählt, wenn ich nicht irre, davon ein Beispiel: ein Schüler brauchte, um zu zeigen, daß 8 — 3 = 5 sei, einige Minuten, während welcher er unaufhörlich fortsprach. Der Kleinmeister applaudirte; der Großmeister Dinter aber schüttelte den Kopf — über diese Gründlichkeit. Sie bleibe den Schulen fern! Manches, was wir heut zu Tage in den Schulen treiben, sieht aus wie Gründlichkeit, ist aber etwas ganz Anderes. Es gibt eine falsche, verflachende Gründlichkeit. Pestalozzi laborirte daran sein ganzes Leben lang. Wir haben sie noch nicht ganz überwunden.

Aufgaben.

1) Die Vollzahl ist 540; die Abzugszahl 77. Wie groß ist der Unterschied?
2) Die Vollzahl ist 187; der Unterschied 94. Welches ist die Abzugszahl?
3) Die Abzugszahl ist 104; der Unterschied 103; welches ist die Vollzahl?
4) Welche Zahlenpaare haben eine Differenz von 88?
5) Von 306 Rthlr. gibt man 94 aus. Wie viel hat man noch?
6) A nimmt 1200 Rthlr. ein, gibt davon 74 und 108 Rthlr. aus. Wie viel hat er noch?
7) In einem Walde stehen 1800 Bäume. Man fällt ihrer 590. Wie viel bleiben stehen?
8) Von einer Schaafheerde, welche 2180 stark ist, starben 874. Wie stark ist nun noch die Heerde?

II. Schriftlich.

§. 36. Schriftliches Abziehen der Zahlen.

Hier soll das Abziehen (die Subtraction) an jeder noch so großen Zahlenreihe gelehrt werden. Durch die Addition sind die Schüler

schon daran gewöhnt, die gleichnamigen Stellen unter einander zu stellen, die Einer unter die Einer ꝛc. Es ist gebräuchlich, die Abzugszahl unter die Vollzahl zu schreiben. Auch pflegt man, wie bei der Addition, bei dem Abziehen der einzelnen Stellen mit der niedrigsten zu beginnen. Was sonst noch zu bemerken wäre, knüpfen wir an einige Beispiele, aus welchen der Schüler das Erforderliche entnimmt und durch Uebung sich aneignet.

1) 384 − 142 = 384
142
———
242

2 E. von 4. E. bleiben 2 E.; 4 Z. von 8 Z. bleiben 4 Z.; 1 H. von 3 H. bleiben 2 H. Der Rest ist also = 242.

2) 845
345
———
500

5 E. von 5 E. bleiben 0 E; 4 Z. von 4 Z. bleiben 0 Z.; 3 H. von 8 H. bleiben 5 H.; der Rest ist also = 500.

Wenn eine oder mehrere Ziffern der Abzugszahl gleich sind einer oder mehreren Ziffern der Vollzahl, so entstehen an diesen Stellen im Reste Nullen. Denn wenn gleiche Zahlen von einander abgezogen werden, so bleibt nichts übrig.

3) $4\dot{3}0$
28
———
402

8 E. können von 0 E. nicht abgezogen werden. Ich denke mir daher die 3 Zehner in 2 Zehner und 1 Zehner zerlegt. Jene 2 Zehner lasse ich an der Stelle der Zehner, und nehme den einen Zehner als 10 Einer in die Stelle der Einer, und nun vollführe ich den Abzug. 8 E. von 10 E. bleiben 2 E. Da die 3 Z. der Vollzahl in 2 Z. verwandelt worden sind, so habe ich nun 2 Z. von 2 Z. abzuziehen; 2 Z. von 2 Z. bleiben 0 Z. Außerdem bleiben noch 4 H. übrig. Der Rest ist also = 402.

Schon oben ist bemerkt worden, daß man die Wegnahme einer Einheit bei der nächst höheren Ordnung das Borgen oder Leihen nennt, und dieselbe, um der Vergeßlichkeit zuvorzukommen, an der Stelle, wo sie geschehen ist, durch einen Punkt bezeichnet. Das Borgen ist an jeder Stelle nothwendig, wo die Anzahl der Einheiten der Abzugszahl größer ist, als die Anzahl der Einheiten der Vollzahl. Jede Ziffer, bei welcher ein Punkt steht, ist um 1 verringert worden.

4) $\dot{5}\dot{8}\dot{9}4$
895
———
4999

5 E. von 4 E. geht nicht. Ich borge bei den 9. Z. 1 Z., welcher 10 Einer ist. 10 E. und 4 E. = 14 E.; 5 E. von 14 E. bleiben 9 E.; 9 Z. von 8 Z. geht nicht. Ich borge bei den 8 H. 1 Hunderter, welcher 10 Zehner ist. 10 Z. und 8 Z. ist 18 Z. 9 Z. von 18 Z. bleiben 9 Z. 8 H. von 7 H. geht nicht. Ich borge bei den

Tausendern 1 Tausender = 10 H.; 10 H. und 7 H. sind 17 H.; 8 H. von 17 H. bleiben 9 H. Außerdem bleiben noch 4 Tausender übrig. Der Rest ist also 4999.

5) $$\begin{array}{r} 8\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0} \\ 2142 \\ \hline 77858 \end{array}$$

2 E. von 0 E. geht nicht. Ich borge einen Zehner. Aber in der Zehnerstelle steht eine Null. Ich borge einen Hunderter. Aber auch hier steht eine Null. Ich borge einen Tausender. Auch hier steht eine Null. Ich borge einen Zehntausender. In der fünften Stelle bleiben also 7 Zehntausender stehen. Der weggenommene Zehntausender gilt in der vorhergehenden Stelle 10 Tausender. Von diesen 10 Tausendern nehme ich einen weg. Es bleiben also 9 Tausender übrig, und der weggenommene Tausender gilt in der vorhergehenden Stelle 10 Hunderter. Von diesen 10 Hundertern nehme ich einen weg. Es bleiben also in der dritten Stelle 9 Hunderter übrig, und der weggenommene Hunderter gilt in der vorhergehenden Stelle 10 Zehner. Von diesen 10 Zehnern nehme ich einen weg. Es bleiben also in der zweiten Stelle 9 Zehner stehen, und der weggenommene Zehner gilt in der vorhergehenden Stelle 10 Einer.

Also sind zerlegt worden
die 8 Zehntausender in 7 Zehntausender u. einen;
der eine Zehntausender in 9 Tausender und einen;
der eine Tausender in 9 Hunderter und einen;
der eine Hunderter in 9 Zehner und einen;
der eine Zehner ist = 10 Einer.

Nun geht der Abzug, wie früher, von statten. 2 E. von 10 E. bleiben 8 E.; 4 Z. von 9 Z. bleiben 5 Z.; 1 H. von 9 H. bleiben 8 H.; 2 T. von 9 T. bleiben 7 T. Außerdem bleiben noch 7 Zehntausender übrig. Der Rest ist also 77858. —

Wenn für eine Stelle, in welcher eine Null steht, geborgt wird, so verwandelt sich die Null in 10 Einheiten. Wenn *über eine Null hinweg* geborgt wird, so verwandelt sich die Null in 9 Einheiten (ihrer Stelle).

Anmerkung 1. Aufgaben zum schriftlichen Rechnen siehe pract. Rechenbuch, Abschn. IV.

Anmerkung 2. *Die Probe der Subtraction.* Die Probe untersucht, wie oben gesagt wurde, die Richtigkeit des Verfahrens. Die Subtractionsprobe untersucht daher, ob richtig abgezogen worden ist. Diese Richtigkeit wird aus dem Folgenden ermessen. Abziehen heißt untersuchen, wie viel Einheiten eine Zahl größer ist als eine andere, und zwar, um wie viel Einheiten die Vollzahl größer ist als die Abzugszahl, oder um wie viel Einheiten die Abzugszahl kleiner ist als die Vollzahl. Beides zeigt der Rest an. Der Rest ist also diejenige Zahl, welche anzeigt, um wie viel Einheiten die Vollzahl größer ist als die Abzugszahl, und um wie viel Einheiten die Abzugszahl kleiner ist als die Vollzahl. Nehme ich daher den Rest von der Vollzahl weg, so muß die Abzugszahl übrig bleiben, und füge ich den Rest zu der Abzugszahl hinzu, so muß die Vollzahl entstehen. Ist dieses nun wirklich der Fall, so ist früher richtig abgezogen worden, wenn anders bei der Operation der Probe selbst kein Fehler vorgefallen ist. Man kann also bei der Subtraction die Probe auf eine doppelte Weise anstellen.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

24 — 8 = 16; d. h. 24 ist um 16 größer als 8, und 8 ist um 16 kleiner als 24.

Erste Probe:

$$\begin{array}{r} 24 \\ 16 \\ \hline 8 \end{array}$$

24 — 16 = 8

Zweite Probe:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 16 \\ \hline 24 \end{array}$$

8 + 16 = 24

In den meisten Fällen macht man die Probe auf die 2te Art. Man addirt den Rest zu der Abzugszahl und sieht zu, ob die Vollzahl als Summe erscheint: In diesem Falle ist früher richtig abgezogen worden; wo nicht, unrichtig.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 4506 \\ 384 \\ \hline 4122 \\ \hline 4506 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4506 \\ 384 \\ \hline 4112 \\ \hline 4496 ? \end{array}$$

Anmerkung 3. Die gewöhnliche Probe bei der Subtraction wird demnach durch die Addition verrichtet. Und so kann man umgekehrt die Subtraction als Probe bei der Addition gebrauchen. Beide einander entgegengesetzte Operationen dienen einander wechselseitig zur Probe.

Zieht man nämlich von der Summe mehrerer Zahlen einen Summanden ab, so muß die Summe aller übrigen Summanden übrig bleiben. Zieht man zwei Summanden von der Summe ab, so bleibt die Summe der übrigen Summanden übrig ꝛc. Zieht man endlich alle Summanden ab, so bleibt nichts übrig, wenn anders kein Fehler vorgefallen ist. Sind daher die Reste so, wie eben angegeben worden, so stecken keine Fehler in der Rechnung.

Beispiele. a)

$$\begin{array}{r} 456 \\ 32 \\ 1403 \\ 845 \\ \hline 2736 \end{array}$$

Probe.

$$\begin{array}{r} 2736 \\ 456 \\ \hline 2280 \\ 32 \\ \hline 2248 \\ 1403 \\ \hline 845. \end{array}$$

Richtig; denn hier bleibt, nachdem die 3 ersten Summanden von der Hauptsumme weggenommen worden sind, der letzte Summand 845 übrig. Nachdem ich den ersten von der Hauptsumme weggenommen hatte, blieb 2280 = 32 + 1403 + 845 übrig. Nachdem ich auch den zweiten Summanden 32 weggenommen hatte, blieb 2248 = 1403 + 845 übrig. Hätte ich auch den letzten Summanden weggenommen, so wäre nichts übrig geblieben. Alles dieses bestätigte die Richtigkeit der Rechnung.

Auf diese Weise übe man die Schüler in den Proben für die Addition und Subtraction, lege aber keinen großen Werth darauf. Wer richtig denkt und richtig operirt, rechnet richtig. Es bedarf dann keiner Probe. Uebrigens erhellet von selbst, daß die Proben nur auf Rechnungsfehler, niemals aber auf falsche Gedanken führen können. Eben darum legen nur Praktikanten einen hohen Werth auf sie.

Vierte Stufe.

Das Vervielfachen.

Das Multipliciren oder die Multiplication.

Vorerinnerung. Der Lehrer bediene sich bei den ersten Uebungen der Striche oder vollständiger und besser der Pestalozzischen Einheiten-Tabelle. An derselben lernen die Schüler die ersten Operationen mit Anschauung, das sogenannte Ein Mal Eins. Dasselbe muß den Kindern ganz geläufig gemacht werden. Sie müssen es auswendig wissen, und dasselbe, wenn sie es nicht durch den häufigen Gebrauch inne bekommen, auswendig lernen. Denn alle Sicherheit der Fortschritte ist bedingt durch erlangte Fertigkeit auf den vorhergegangenen Stufen. Im Anfange einer neuen Operation geht man ganz langsam zu Werk und sichert eine vollkommne Einsicht. Dann wird eingeübt, und zwar so lange, bis die Operationen mit mechanischer Sicherheit vollzogen werden. Das Kopfrechnen namentlich ist keine Wissenschaft, sondern eine Kunst. Wissen ist zwar auch dabei, wie bei allem Können, das mit Bewußtsein (Wurzel dieses Wortes: wissen) geschieht; aber das Können, das fertige, schnelle Können ist die Hauptsache.

Anmerkung. Hr. Heer (Verf. des method. Lehrbuchs des Denkrechnens, 2 Theile, Zürich 1836) wundert sich über den fortwährenden Gebrauch der Pestalozzischen Einheitentabelle; er liefert andre Versinnlichungsmittel. Diese sind gut, aber jene ist einfacher; man hat in ihr Alles beisammen, jedem Kinde kann man eine kleine in die Hand geben, und die Erfahrung lehrt, daß man mit ihr viel ausrichten kann. Mehr als Versinnlichungsmittel soll sie nicht sein. Sobald die Operationen durch sie zur vollkommnen Anschauung gebracht sind, geht man von ihr ab, und kehrt nur dann zu ihr zurück, wenn man merkt, daß ein schwacher Schüler der äußern Anschauung bedarf.

Erste Uebung.

Vorübungen.

§. 37. Die Einheiten-Tabelle oder die Einer-Tabelle.

<table>
<tr><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td><td>||</td></tr>
<tr><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td><td>|||||</td></tr>
<tr><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td><td>||||||</td></tr>
<tr><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td><td>|||||||</td></tr>
<tr><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td><td>||||||||</td></tr>
<tr><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td><td>|||||||||</td></tr>
<tr><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td><td>||||||||||</td></tr>
</table>

Beschreibung derselben, wenn sie nicht schon früher orgenommen worden ist.

Die Einheiten-Tabelle ist durch Striche in 10 wagerechte und in 10 senkrechte Reihen getheilt. Jede wagerechte und jede senkrechte Reihe enthält 10 Vierecke. Das Ganze ist also in 10 Mal 10 = 100 Vierecke getheilt. In jedem Viereck der ersten wagerechten Reihe steht 1 Strich;

in	jedem	Viereck	der	2ten	wagerechten	Reihe	stehen	2	Striche
—	—	—	—	3ten	—	—	—	3	—
—	—	—	—	4ten	—	—	—	4	—
|				|				|	
—	—	—	—	10ten	—	—	—	10	—

In	der	ersten	wagerechten	Reihe	stehen	also	10	Mal	1	Strich
—	—	2ten	—	—	—	—		—	2	—
—	—	3ten	—	—	—	—		—	3	—
		|							|	
		10ten	—	—	—	—		—	10	—

In jeder senkrechten Reihe stehen also nach einander alle Zahlen von 1 bis 10.

Die	erste	wagerechte	Reihe	enthält	10	Einer	=	10	Mal	1	=	10
—	2te	—	—	—		Zweier	=	10	×	2	=	20
—	3te	—	—	—		Dreier	=	10	×	3	=	30
—	4te	—	—	—		Vierer	=	10	×	4	=	40
—	5te	—	—	—		Fünfer	=	10	×	5	=	50
—	6te	—	—	—		Sechser	=	10	×	6	=	60
—	7te	—	—	—		Siebner	=	10	×	7	=	70
—	8te	—	—	—		Achter	=	10	×	8	=	80
—	9te	—	—	—		Neuner	=	10	×	9	=	90
—	10te	—	—	—		Zehner	=	10	×	10	=	100

Anmerkung. Das Vervielfältigungszeichen ist ein liegendes Kreuz (×), heißt Mal und wird zwischen die Zahlen gesetzt, welche vervielfacht werden sollen. Vervielfachen heißt eine Zahl so oft nehmen, als die andere Einheiten hat. 4 mit 3 vervielfachen heißt, 4 drei Mal nehmen oder setzen, welches gibt: 4 + 4 + 4 = 3 × 4 = 12. Diejenigen Zahlen, welche mit einander vervielfacht werden, heißen Factoren; in dem eben behandelten Beispiele 4 und 3. Die durch das Vervielfachen entstehende Zahl heißt das Product, das Facit; im Beispiele 12.

Zweite Uebung.

Das Vervielfachen aller Grundzahlen mit allen Grundzahlen.

§. 38. A. Aller Grundzahlen mit derselben Zahl.

1) Die Zahl 1	2) Die Zahl 2	3) Die Zahl 3
1 × 1 = 1	1 × 2 = 2	1 × 3 = 3
2 × 1 = 2	2 × 2 = 4	2 × 3 = 6
3 × 1 = 3	3 × 2 = 6	3 × 3 = 9
| |	| |	| |
10 × 1 = 10	10 × 2 = 20	10 × 3 = 30

4) Die Zahl 4
1 × 4 = 4
2 × 4 = 8
3 × 4 = 12
| |
10 × 4 = 40

5) Die Zahl 5
1 × 5 = 5
2 × 5 = 10
3 × 5 = 15
| |
10 × 5 = 50

6) Die Zahl 6
1 × 6 = 6
2 × 6 = 12
3 × 6 = 18
| |
10 × 6 = 60

7) Die Zahl 7
1 × 7 = 7
2 × 7 = 14
3 × 7 = 21
| |
10 × 7 = 70

8) Die Zahl 8
1 × 8 = 8
2 × 8 = 16
3 × 8 = 24
| |
10 × 8 = 80

9) Die Zahl 9
1 × 9 = 9
2 × 9 = 18
3 × 9 = 27
| |
10 × 9 = 90

10) Die Zahl 10
1 × 10 = 10
2 × 10 = 20
3 × 10 = 30
| |
10 × 10 = 100

B. Derselben Zahl mit allen Grundzahlen.

1) Die Zahl 1
1 × 1 = 1
1 × 2 = 2
1 × 3 = 3
| |
1 × 10 = 10

2) Die Zahl 2
2 × 1 = 2
2 × 2 = 4
2 × 3 = 6
| |
2 × 10 = 20

3) Die Zahl 3
3 × 1 = 3
3 × 2 = 6
3 × 3 = 9
| |
3 × 10 = 30

3) Die Zahl 4
4 × 1 = 4
4 × 2 = 8
4 × 3 = 12
| |
4 × 10 = 40

5) Die Zahl 5
5 × 1 = 5
5 × 2 = 10
5 × 3 = 15
| |
5 × 10 = 50

6) Die Zahl 6
6 × 1 = 6
6 × 2 = 12
6 × 3 = 18
| |
6 × 10 = 60

7) Die Zahl 7
7 × 1 = 7
7 × 2 = 14
7 × 3 = 21
| |
7 × 10 = 70

8) Die Zahl 8
8 × 1 = 8
8 × 2 = 16
8 × 3 = 24
| |
8 × 10 = 80

9) Die Zahl 9
9 × 1 = 9
9 × 2 = 18
9 × 3 = 27
| |
9 × 10 = 90

10) Die Zahl 10
10 × 1 = 10
10 × 2 = 20
10 × 3 = 30
| |
10 × 10 = 100

C. Das sogenannte Ein Mal Eins.

Unter A und B sind alle Producte aller Grundzahlen enthalten, und zwar kommt jedes Product doppelt vor. Soll eine Tabelle aufge-

stellt werden, in welcher jedes Product je zweier Grundzahlen, jedoch jedes nur ein Mal, vorkommt, so erhält man das sogenannte alte und berühmte Ein Mal Eins. Die Alten legten es bei allem Rechnen zum Grunde, und machten mit ihm den Anfang, ließen es gleich in der Fibel mit abdrucken, und prägten es dem Gedächtnisse der Kinder mechanisch ein. Heut zu Tage spielt es eine mehr untergeordnete Rolle, und man sieht aus diesem einen Beispiele, wie weit wir in dem Rechenunterrichte die guten Alten hinter uns zurück lassen. Man vergönne dieser freudigen Bemerkung hier eine Stelle; um so mehr, da man anfängt, die ganze neuere Unterrichtsweise zu schmähen! *) Das kann und thut keiner, der das Alte und das Neue kennt. Man vergleiche nur, um bei unserm Gegenstande zu bleiben, den alten Schlieper oder Adam Riesen's Rechenkunst mit den bessern Rechenbüchern der neueren Zeit. Schlieper und Ries machten zu ihrer Zeit Epoche und galten für klassisch. Wer aber heut zu Tage sie noch zum Grunde legen wollte, würde hinter seiner Zeit weit zurückbleiben. **) — Doch wir lenken wieder ein, und kehren zum Ein Mal Eins zurück.

Dieses Ein Mal Eins steht jetzt neben und hinter dem Eins und Eins, und dem Eins weniger Eins, welche wir früher aufgestellt haben, und es geht dem Eins in Eins, das noch folgt, vorher.

Dies Ein Mal Eins der Alten führte die Einseitigkeit herbei, daß jedes Product, z. B. 56, nur als durch die Multiplication der Factoren 7 und 8, nicht aber als durch die Multiplication der Factoren 8 und 7 entstanden, betrachtet wurde. Deßhalb wußten die Kinder allenfalls, wie viel 7×8, nicht aber, oder nur langsam und nach Verwechselung der Factoren, wie viel 8×7 war.

Dieser Einseitigkeit und diesem Mechanismus wehrt die oben angegebene Behandlung des Gegenstandes. Doch möge das Ein Mal Eins der Alten hier seine Stelle finden.

*) Obige Bemerkung bezog sich in der ersten Auflage auf die Werke von Krummacher und Pustkuchen über die Schule. Fünfzehn Jahre sind seit deren Erscheinung verflossen und — sie sind verschollen. Die angefochtene Unterrichtsweise aber ist geblieben. So wenig läßt sich das zeitgemäß Bessere aufhalten. Halten wir drum auch in andern Dingen den Kopf und die Ohren steif! Denn „Gutes gewollt mit Vertrau'n und Beharrlichkeit führet zum Ausgang." — So denke ich auch jetzt noch, nachdem abermals 5 Jahre verflossen sind. Das Ohrensteifhalten ist jetzt auch noch in andern Beziehungen nöthig.

**) Schlieper und Ries waren übrigens keine solche Mechaniker, als viele, die nach ihnen aufgetreten sind. In ihren Werken fehlt nicht alles Verständniß. Aber im 17. Jahrhundert ging das Schulwesen im Mechanismus unter. Ries nennt sich der berühmte, zum Sprüchworte gewordene Altmeister selbst. In der vor mir liegenden 2ten Ausgabe heißt der Titel: „Rechnung auff der Linien und Federn, auff allerley Handtierung, gemacht durch Adam Risen." Dann folgt sein Bildniß mit der Umschrift: „Anno 1550 Adam Ries seins Alters im LVIII." Darunter „Auffs Neue durchlesen und zu recht gebracht. MDXCII." Er selbst kann diese Ausgabe also nicht wohl mehr besorgt haben.

Das Ein Mal Eins.

1 × 1 = 1	3 × 3 = 9	4 × 4 = 16
2 × 2 = 4	3 × 4 = 12	4 × 5 = 20
2 × 3 = 6	3 × 5 = 15	4 × 6 = 24
2 × 4 = 8	3 × 6 = 18	4 × 7 = 28
2 × 5 = 10	3 × 7 = 21	4 × 8 = 32
2 × 6 = 12	3 × 8 = 24	4 × 9 = 36
2 × 7 = 14	3 × 9 = 27	4 × 10 = 40
2 × 8 = 16	3 × 10 = 30	
2 × 9 = 18		
2 × 10 = 20		
5 × 5 = 25	6 × 6 = 36	7 × 7 = 49
5 × 6 = 30	6 × 7 = 42	7 × 8 = 56
5 × 7 = 35	6 × 8 = 48	7 × 9 = 63
5 × 8 = 40	6 × 9 = 54	7 × 10 = 70
5 × 9 = 45	6 × 10 = 60	
5 × 10 = 50		
8 × 8 = 64	9 × 9 = 81	
8 × 9 = 72	9 × 10 = 90	
8 × 10 = 80	10 × 10 = 100.	

Das Ein Mal Eins wird auch in Form einer quadratförmigen Tafel dargestellt, die nach ihrem Erfinder die Pythagoräische genannt wird. Sie ist diese:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Diese Tafel veranschaulicht in der schönsten Weise die Zahl der Einheiten der Producte je zweier Factoren. Daß z. B. 6 × 3 = 18 mal 1 ist, zeigt das Rechteck, welches zwischen den Ziffern 1, 3, 6 und 18 liegt. Zugleich sieht man hier schon deutlich, daß 6 × 3 = 3 × 6 u. s. w.

§. 39.

Der Lehrer muß die Producte der Grundzahlen von mancherlei Seiten betrachten lassen, und nicht eher weiter schreiten, bis die Sache ganz fest liegt. Ohne die Festigkeit in der Handhabung dieser Producte ist nachher kein rasches Fortschreiten mehr möglich. Wir

stellen als Beispiele der weiteren Behandlung des Ein Mal Eins folgende Fragen und Aufgaben auf, die man nach dem Bedürfniß der Schüler vermehren muß.

1) Wie viel ist 3 × 3, 5 × 8, 8 × 5, 7 × 9, 9 × 10, ꝛc.?

2) Nennt die Zahlenreihe, welche entsteht durch die Vervielfachung der Zahl 2 mit allen Grundzahlen von 1 an!
— — 3 — — — — !
— — 4 — — — — !
— — 5 — — — — !
| | |
— — 10 — — — — !

3) Wie viel Mal Eins ist 8 fünf Mal genommen?
— — — — 7 — — — ?
Welche Zahl entsteht durch 9 × 5 ꝛc.?
Was ist mehr: 3 × 5 oder 5 × 3; 7 × 8 oder 8 × 7?

4) 5 × 9 ist wie viel Mal Eins mehr als 3 × 9?
7 × 9 — — — — — — — 6 × 10?
3 × 10 — — — — — — — 8 × 3?

5) Durch welche 2 Factoren entsteht die Zahl 8? Durch 1 × 8, 8 × 1, 2 × 4, 4 × 2.
Die Zahl 20? Durch 1 × 20, 20 × 1, 4 × 5, 5 × 4, 10 × 2, 2 × 10.
Die Zahl 36? Durch 1 × 36, 36 × 1, 2 × 18, 18 × 2, 3 × 12, 12 × 3, 4 × 9, 9 × 4, 6 × 6.

Diese Auflösung einer Zahl in ihre Factoren ist sehr bildend. Es thut hierbei gar nichts, wenn die Kinder gleich in das sogenannte große Ein Mal Eins eingreifen.

Um die Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß nicht alle Zahlen in Factoren aufgelöset werden können, wenn man 1 und sie selbst ausschließt, frage man: Durch welche Factoren ist 13, 17, 19, 23 ꝛc. entstanden?

6) Ein ℔ Kirschen kostet 2 Sgr.; was kosten 4 ℔ Kirschen?

Auflösung. 1 ℔ Kirschen kostet 2 Sgr., 2 ℔ also 2 × 2 = 4 Sgr., 3 ℔ 3 × 2 = 6 Sgr., 4 ℔ 4 × 2 = 8 Sgr. Wer doppelt so viel kauft, muß auch doppelt so viel bezahlen, wer drei Mal so viel kauft, muß auch drei Mal so viel bezahlen. So oft ich 1 ℔ Kirschen kaufe, muß ich auch 2 Sgr. bezahlen. 4 ℔ sind 4 Mal 1 ℔; also muß ich auch 4 × 2 = 8 Sgr. bezahlen.

Anmerkung. Sehr viele Lehrer und sehr gute Rechenbücher, auch der neuesten Zeit, pflegen bei Aufgaben, wie die vorstehende, zu sagen: 4 ℔. Kirschen sind 4 Mal mehr als 1 ℔. Kirschen. Dieser Ausdruck ist nicht richtig. Denn, wenn derselbe einen vernünftigen Sinn geben soll, so ist:
1 Mal mehr als 1 ℔. Kirschen = 2 ℔.
2 — — = 3 ℔.
3 — — = 4 ℔.
4 — — = 5 ℔.

Es muß nicht heißen: 4 Pfund Kirschen sind 4 Mal mehr als 1 Pfund, sondern: sind 4 Mal so viel, als 1 Pfund. Nur so kann der Ausdruck auch in der Proportionsrechnung gebraucht werden.

Also nicht:	Drei Mal mehr	Waare drei Mal mehr	Geld;
sondern :	— so viel	— — so viel	— ;
nicht :	— weniger	— — weniger	— ;
sondern :	der 3te Theil der Waare,	der 3te Theil des Geldes.	

Des hier gerügten groben Fehlers machen sich noch manche der in der neuesten Zeit erschienenen Rechenbücher schuldig.

7) Eine Elle Band kostet 5 Sgr.; wie viel kosten 10 Ellen?

8) Wie viel kosten 9 Loth Kaffe, wenn 1 Loth 7 Pfennige kostet?

9) Auf einer Bank sitzen 7 Schüler; wie viel auf 9 Bänken, wenn auf allen gleich viel sitzen?

10) 1 Monat hat 4 Wochen; wie viel Wochen haben 6 Monate?

11) 1 Loth hat 4 Quentchen, wie viel Quentchen haben 8 Loth?

12) Ein Bote geht 10 Meilen. Er erhält für jede Meile 10 Sgr. Wie groß ist sein Lohn?

13) Ein Kind lebte 9 Wochen; wie viel Tage?

14) Verbindung des Vervielfachens und Zuzählens. Z. B.
$6 \times 4 + 8 = ?$ $7 \times 9 + 10 = ?$ u. s. w.
$5 \times 4 + 2 \times 3 = ?$ $8 \times 2 + 7 \times 2 = ?$ u. s. w.

Oder in Reihenfolgen. Z. B.
$4 \times 2 + 3 = ?$ $8 + 1 \times 10 = ?$
$5 \times 2 + 3 = ?$ $8 + 2 \times 10 = ?$
$6 \times 2 + 3 = ?$ $8 + 3 \times 10 = ?$ u. s. w.

15) Verbindung des Vervielfachens und Abziehens. Z. B.
$4 \times 6 - 5 = ?$ $8 \times 7 - 5 \times 4 = ?$
$5 \times 6 - 10 = ?$ $7 \times 6 - 6 \times 5 = ?$ u. s. w.

Oder in Reihenfolgen. Z. B.
$1 \times 9 - 4 = ?$ $10 \times 1 - 1 \times 10 = ?$
$2 \times 9 - 4 = ?$ $10 \times 2 - 1 \times 10 = ?$ u. s. w.

16) Verbindung des Vervielfachens, Zuzählens und Abziehens. Z. B.
$4 \times 3 + 7 - 4 = ?$ $10 \times 3 + 5 \times 4 - 2 \times 7 = ?$
$8 \times 9 - 10 \times 4 = ?$ $9 \times 2 - 5 \times 1 + 6 \times 4 = ?$ u. s. w.

17) Die Schüler machen die Operationen, welche der Lehrer angibt, während er dieselben langsam vorspricht, und sie nennen am Ende nur das Resultat. Z. B. Vervielfachet 6 mit 10, zählet zum Producte 2×8 hinzu, ziehet von der entstandenen Summe 5×4 ab, wie viel ist's nun? Antw. 56.

Zu 6 zählet 3, die Summe nehmet 5 mal, zu dem Producte zählet 2 mal 10, ziehet von der Summe 5×9 ab — wie viel mal 5 habt ihr nun?

Dergleichen Aufgaben üben im schnellen Rechnen, besonders wenn der Wetteifer dabei erregt wird.

Aehnliche Aufgaben vom Lehrer und von den Schülern, mit strengem Halten auf die oben bezeichnete äußere Ordnung, körperliche und geistige Gymnastik in Verbindung!

Dritte Uebung.

Das Vervielfachen größerer Zahlen.

Vorerinnerung. Den Lehrern, und auch uns, ist es nicht unbekannt, daß man nicht zwei benannte Zahlen, nicht 3 Pfd. mit 4 Pfd., nicht 3 Rthlr. mit 4 Rthlr., mit einander vervielfachen könne.

Daher kann man auch nicht Zehner mit Einern, nicht Zehner mit Hundertern vervielfachen, in so fern man diese Zahlen als benannte Zahlen ansieht. Dennoch werden wir uns der Kürze wegen dieser Ausdrücke bedienen. Wenn daher z. B. gesagt wird, man solle zwei Zehner mit 4 Hundertern multipliciren, so heißt das nichts anders, als: 2 × 10 oder 20 sollen mit 4 × 100 oder 400 multiplicirt werden. Die Sache selbst wird daher weder zu einem Mißverständniß, noch zu falschen Begriffen verleiten. Doch vermeide man Ausdrücke wie diese: drei Zehnermal vier Hunderter; fünf Einermal sechs Tausender ꝛc. Wohl zu merken!

Wenn die Schüler es auf dieser Stufe noch nicht wissen sollten, daß das Multipliciren ein verkürztes Addiren sei, so könnte es ihnen hier gezeigt werden. Das Wissen desselben ist bei manchen Sätzen nützlich. Ebenso untersuche man, ob es den Schülern zur klaren Anschauung geworden ist, daß das Product 5 × 4 = 4 × 5 ist; daß das Product nicht abhängig ist von der Ordnung der Factoren. (Siehe die Pythagoräische Tafel!) Jedoch ist es bei der Auflösung der Aufgaben in Betreff des Gedankens keineswegs einerlei, ob man 5 × 4 oder 4 × 5 sagt. Anfänger zeigen in dieser Beziehung oft große Leichtfertigkeit oder großen Leichtsinn. Was im Rechnen nicht vollkommen genau und richtig ist, ist gar nicht richtig. Z. B. Wenn 1 Ell. 4 Thlr. kostet, so kosten 5 Ell., 5 × 4, nicht 4 × 5 Thlr., obgleich 5 × 4 = 4 × 5, jedesmal = 20 ist. Die Richtigkeit der Gedanken ist mehr werth als die Richtigkeit des Facits. Ebenfalls wohl zu merken und strenge darauf zu halten!

I. Mündlich.

§. 40. Vervielfachung der Einer, Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. durch Einer, Zehner u. s. w.

1) Vervielfachung der Einer, Zehner u. s. w. durch Einer. Z. B.

3 × 5 Einer	= 15 E.	= 15			
3 × 5 Zehn.	= 15 Z.	= 150 E.	= 150		
3 × 5 Hund.	= 15 H.	= 150 Z.	= 1500 E.	= 1500	
3 × 5 Tauf.	= 15 T.	= 150 H.	= 1500 Z.	= 15000 E.	
				= 15000	
3 × 5 Zehnt.	= 15 Z-T.	= 150 T.	= 1500 H.	= 15000 Z.	
				= 150000 E.	
				= 150000	

u. s. w. in Reihenfolgen, einzeln und im Chorus.

Multiplicirt man Einer, Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. mit Einern, so entstehen zum Producte Einer, Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. Jedes Product wird dann in Einer verwandelt. Es braucht dies nicht grade durch alle die Zwischenstufen zu geschehen, wie in den angegebenen Beispielen, sondern man kann unmittelbar jedes Product in Einer verwandeln. Z. B. 6 × 4 Hunderter = 24 H. = 2400. Zugleich ist zu bemerken, daß es einerlei ist, ob man das Product 6 × 4 Hunderter oder 6 × 400 hat. Ebenso ist 6 × 9 Zehner = 6 × 90; 6 × 5 Tauf. = 6 × 5000.

2) Vervielfachung der Einer, Zehner, u. s. w. durch Zehner.

a) Einer mit Zehnern.

Z. B. Wie viel ist 10 × 5 Einer? Antw. 50. Denn:

a. 10 × 5 E. = 50 E. = 50.

b. 1 Z. × 5 E. = 5 E. × 1 Z. = 5 × 1 Z. = 5 Z. = 50 E = 50:

Deßgl. 40 × 5 = 200; 90 × 9 = 810; 70 × 8 = 560.

b) Zehner mit Zehnern.

Z. B. Wie viel ist 5 Z. × 4 Z. = 50 × 4 Z. = 5 Z. × 40 = 50 × 40? Antw. 2000. Denn:

a. 1 × 4 Z. = 4 Z.; 2 × 4 Z. = 8 Z.; 50 × 4 Z. = 200 Z. = 2000.

b. 1 Z. × 40 = 10 × 40; 2 Z. × 40 = 20 × 40; 5 Z. × 40 = 50 × 40 = 2000.

c. Weitläufiger also: Nehme ich 4 Z. 1 Mal, so erhalte ich 4 Z; nehme ich 4 Z. 5 Mal, so erhalte ich 20 Z. Ich soll aber 4 Zehner nicht 5 Mal, sondern 5 Mal 10 Mal nehmen; also erhalte ich alsdann auch 10 Mal so viel, als wenn ich die 4 Z. nur 5 Mal nehme, d. h. 10 Mal 20 Z. = 200 Z. = 2000.

Deßgl. 30 × 50 = 1500; 60 × 90 = 5400; 90 × 90 = 8100 u. s. w.

Anmerkung 1. Weil die Zahlen von 10 bis 20 häufig mit den Zahlen von 1 bis 20 zu multipliciren sind (das kleine Einmaleins stellt bloß die Producte der Grundzahlen auf), so thut man wohl daran, die Multiplication der genannten Zahlen häufig vornehmen, eine Tabelle darüber aufstellen, ja dieselbe förmlich auswendig lernen zu lassen, damit die Schüler augenblicklich anzugeben wissen, wie viel z. B. 11 × 16, 16 × 16, 12 × 12, 12 × 15 rc. sei. Diese Fertigkeit kommt ihnen bei der Multiplication größerer Zahlen trefflich zu statten. Man muß auch im Unterricht — dies ist eine sehr wichtige Regel — dem unteren, gedächtnißmäßigen Gedankenlaufe so viel übergeben, als nur immer möglich ist, damit sich der obere so frei als möglich bewegen könne. Siehe „Wegweiser für deutsche Lehrer rc.," Abschnitt VI.

Anmerkung 2. Frage: Wie übt und stärkt man das Zahlengedächtniß der Schüler? Oder wie fängt man es an, daß es Schnelligkeit, Umfang und Treue gewinne?

1) Hauptregel: Uebe es durch viele Uebungen. Uebung macht auch hier den Meister.
2) Uebe das Vorhergehende, das, was zum Folgenden gebraucht wird, vollkommen ein!
3) Stufenweise! Denn jede Kraft wächst nach diesem Gesetz!
4) Gestatte beim eigentlichen Kopfrechnen (Gedächtnißrechnen nach Andern) nie das Aufschreiben, und dieses überhaupt nur bei großen Zahlen!
5) Das Kopfrechnen, d. h. das Rechnen ohne Ziffervorstellung, gehe überall dem schriftlichen Rechnen vorher.
6) Sei du selbst, wie überall, also auch im Rechnen, dem Schüler ein Beispiel! d. h. rechne überall, wo du es vom Schüler verlangst, auch im Kopfe.

c) Hunderter mit Zehnern.

Wie viel ist 3 H. × 6 Z.? Antw. 18000. Denn:

a. 3 H. × 6 Z. = 300 × 6 Z.; 1 × 6 Z. = 6 Z.; 2 × 6 Z. = 12 Z.; 300 × 6 Z. = 1800 Z. = 18000 E.

b. 3 H. × 6 Z. = 3 H. × 60; 1. H. × 60 = 60 H.; 3 H. × 60 = 180 H.; 1 H. = 100 E.; 180 H. = 180 × 100 E. = 18000 E.

c. 3 H. × 6 Z. = 300 × 60; 100 × 60 = 6000; 300 × 60 = 3 × 6000 = 18000.

Deßgl. 400 × 50 = 20000; 700 × 20 = 14000; 800 × 30 = 24000.

d) Tausender mit Zehnern.

Wie viel ist 6 Tauf. × 8 Z. Antw. 480000. Denn:

a. 6 T. × 8 Z. = 6000 × 8 Z.; 6 × 8 Z. = 48 Z.; 6000 × 8 Z. = 48000 Z. = 480000 E.

b. 6 T. × 8 Z. = 6 T. × 80; 6 T. × 8 = 48 T.; 6 T. × 80 = 480 T. = 480000 E.

c. 6 T. × 8 Z. = 6000 × 80; 6000 × 1 = 6000; 6000 × 10 = 60000; 60000 × 8 = 480000.

Deßgl. 1000 × 10 = 10000; 2000 × 10 = 20000; 3000 × 10 = 30000; 1000 × 20 = 20000; 2000 × 20 = 40000; 3000 × 20 = 60000; u. s. w.

3) Vervielfachung der Einer, Zehner u. s. w. durch Hunderter.

a) Einer mit Hundertern.

Z. B. Wie viel ist 3 H × 5 E.? Antw. 1500. Denn:

a. 100 × 1 E. = 100 E.; 300 × 1 E. = 300 E.; 300 × 5 E. = 1500.

b. 3 × 5 E. = 15 E.; 30 × 5 E. = 150 E.; 300 × 5 E. = 1500 E.

c. 300 × 5 E. = 5 × 300; 1 × 300 = 300; 5 × 300 = 1500.

b) Zehner mit Hundertern.

Z. B. Wie viel ist 2 Z. × 8 H.? Antw. 16000. Denn:

a. 2 Z. = 2 × 10; 2 × 8 H. = 16 H.; 2 × 10 × 8 H. = 10 × 16 H. = 160 H. = 16000 E.

b. 2 Z. × 8 H. = 20 × 800; 10 × 800 = 8000; 20 × 800 = 2 × 8000 = 16000.

c) Hunderter mit Hundertern.

Z. B. Wie viel ist 5 H. × 4 H.? Antw. 200000. Denn:

a. 1 × 4 H. = 4 H.; 10 × 4 H. = 40 H.; 100 × 4 H. = 400 H.; 500 × 4 H. = 2000 H. = 200000 E.

b. 5 H. × 4 H. = 500 × 400; 1 × 400 = 400; 10 × 400 = 4000; 100 × 400 = 40000; 500 × 400 = 5 × 40000 = 200000.

d) Tausender mit Hundertern.

Z. B. wie viel ist 8 T. × 2 H.? Antw. 1600000. Denn:

a.
1 × 2 H. = 2 H.
10 × — = 20 —
100 × — = 200 —
1000 × — = 2000 —
8000 × — = 16000 — = 1600000.

b. 8 T. × 2 H. = 200 × 8 T.
1 × 8 T. = 8 T.
100 × — = 800 —
200 × — = 1600 — = 1600000.

c. 8 T. × 2 H. = 8000 × 200.
1 × 200 = 200.
10 × 200 = 2000.
100 × 200 = 20000.
1000 × 200 = 200000.
8000 × 200 = 8 × 200000 = 1600000.

Auf ähnliche Art setzt der Lehrer die Sache fort, oder er kürzt sie ab. Gut ist es, Reihenfolgen anzustellen. Z. B.

1 mal 100	ist	100
2 × 100	—	200
3 × 100	—	300
u. s. w.		
10 × 100	ist	1000
20 × 100	—	2000
30 × 100	—	3000
u. s. w.		
100 × 100	ist	10000
200 × 100	—	20000
300 × 100	—	30000
u. s. w.		
1000 × 100	ist	100000
2000 × 100	—	200000
3000 × 100	—	300000
u. s. w.		
1 mal 1000	ist	1000
2 × 1000	—	2000
3 × 1000	—	3000
u. s. w.		
10 × 1000	ist	10000
20 × 1000	—	20000
30 × 1000	—	30000
u. s. w.		
100 × 1000	ist	100000
200 × 1000	—	200000
300 × 1000	—	300000
u. s. w.		
1000 × 1000	ist	1000000
2000 × 1000	—	2000000
3000 × 1000	—	3000000
u. s. w.		
1 × 700	ist	700
2 × 700	—	1400
3 × 700	—	2100
u. s. w.		
10 × 700	ist	7000
20 × 700	—	14000
30 × 700	—	21000
u. s. w.		
100 × 700	ist	70000
200 × 700	—	140000
300 × 700	—	210000
u. s. w.		
1000 × 700	ist	700000
2000 × 700	—	1400000
3000 × 700	—	2100000
u. s. w.		
1 × 8000	ist	8000
2 × 8000	—	16000
3 × 8000	—	24000
u. s. w.		
10 × 8000	ist	80000
20 × 8000	—	160000
30 × 8000	—	240000
u. s. w.		
100 × 8000	ist	800000
200 × 8000	—	1600000
300 × 8000	—	2400000
u. s. w.		
1000 × 8000	ist	8000000
2000 × 8000	—	16000000
3000 × 8000	—	24000000
u. s. w.		

§. 41. Vervielfachung mehrstelliger Zahlen.

1) Einer mit Zehnern und Einern.

Wie viel ist 2×24? Antw. 2×24 ist 48. Denn:

24 = 20 und 4. Also ist $2 \times 24 = 2 \times 20$ und 2×4. $2 \times 20 = 40$; $2 \times 4 = 8$; 40 und 8 = 48. Folglich ist $2 \times 24 = 48$.

Deßgl. $3 \times 27 = 3 \times 20$ und 3×7
= 60 und 21
= 81

Regel: Man zerlegt die zweistellige Zahl in Zehner und Einer, vervielfacht zuerst den Zehner, dann den Einer mit dem Einer, und zählt diese Producte zusammen.

2) Einer mit Hundertern und Einern.

Wie viel ist 2×204? Antw. $2 \times 204 = 408$. Denn:

204 = 200 und 4

$2 \times 204 = 2 \times 200$ und 2×4.
$2 \times 200 = 400$
$2 \times 4 = 8$
400 und 8 = 408.

$2 \times 204 = 408$.

In dieser Form erscheint die Operation als eine zusammenhängende Schlußreihe, was sie auch ist.

Deßgl. $7 \times 809 = 7 \times 800$ und $7 \times 9 = 5600$ und $63 = 5663$.

Regel: Man zerlegt die dreistellige Zahl in Hunderter und Einer, vervielfacht jene und diese mit dem Einer, und fügt diese Producte zusammen.

3) Einer mit Hundertern und Zehnern.

Wie viel ist 3×240? Antw. $3 \times 240 = 720$. Denn:

240 = 200 und 40.

$3 \times 240 = 3 \times 200$ und 3×40
$3 \times 200 = 600$
$3 \times 40 = 120$
600 und 120 = 720

$3 \times 240 = 720$.

Deßgl. $9 \times 580 = 9 \times 500$ und $9 \times 80 = 4500$ und $720 = 5220$.

4) Einer mit Hundertern, Zehnern und Einern.

Wie viel ist 3×245? Antw. $3 \times 245 = 735$. Denn:

245 = 200 und 40 und 5

3 × 245 = 3 × 200 und 3 × 40 und 3 × 5
3 × 200 = 600
3 × 40 = 120
3 × 5 = 15
600 und 120 = 720
720 und 15 = 735

3 × 245 = 735.

Deßgl. 8 × 779 = 8 × 700 und 8 . 70 und 8 . 9
= 5600 und 560 und 72
5600 und 560 = 5000 und 1100 und 60
= 6160
6160 und 72 = 6232.

5) Einer mit Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern.
Wie viel ist 3 × 4547? Antw. 3 × 4547 = 13641. Denn: 4547 = 4000 und 500 und 40 und 7; 3 × 4000 = 12000; 3 × 500 = 1500; 3 × 40 = 120; 3 × 7 = 21; 12000 und 1500 = 13500; 13500 und 120 = 13620; 13620 und 21 = 13641.

Bequemer: 3 × 4000 = 12000; 3 × 500 = 1500; 12000 und 1500 = 13500; 3 × 40 = 120; 13500 und 120 = 13620; 3 × 7 = 21; 13620 und 21 = 13641.

6) Zehner mit Zehnern und Einern.
Wie viel ist 20 × 24? Antw. 480. Denn:

a. 24 = 20 und 4
= 2 × 10 und 4

20 × 24 = 20 × 2 × 10 und 20 × 4
20 × 2 = 40
40 × 10 = 400
20 × 4 = 80
400 und 80 = 480

20 × 24 = 480

b. 24 sind 2 Z. und 4 E.; 20 = 2 Z. = 2 × 10; 10 × 2 Z. = 20 Z.; 2 × 10 × 2 Z. = 40 Z.; 10 × 4 E. = 40 E. 2 × 10 × 4 E. = 80 E.; 40 Z. und 80 E. = 480 E.; also ist 20 × 24 = 480.

c. 20 = 2 × 10; also ist 20 × 24 = 2 × 10 × 24; 2 × 24 = 48; 48 × 10 = 480; folglich ist 20 × 24 = 480.

In der letzten Auflösungsweise liegt die mechanische Regel: Soll mit einem Zehner ohne Einer (d. h. mit einer zweistelligen Zahl, in deren Einerstelle eine Null steht,) eine andere Zahl vervielfacht werden, so multiplicirt man mit dem Zehner, den man als einen Einer betrachtet, und hängt dem Producte eine Null an. Z. B. 70 × 32! 7 × 32 = 224; 224, mit einer Null am Ende, ist 2240; also ist 70 × 32 = 2240.

Anmerkung. Krancke fürchtet von dem Gebrauche dieser Regel beim Kopfrechnen schon Mechanismus!

7) Zehner mit Hundertern und Einern.
Wie viel ist 20 × 304? Antw. 20 × 304 = 6080. Denn:
a. 20 = 2 × 10; 10 × 304 = 3040; 2 × 3040 = 6080.
b. 20 = 2 × 10; 304 = 300 und 4; 10 × 300 = 3000; 10 × 4 = 40; 2 × 3000 = 6000; 2 × 40 = 80; 6000 und 80 = 6080; also ist 20 × 304 = 6080.
c. 304 = 3 H. und 4 E.; 20 = 2 Z. = 2 × 10; 10 × 3 H. = 30 H. = 3 Tauf.; 10 × 4 E. = 40 E.; 2 × 3 Tauf. = 6 Tauf.; 2 × 40 E. = 80 E.; 6 Tauf. und 80 E. = 6080.

8) Zehner mit Hundertern, Zehnern und Einern.
Wie viel ist 40 × 321; Antw. 40 × 321 = 12840. Denn:
a. 40 = 4 × 10; 321 = 300 und 21; 4 × 300 = 1200; 4 × 21 = 84; 1200 und 84 = 1284; 10 × 1284 = 12840.
b. 40 = 4 Z. = 4 × 10; 321 = 3 H. und 2 Z. und 1 E.; 10 × 3 H. = 30 H.; 10 × 2 Z. = 20 Z. = 2 H.; 30 H. und 2 H. = 32 H.; 10 × 1 E. = 1 Z.; 4 × 32 H. = 128 H. = 12800; 4 × 1 Z. = 4 Z. = 40; 12800 und 40 = 12840.

9) Zehner und Einer mit Zehnern und Einern.
Wie viel ist 16 × 24? Antw. 16 × 24 = 384. Denn:
a. 16 = 10 und 6; 10 × 24 = 240; 6 × 24 = 6 × 20 und 6 × 4 = 120 und 24 = 144; 240 und 144 = 384.
b. 24 = 20 und 4; 20 × 16 = 320; 4 × 16 = 64; 320 und 64 = 384.

10) Zehner und Einer mit Hundertern und Einern.
Wie viel ist 24 × 305? Antw. 24 × 305 = 7320. Denn:
24 = 20 und 4; 20 × 305 = 20 × 300 und 20 × 5; 20 × 300 = 6000; 20 × 5 = 100; 6000 und 100 = 6100; 4 × 305 = 4 × 300 und 4 × 5; 4 × 300 = 1200; 4 × 5 = 20; 6100 und 1200 = 7300; 7300 und 20 = 7320.

11) Zehner und Einer mit Hundertern, Zehnern und Einern.
Wie viel ist 14 × 236? Antw. 14 × 236 = 3304. Denn:
14 = 10 und 4; 10 × 236 = 2360; 4 × 236 = 4 × 200 und 4 × 30 und 4 × 6; 4 × 200 = 800; 4 × 30 = 120; 4 6 = 24; 800 und 120 und 24 = 944; 2360 und 944 = 3304.
Kürzer: 10 × 236 = 2360; 4 × 236 = 944; 2360 und 944 = 3304.

Anmerkung. Je nach dem Bedürfniß der Schüler kürzt der Lehrer ab, oder er setzt zu. Man plage die Kinder nicht mit zu großen Zahlen! — Zu den ersten Beispielen haben wir in Worten die Regel gefügt, welche aus der Auflösungsweise in die Augen springt. Es ist nicht nöthig, daß die Kinder sie aussprechen.

§. 42. Aufgaben.

1) 1 preuß. Thlr. = 30 Sgr.; wie viel Sgr. sind 2, 3, 4 rc. Thlr.?
Auflösung. Wenn 1 Thlr. = 30 Sgr., so sind

2 Thlr.	= 2 × 30 =	60	—
3 —	= 3 × 30 =	90	—
4 —	= 4 × 30 =	120	—
5 —	= 5 × 30 =	150	—
6 —	= 6 × 30 =	180	— u. s. w.

2) Verwandle 1, 2, 3, u. s. w. Sgr. in Pfennige?

1 Sgr. = 12 Pf.
2 — = 2 × 12 = 24 Pf.
3 — = 3 × 12 = 36 —
4 — = 4 × 12 = 48 —

3) 3 Thlr. 27 Sgr. — wie viel Sgr.?

Auflösung. 1 Thlr. = 30 Sgr.; 3 Thlr. = 3 × 30 = 90 Sgr.; 90 und 27 Sgr. = 117 Sgr.; also sind 3 Thlr. 27 Sgr. = 117 Sgr.

4) 5 Thlr. 16 Sgr. und 9 Pf. — wie viel Pfennige?

Auflösung. 5 Thlr. = 5 × 30 Sgr. = 150 Sgr.; 150 Sgr. und 16 Sgr. = 166 Sgr.; 1 Sgr. = 12 Pf.; 166 Sgr. = 166 × 12 Pf. = 166 × 10 und 166 × 2 Pf.; 166 × 10 = 1660 Pf.; 166 × 2 = 100 × 2 und 60 × 2 und 6 × 2 = 200 und 120 und 12 = 332; 1660 und 332 = 1992; also sind 5 Thlr. 16 Sgr. = 1992 Pf.; 1992 Pf. und 9 Pf. = 2001 Pf. Also sind 5 Thlr. 16 Sgr. 9 Pf. = 2001 Pf.

Kürzer: 5 Thlr. = 150 Sgr.; 150 Sgr. + 16 Sgr. = 166 Sgr. 166 Sgr. = 166 × 10 + 166 × 2 Pf. = 1660 + 332 = 1992 Pf.; 1992 Pf. + 9 Pf. = 2001 Pf.

Mehr dergl. Aufgaben!

5) 1 berg. Rthlr. = 60 Stbr.; 1 Stbr. = 4 Füchse — wie viel Stbr. sind 87 Rthlr. und 48 Stbr.; und wie viel Füchse?

Auflösung. 87 Rthlr. = 87 × 60 = 80 × 60 + 7 × 60 = 4800 + 420 = 5220 Stbr.; 5220 Stbr. + 48 Stbr. = 5268 Stbr. 1 Stbr. 4 Füchse; 5268 Stbr. = 5268 × 4 = 5200 × 4 + 68 × 4 = 20800 + 272 = 21072 Füchse.

6) 36 Pfd. 12 Loth — wie viel Loth?

Auflösung. 1 Pfd. = 32 Loth; also 36 Pfd. = 36 × 32 Loth = 36 × 30 + 36 × 2 = 1080 und 72 = 1152 L.; 1152 L. und 12 L. = 1164 L.; also sind 36 Pfd. 12 L. = 1164 L.

7) 12 Pfd. 17 Loth 3 Quentchen — wie viel Quentchen?

Auflösung.
1 Pfd. = 32 Loth
12 — = 12 × 32 L.
= 10 × 32 + 2 × 32 L.
10 × 32 = 320
2 × 32 = 64
320 + 64 = 384

---

12 Pfund = 384 L.
384 L. + 17 L. = 401 L.
1 L. = 4 Q.
401 L. = 401 × 4 Q.
= 400 × 4 + 1 × 4
= 1600 + 4
= 1604 Q.
1604 Q. + 3 Q. = 1607 Q.

---

12 Pfund 17 Loth 3 Q. = 1607 Quentchen.

Dergleichen Aufgaben (Resolutionsaufgaben) gebe man viele! Man lasse ihre Auflösung schriftlich darstellen, wörtlich niederschreiben, wie das vorstehende Beispiel zeigt. Auch kann man hier überall Reihenfolgen aufstellen. Z. B.

1 Pfund = 32 L.
2 — = 2 × 32 = 64 L.
3 — = 3 × 32 = 96 L. u. s. w.

1 Rthlr. berg. = 60 Stbr.
2 — — = 2 × 60 = 120 Stbr.
3 — — = 3 × 60 = 180 — u. s. w.

8) Verbindung des Vervielfachens und Zuzählens. Z. B. Wie viel ist 7 × 36 + 72? u. s. w.

Dann Reihenfolgen, z. B.: 10 × 40 + 80 = ?
12 × 42 + 82 = ?
14 × 44 + 84 = ?

9) Verbindung des Vervielfachens und Abziehens. Z. B. Wie viel ist 14 × 24 — 100? u. s. w.

Dann Reihenfolgen, z. B.: 20 × 30 — 99 = ?
19 × 29 — 89 = ?
18 × 28 — 79 = ?
17 × 27 — 24 = ? u. s. w.

10) Verbindung des Vervielfachens, Zuzählens und Abziehens. Z. B. Wie viel ist 12 × 50 + 112 — 79?

Dann Reihenfolgen, z. B.: 10 × 60 + 100 — 50 = ?
15 × 61 + 105 — 51 = ?
20 × 62 + 110 — 52 = ?
25 × 62 + 115 — 53 = ? u. s. w.

11) Aehnliche Aufgaben in verschiedenartigen Ausdrücken! Z. B.

Wie viel ist 7 × 22 + 11 × 11?
— 17 × 11 — 16 × 8?
— (12 — 7). 16 + (8 + 9). 20?
— (34 — 16) × (60 — 39)?
— (16 × 4) + 24 + (16 — 4) × 24? u. s. w.

Man schreibe eine Reihe solcher Aufgaben an die Schultafel und lasse die Aufgaben still im Kopfe rechnen. Es ist eine geistige Turnkunst. Das Resultat schreibt jedes Kind auf seine Tafel. Nachher wird verglichen. — Vorher muß man sich versichert haben, daß die Schüler ganz fest wissen, was die an die Tafel geschriebenen Zeichen bedeuten, und daß sie die Aufgabe in Worte übertragen können. Z. B. Was heißt (24 — 9) × 12 + (8 + 11) × 10?

Antw. Der Unterschied von 24 und 9 soll mit 12 vervielfacht, zu diesem Producte soll das Product der Summe von 8 und 11 in 10 hinzugezählt werden.

Man kann auch solche Aufgaben dictiren. Z. B. Schreibet folgendes in Zeichen nieder!

Der Unterschied von 80 und 64 soll mit dem Unterschiede von 99 und 22 vervielfacht und von diesem Producte soll das Product

der Summe von 32 und 9 in den Unterschied von 32 und 9 abgezogen werden.

Die Kinder schreiben (80 — 64) × (99 — 22) — (32 + 9) × (32 — 9).

12) 1 Elle Tuch kostet 4 Rthlr.; was kosten 19 Ellen?

Auflösung. Wenn 1 Elle Tuch 4 Rthlr. kostet, so kosten 2 Ellen 2 × 4 Rthlr., 3 Ellen 3 × 4 Rthlr.; 19 Ellen 19 × 4 = 76 Rthlr.

13) Für 1 Sgr. erhält man 8 Ellen Band; wie viel für 3 Thlr. 2 Sgr.?

Auflösung. 3 Thlr. 2 Sgr. = 92 Sgr.; für 1 Sgr. 8 Ellen, also für 92 Mal so viel Geld, auch 92 Mal so viel Ellen, d. h. 92 × 8 = 90 × 8 + 2 × 8 = 720 + 16 = 736 Ellen.

14) In einem Garten stehen 52 Reihen Obstbäume; in jeder Reihe 29 Stück; wie viel Bäume überhaupt? (Antw. 52 × 29 = 1508.)

15) Ein Kaufmann kauft 79 Ellen Tuch, jede Elle zu 4 Rthlr., verkauft sie wieder zu 5 Rthlr.; wie groß war die Einkaufs-, die Verkaufssumme, der Gewinn?

(Antw. Einkaufsf. = 79 × 4 = 316 Rthlr.
Verkaufsf. = 79 × 5 = 395 —
Gewinn = 395 — 316 = 79 —.)

16) Die Miethe eines Hauses beträgt jährlich 122 Rthlr.; wie viel in 13 Jahren? (Antw. 122 × 13 = 122 × 10 + 122 × 3 = 1220 + 366 = 1586 Rthlr.)

17) Wie viel kosten 17 Ellen Kattun, wenn 1 Elle 3 Rthlr. 4 Stbr. kostet? (Antw. 17 × 3 Rthlr. = 51 Rthlr. und 17 × 4 Stbr. = 68 Stbr. = 1 Rthlr. 8 Stbr.; 51 Rthlr. + 1 Rthlr. 8 Stbr. = 52 Rthlr. 8 Stbr.)

18) Wie viel verzehrt derjenige in einem Jahre, welcher täglich 2 Rthlr. ausgibt? (Antw. 365 × 2 = 730 Rthlr.)

19) In einem Lager stehen 14 Regimenter; jedes Regiment ist 1100 Mann stark; wie viel Soldaten stehen in diesem Lager?

Antw. 14 × 1100 = 10 × 1100 + 4 × 1100
= 11000 + 4400
= 15400 Soldaten.)

20) In einer Schule befinden sich 315 Kinder; jedes Kind gibt jährlich für Papier, Federn und Dinte 6 Sgr.; wie viel Sgr. macht dieses zusammen?

(Antw. 315 × 6 = 300 × 6 + 15 × 6
= 1800 + 90
= 1890 Sgr.)

21) Jemand besitzt 1000 Rthlr.; er kauft 2 Morgen Land à 110 Rthlr. 5 Morgen Wiesen à 90 Rthlr., 2 Morgen Gartenland à 150 Rthlr. Wie viel Geld bleibt ihm noch?

(Antw. 1000 — $\left\{\begin{array}{l} 2 \times 110 + 5 \times 90 + 2 \times 150 \\ 220 + 450 + 300 \\ 970 \end{array}\right\}$ = 30 Rthlr.)

22) Ein Knabe lernt täglich 36 Wörter auswendig. Wie viel Wörter wird er in 64 Tagen lernen können?

(Antw. $36 \times 64 = 3 \times 10.\ 64 + 6.\ 60 + 6.\ 4.$
$= 1920 + 360 + 24$
$= 2304$ Wörter.)

Anmerkung. Die Auflösung der letzten Aufgabe ist fehlerhaft. Es muß heißen: 64×36, nicht 36×64. Warum?

II. Schriftlich.

Vorerinnerung. Von denjenigen Zahlen, welche mit einander vervielfacht werden sollen, betrachtet man gewöhnlich eine als diejenige, welche die andere vervielfachen soll. Die eine soll vervielfachen, die andere soll vervielfacht werden. Ist z. B. 4 drei Mal, 4 Pfund drei Mal zu nehmen, so soll 4 mit 3 vervielfacht werden. Diejenige Zahl, welche vervielfacht werden soll, wird die Vervielfachungszahl (der Multiplicandus = Multiplicand) und diejenige, welche das Vervielfachen thut, wird die vervielfachende Zahl, der Vervielfacher (der Multiplicator) genannt. In dem genannten Beispiele ist 4 die Vervielfachungszahl, 3 die vervielfachende Zahl, jene der Multiplicandus, diese der Multiplicator. Da es in Ansehung dessen, was durch die Vervielfachung herauskommt, einerlei ist, ob man 4 mit 3, oder 3 mit 4 vervielfacht, indem 4 mal 3 = 3 mal 4; so kann man in den gewöhnlichen Fällen, wenn reine Zahlen mit einander zu multipliciren sind, den Multiplicand als Multiplicator, den Multiplicator als Multiplicand ansehen. Man nennt daher auch beide mit einander zu multiplicirenden Zahlen mit gemeinschaftlichem Namen Factoren. Die durch die Multiplication der Factoren, deren Anzahl auch größer als 2 sein kann, entstandene Zahl heißt das Product oder das Facit. Die Größe des Products hängt nicht von der Ordnung der Factoren ab. Man pflegt sie daher ihre Stelle oft mit einander verwechseln zu lassen. In der Regel setzt man bei dem schriftlichen Rechnen die zu multiplicirenden Zahlen unter einander, Einer unter Einer, den Multiplicator unter den Multiplicand. Ist z. B. 234 mit 8 zu vervielfachen, so schreibt man die Zahlen so:

$$\begin{array}{r} 234 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Wenn der Multiplicator mehr Stellen hat, als der Multiplicand, so pflegt man jenen auch oben hin zu stellen. Man liebt es, den größeren Factor oben an stehen zu haben. Z. B. Soll 38 mit 84349 multiplicirt werden, so schreibt man:

$$\begin{array}{r} 84349 \\ 38 \\ \hline \end{array}$$

Die Gewohnheit, die beiden Factoren unter einander zu setzen, ist, wie der Verfolg lehren wird, sehr bequem. Vielleicht auch ist sie daher entstanden, weil die Multiplication eine verkürzte Addition ist, und bei der Addition die Summanden unter einander geschrieben werden. Denn wenn 32 drei mal genommen werden soll, so ist dies $32 + 32 + 32 =$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \\ 32 \\ \hline 96 \end{array}$$

Wir stellen nun die wesentlichsten Beispiele der schriftlichen Multiplication auf und leiten die einfachen Regeln aus den Beispielen ab.

§. 43. Vervielfachung mit den Grundzahlen.

1) Multiplicire 3 mit 1! (Hier ist 3 der Multiplicand, 1 der Multiplicator.) $1 \times 3 = 3$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

Das Product ist gleich dem Multiplicand. Die Zahl 1 bringt keine Vervielfachung hervor. Kurzweg: 1 multiplicirt nicht. $1 \times 4 = 4$; $1 \times 394 = 394$.

2) Multiplicire 1 2 3 2 mit 3!

Auflösung. Ich zerlege den Multiplicand in seine Theile; $1232 = 1000 + 200 + 30 + 2$. Nun multiplicire ich jeden Theil mit 3.

$$\left.\begin{array}{r} 3 \times 1000 = 3000 \\ 3 \times 200 = 600 \\ 3 \times 30 = 90 \\ 3 \times 2 = 6 \end{array}\right\} \text{Die einzelnen Producte.}$$

3696. Die Summe aller Producte.

Kürzer: 1232
3

6 das Product der Einer
90 » » » Zehner
600 » » » Hunderter
3000 » » » Tausender

3696. Das Gesammt-Product.

Am kürzesten: 1232
3

3696

Man setzt das Product jeder Ziffer des Multiplicanden gerade unter die vervielfachte Ziffer.

3) Multiplicire 624 mit 4!

Auflösung. $624 = 600 + 20 + 4$

$4 \times 600 = 2400$
$4 \times 20 = 80$
$4 \times 4 = 16$

2496

624
4

16
80
2400

2496

624
4

2496

In diesem Beispiele gibt das Product der Einer nicht bloß Einer, sondern 6 Einer und 1 Zehner. In diesem Falle schreibt man die Einer unter die Einer, und zählt die Zehner, welche entstehen, zu dem Producte der Zehner. Man behält also jene durch die Multiplication der Einer entstandenen Zehner so lange im Sinn, bis man das Product der Zehner selbst gemacht hat. Die Multiplication obigen Beispiels auf die kürzeste Art geschieht also:

4×4 Einer = 16 E. = 6 E. + 1 Z. Ich schreibe die 6 E. unter die 4 Einer, behalte den Z im Sinn.

4×2 Z. = 8 Z.; 8 Z. + 1 Z. = 9 Z. Diese 9 Z. schreibe ich unter die Zehner.

4×6 H. = 24 H. = 4 H. + 2 Taus. Die 4 H. schreibe ich in die Stelle der H., die 2 T. in die Stelle der Tausender.

4) Multiplicire 94287 mit 8!

94287	94287	94287
8	8	8
56	56	754296
640	64	
1600	16	
32000	32	
720000	72	
754296	754296	

a. 8 × 7 E. = 56 E. = 6 E. + 5 Z.; 6 E. unter die Einer, 5 Z. im Sinn.

b. 8 × 8 Z. = 64 Z. = 4 Z. + 6 H.; 4 Z. + 5 Z. = 9 Z.; 9 Z. unter die Zehner, 6 H. im Sinn.

c. 8 × 2 H. = 16 H.; 16 H. + 6 H. = 22 H. = 2 H. + 2 T.; 2 H. unter die Hunderter, 2 T. im Sinn.

d. 8 × 4 T. = 32 T.; 32 T. + 2 T. = 34 T. = 4 T. + 3 Zehntauf.; 4 T. hingeschrieben, 3 Zehnt. im Sinn.

e. 8 × 9 Zehnt. = 72 Zehnt.; 72 Zehnt. + 3 Zehnt. = 75 Zehnt. = 5 Zehnt. + 7 Hunderttauf.; 5 Zehnt. in die fünfte, 7 Hunderttauf. in die sechste Stelle. Product: 754296.

5) Multiplicire 700 mit 5! 40006 mit 6!

700	40006
5	6
3500	240036

Im ersten Beispiele waren 2 Nullen mit 5 zu vervielfachen. Dies gibt Nullen: denn 5 × 0 = 5 Nullen = 0.

Im zweiten Beispiele standen in der Mitte des Multiplicanden Nullen. Auch dies gab Nullen; nur kam in die Stelle der Zehner die Ziffer 3 zu stehen, weil durch die Multiplication der Einer diese 3 Zehner entstanden.

Wenn also in dem Multiplicanden Nullen vorkommen, so kommen auch an denselben Stellen in's Product Nullen zu stehen, wenn nicht die Vervielfachung der Zahl, welche der ersten Null vorhergeht, höhere Einheiten, als sie darstellt, hervorbringt.

§. 44. Vervielfachung mit zwei- und mehrstelligen Zahlen.

1) Multiplicire 48 mit 12!

Auflösung. Der Multiplicator besteht aus 2 × 1 + 1 × 10, oder aus zwei Einern und einem Zehner. Ich muß daher den Multiplicand zuerst mit 2 × 1 oder mit 2 Einern, dann mit 10 × 1 oder mit 1 Zehner multipliciren, und alsdann beide Producte addiren; oder: ich muß 48 erst 10mal, dann 2mal nehmen, dann beide Producte addiren. Dies kann auf weitläufige und auf kurze Weise geschehen.

a. 48 = 40 + 8
2 × 40 = 80 } Producte der Einer.
2 × 8 = 16 }
96

$$\left.\begin{array}{r} 10 \times 40 = 400 \\ 10 \times \ 8 = \ 80 \end{array}\right\}$$ Producte des Zehners.

480

96
480

576 Gesammt-Product.

b. 48
12

96 Product der Einer.
48 — des Zehners.

576 Gesammt-Product.

2) Multiplicire 5426 mit 84!

Auflösung. $84 = 80 + 4$; $80 = 8 \times 10$.

5426
4

21704 Product der Einer.

5426
8

43408

$43408 \times 10 = 434080$ Product der Zehner.

21704
434080

455784 Gesammt-Product.

Kürzer: 5426
84

21704 Product der Einer.
43408 — der Zehner.

455784 Gesammt-Product.

3) Multiplicire 7438 mit 523!

$523 = 500 + 20 + 3$; $500 = 5 \times 100$; $20 = 2 \times 10$; $3 = 3 \times 1$.

7438
3

22314 Product der Einer.

7438
2

$14876 \times 10 = 148760$ Product der Zehner.

7438
5

$37190 \times 100 = 3719000$ Prod. der Hunderter

22314
148760
3719000

Gesammt-Product = 3890074

Kürzer: 7438
523

22314	Product der Einer.
14876	» » Zehner.
37190	» » Hunderter.
3890074	Gesammt-Product.

Aus diesem Beispiele folgt die Regel:

Wenn der Multiplicator mehrere Stellen hat, so multiplicirt man mit jeder Ziffer desselben gerade so, als wären es lauter Einer, und setzt die erste Ziffer des jedesmaligen Productes unter die Ziffer des Multiplicators, mit welcher multiplicirt wird, die übrigen Ziffern links daran reihend.

Man kann das Bisherige noch auf andere Art darstellen. Z. B. auf folgende: Es sei 4123 mit 52 zu multipliciren.

4123 = 4 T. + 1 H. + 2 Z. + 3 E.; 52 = 5 Z. + 2 E.

Jeder Theil des Multiplicanden muß mit jedem Theile des Multiplicators vervielfacht werden; also jeder Theil des Multiplicanden mit den Einern, dann mit den Zehnern des Multiplicators. Stellen wir die beiden Factoren unter einander!

4123
52

8246
20615

214396

a. Zuerst haben wir zu multipliciren 2 Einer mit 3 Einern; Einer mit Einern gibt Einer, oder Einer und Zehner. Hier 2 × 3 E. = 6 E. Also die Ziffer 6 in die erste Stelle.

Dann Einer mit Zehnern. Einer mit Zehnern gibt Zehner, oder Zehner und Hunderter; hier 2 × 2 Z. = 4 Z.; also 4 in die zweite Stelle.

Hierauf Einer mit Hundertern. Einer mit Hundertern gibt Hunderter, oder Hunderter und Tausender; hier 2 × 1 H. = 2 H.; also 2 in die dritte Stelle.

Zuletzt Einer mit Tausendern; Einer mit Tausendern gibt Tausender, oder Tausender und Zehntausender; hier 2 × 4 T. = 8 T.; also 8 in die vierte Stelle.

b. Nun sind zu multipliciren Zehner mit Einern; Zehner mit Einern gibt Zehner, oder Zehner und Hunderter; hier 5 Z. × 3 E. = 5 Z. × 3 = 15 Z. = 1 H. + 5 Z.; also 5 in die zweite Stelle, 1 H. im Sinn.

Hierauf 5 Zehner mit 2 Zehnern; Zehner mit Zehnern gibt Hunderter, oder Hunderter und Tausender, hier 5 Z. × 2 Z. = 50 × 20 = 1000 = 10 H.; 10 H. + 1 H. = 11 H. = 1 T. + 1 H.; also 1 in die dritte Stelle; 1 T. im Sinn.

Dann 5 Zehner mit 1 Hunderter; Zehner mit Hundertern gibt Tausender, oder Tausender und Zehntausender; hier 5 Z. × 1 H. = 50 × 100 = 5000 = 5 T.; 5 T. + 1 T. = 6 T.; also 6 in die vierte Stelle.

Endlich 5 Zehner mit 4 Tausendern; Zehner mit Tausendern multiplicirt gibt Zehntausender oder Zehntausender und Hunderttausender; hier 5 Z. × 4 Tausender = 50 × 4000 = 5 × 10 × 4000 = 10 × 20000 = 200000 = 20 Zehntausender = 2 Hunderttausender; also 0 in die fünfte und 2 in die sechste Stelle.

Hierauf addirt man die einzelnen zusammengehörigen Stellen zu einander; alsdann erhält man das Hauptproduct 214396.

§. 45. Abkürzungen bei der Multiplication.

1) Es kommen in dem Multiplicanden Nullen vor.

a) Am Ende.

Z. B. Wie viel ist 2400 × 6?

```
2400          2400
   6             6
-----         -----
14400         14400
```

Da nun 24 × 6 = 144, so folgt daraus, daß man, wenn der Multiplicand in den letzten Stellen Nullen hat, nur die geltenden Ziffern desselben zu multipliciren und diesem Producte die Nullen des Multiplicanden anzuhängen hat. Andere Beispiele:

24000 × 4 = 24 × 1000 × 4 = 24 × 4 × 1000 = 96 × 1000 = 96000; 30 × 6 = 3 × 6 × 10 = 18 × 10 = 180.

```
24000
    4
-----
96000
```

b) Zwischen den Ziffern.

Z. B. 4002 × 3; 4009 × 4

```
4002          4009
   3             4
-----         -----
12006         16036
```

Kommen in dem Multiplicanden zwischen den geltenden Ziffern Nullen vor, so kommen an ihre Stelle in das Product auch Nullen zu stehen, es sei denn, daß von der Ziffer des Multiplicanden der vorhergehenden Stelle eine Zahl im Sinne behalten worden wäre. Alsdann tritt diese an die Stelle der ersten Null.

2) Es kommen in dem Multiplicator Nullen vor.

a) Am Ende desselben.

Z. B. 64 × 10; 64 × 100; 64 × 1000; 64 × 30; 64 × 3000.

Soll eine Zahl, z. B. 64, mit 10 multiplicirt werden, so soll also jeder ihrer Theile das Zehnfache des ursprünglichen Werthes werden. Dies geschieht, indem ich jede Ziffer um eine Stelle nach der linken Hand rücke, und dieses geschieht, wenn ich den Ziffern eine Null anhänge. Hängt man ihnen 2 Nullen an, so wird jede Ziffer um 2 Stellen nach der linken Hand gerückt, folglich hundert mal so groß oder mit 100 multiplicirt; u. s. w. Hat man daher eine Zahl

mit 10, 100, 1000, 10000 zu multipliciren, so läßt man die Ziffern dieser Zahl ganz umgeändert, und man hängt eben so viele Nullen an sie, als der Multiplicator Nullen hat.

Daher ist $64 \times 10 = 640$
$64 \times 100 = 6400$
$64 \times 1000 = 64000$
$64 \times 1000000 = 64000000$

b) In der Mitte desselben.

Z. B. 6451×8001.

```
a    6451          b.  6451
     8001              8001
    -----             -----
     6451              6451
    0000              51608
   0000             --------
  51608             51614451
 --------
 51614451
```

Die in a. nach der gewöhnlichen Weise vollführte Auflösung enthält in den mittlern Reihen lauter Nullen, weil jede Zahl, mit 0 multiplicirt, 0 zum Producte gibt. Da nun diese Nullen bei der Addition der einzelnen Reihen, keine Aenderung hervorbringen, so kann man sie ganz weglassen, wie die Ausrechnung b. zeigt. Nur muß man alsdann nicht vergessen, die erste Ziffer jedes Products unter die Ziffer des Multiplicators, mit welcher multiplicirt wird, zu setzen.

3) Es kommen in dem Multiplicanden und in dem Multiplicator Nullen vor.

a. In beiden am Ende.

Z. B. 2400×300.

```
 2400            2400
   300             300
 ------          ------
 720000          720000
```

$2400 \times 3 = 7200$; 2400×300 ist 100 mal so groß, als 2400×3; also ist $2400 \times 300 = 7200 \times 100 = 720000$.

Da nun auch $24 \times 3 = 72$, so folgt, daß man, wenn in beiden Factoren am Ende Nullen vorkommen, nur die geltenden Ziffern mit einander zu multipliciren, und diesem Producte so viele Nullen anzuhängen hat, als die beiden Factoren zusammen haben.

b. In einem oder in keinem am Ende.

Es geht dies nach den bisherigen Bemerkungen. Wir wollen noch einige größere Beispiele darstellen.

```
 34590000          4000972        1247000
  208                80902         9001
 ----------       ----------    -----------
  27672            8001944         1247
 6918            36008748       11223
 ----------     32007776        -----------
 7194720000    ------------     11224247000
               323686636744
```

4) Es soll eine Zahl mit 9 multiplicirt werden. Antw. 9 = 10 — 1; multiplicire ich daher eine Zahl mit 10 — und dieses geschieht, wenn ich ihr eine Null anhänge — so habe ich sie ein Mal zu viel genommen; ich muß daher von dem Producte die ursprüngliche Zahl wieder abziehen. Z. B. 341 × 9 = 341 × 10 — 341 = 3410 — 341.

```
 3410
  341
 ----
 3069
```

Deßgleichen 59046 + 9 = ?

```
 590460
  59046
 ------
 531414
```

5) Es soll eine Zahl mit 99, oder mit 999 multiplicirt werden. Im ersten Falle hängt man der zu multiplicirenden Zahl 2, im andern Falle 3 Nullen an; alsdann zieht man von den also vermehrten Zahlen die ursprüngliche Zahl ab. Z. B.

```
845 × 99  =  84500
               845
             -----
             83655
845 × 999 = 845000
               845
            ------
            844155
```

6) Es soll eine Zahl mit 11 multiplicirt werden. Z. B. 3452 × 11.

```
   3452
     11
 ------
 a. 3452
 b. 3452
 ------
  37972
```

37972

Hier stehen 2 Zifferreihen in der Mitte, a. und b. welche dieselben Ziffern in derselben Ordnung enthalten. Die letzte Ziffer des Products ist auch die letzte Ziffer des Multiplicanden (2), die darauf folgende Ziffer des Products (7) ist die Summe von 2 und 5, oder der ersten und zweiten Ziffer (von der rechten Hand ausgezählt); die dritte Ziffer des Products (9) ist die Summe von 5 und 4, oder der zweiten und dritten Ziffer des Multiplicanden; die vierte Ziffer des Products (7) ist die Summe von 4 und 3, oder der dritten und vierten Ziffer des Multiplicanden; die fünfte Ziffer des Products (3) ist die vierte Ziffer des Multiplicanden.

Also erhält man, wenn eine Zahl mit 11 multiplicirt werden soll, die Ziffern des Products, wenn man die erste und letzte Ziffer des Multiplicanden zur ersten und letzten Ziffer des Products macht, zur zweiten Ziffer aber die Summe der ersten und zweiten Ziffer des Multiplicanden, zur dritten Ziffer die Summe der zweiten und dritten des Multiplicanden u. s. w. Z. B. 543924 × 11.

1te Ziffer des Products	= 4				
2 » » »	= 4 + 2 =	6			
3 » » »	= 2 + 9 =	11 (1)			
4 » » »	= 9 + 3 =	12 (3)			
5 » » »	= 3 + 4 =	7 (8)			
6 » » »	= 4 + 5 =	9			
7 » » »	=	5			

Also das Product = 5983164

In diesem Beispiele mußten mehrmals Zahlen im Sinn behalten werden. Alsdann ist freilich die angegebene Abkürzung nichts weniger als eine Abkürzung.

7) Es soll mit einer Zahl multiplicirt werden, welche am Ende oder zu Anfange die Ziffer 1 hat. Z. B. 246 × 41 — 246 × 14.

```
a.  246          b.  246
     41               14
   -----            -----
    246              984
   984              246
   -----            -----
  10086             3444
```

Aus a. erhellet, daß man nicht mit 1, sondern nur mit der andern Ziffer 4 zu multipliciren braucht. Man durfte nur 4 mit 246 multipliciren, dieses Product unter 246 setzen, jedoch um eine Stelle nach der linken Hand hinrücken; dann addiren.

```
Also: 246 × 41
     984
    -----
    10086
```

Aus b. erhellet dasselbe, mit dem Unterschiede, daß man das Product der 4 in 246 um eine Stelle rechts rücken muß.

```
Also: 246 × 14
       984
     -----
      3444
```

8) Es soll mit einer Zahl multiplicirt werden, welche sich in Factoren zerlegen läßt.

Z. B. 56 × 36 = 56 × 4 × 9 = 56 × 6 × 6.

In diesem Falle ist es oft bequemer, die Zahl (hier 56) zuerst mit dem einen, dann dieses Product mit dem andern Factor zu multipliciren.

```
Also: 56        56        56
       4         6        36
     ----      ----      ----
      224       336       336
        9         6      168
     ----      ----      ----
     2016      2016      2016
```

Anderes Beispiel: 549 × 24 = 549 × 6 × 4
= 549 × 12 × 2
= 549 × 8 × 3

§. 46. Aufgaben.

1) Verbindung des Vervielfachens mit dem Zuzählen und Abziehen.
Beispiel: Wie viel ist 3449 × 704 + 10078? (2438174.)
— — — — 704048 × 3721 — 12009? (2619750599.)
— — — — (8009 × 7421) + (709 × 307) — 1000? (59651452.)
— — — — (7341 × 10010) — (781 × 400) + 1809? (73172819.) u. s. w.

2) 1 Pfund Indigo kostet 327 Rthlr.; wie viel kosten 4992 Pfund? (1632384.)

3) Wie viel Stück Ochsen werden jährlich in London geschlachtet, wenn daselbst täglich 860 verzehrt werden? (313900.)

4) Ein Schüler erhält täglich 7 Stunden Unterricht; wie viel Stunden in 8 Jahren, wenn er jährlich 320 Tage die Schule besucht? (17920.)

5) Der Schall legt in jeder Sekunde 1040 Fuß zurück; wie viel das Licht in jeder Sekunde, da dasselbe 978000 mal so schnell ist als der Schall? (1017120000.)

6) Wie stark ist ein Armeecorps, wenn es aus 12 Regimentern besteht, jedes Regiment aus 6 Abtheilungen, jede Abtheilung aus 360 Mann, 20 Offizieren, 42 Unteroffizieren und 12 Trommlern? (31248.) (Siehe das erste practische Rechenbuch, Abschnitt V.)

Fünfte Stufe.

Das Theilen.

(Das Dividiren, die Division.)

Vorerinnerung. Der Lehrer bedient sich auch hier zuerst derjenigen Mittel, welche die Sache anschaulich machen: der Striche der Pestalozzischen Tabelle, der Rechenstäbe und dergl. Ueberall müssen die Schüler begriffen haben, was gemacht wird. Vor- und nachgesprochen darf nichts werden, was eingesehen werden soll. Das Rechnen ist kein Gedächtnißwerk. Wer es vorzugsweise als solches gebraucht, der mißbraucht den Menschen und die Sache. Wir werden das Folgende möglichst kurz darstellen. Der Lehrer kennt ja nun die Art des Gebrauchs dieser Materialien.

Erste Uebung.

(Vorübung.)

Das Enthaltensein der Grundzahlen.

Eine Zahl ist in einer ihr gleichen oder in einer größeren enthalten; sie kann aus derselben heraus genommen werden; sie ist als ein Theil derselben zu betrachten. So ist z. B. 2 enthalten in 2, 3, 4 u. s. w.; 3 in 3, 4, 5, 6 u. s. w. Untersucht man, wie oft eine Zahl von einer andern weggenommen werden kann, so erfährt

man, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Wie oft nun eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft muß dieselbe genommen werden, um die andere zu erhalten. 4 ist z. B. in 8 gerade 2 mal enthalten; d. h. 4 muß 2 mal genommen, mit 2 vervielfacht werden, um 8 zu erhalten. Es soll nun hier angegeben werden, wie oft die Grundzahlen in einander und in größeren Zahlen enthalten sind. Diese Uebung ist für sich wichtig und dient zur Vorübung für das Theilen der Zahlen. Wir stellen gleich Reihenfolgen auf.

§. 47. A. Ohne Rest.

1)	1 ist in	2	2	mal enthalten;	denn	2	ist	2 × 1.
	— —	3	3	— —	—	3	—	3 × 1.
	— —	4	4	— —	—	4	—	4 × 1.
	— —	5	5	— —	—	5	—	5 × 1.
	— —	10	10	— —	—	10	—	10 × 1.
	— —	100	100	— —	—	100	—	100 × 1. u. s. w.
2)	2 ist in	2	1	mal enthalten;	denn	2	ist	1 × 2.
	— —	4	2	— —	—	4	—	2 × 2.
	— —	6	3	— —	—	6	—	3 × 2.
	— —	8	4	— —	—	8	—	4 × 2.
	— —	10	5	— —	—	10	—	5 × 2.
		|	|			|		
	— —	20	10	— —	—	20	—	10 × 2. u. s. w.
3)	3 ist in	3	1	mal enthalten;	denn	3	ist	1 × 3.
	— —	6	2	— —	—	6	—	2 × 3.
	— —	9	3	— —	—	9	—	3 × 3.
	— —	12	4	— —	—	12	—	4 × 3.
		|	|			|		
	— —	30	10	— —	—	30	—	10 × 3.
4)	4 ist in	4	1	mal enthalten;	denn	4	ist	1 × 4.
	— —	8	2	— —	—	8	—	2 × 4.
	— —	12	3	— —	—	12	—	3 × 4.
		|	|			|		
	— —	40	10	— —	—	40	—	10 × 4.

5) 5 ist in 5, 10, 15, — 50 u. s. w. 1, 2, 3 — 10 × enthalten.
6) 6 ist in 6, 12, 18, — 60 u. s. w. 1, 2, 3 — 10 × enthalten.
7) Deßgleichen mit 7, 8, 9 und 10.

Fragen. Wie oft ist 3 in 12, 24, 30 enthalten, und warum? Antw. 24 ist 8 × 3; folglich ist 3 in 24, 8 mal enthalten; oder 3 kann 8 mal von 24 weggenommen werden; also ist 3 in 24, 8 mal enthalten. — Wie oft ist 9 in 27, 54, 81, 90 enthalten? — In welcher Zahl ist 6, 3 mal enthalten? 9, 7 mal? u. s. w. — Nennet Zahlen, welche in andern Zahlen gerade 2 mal enthalten sind! (2 in 4, 3 in 6, 4 in 8 u. s. w.) — Nennet Zahlen, welche in andern Zahlen 8 mal enthalten sind! u. s. w.

§. 48. B. Mit Resten.

In allen diesen Beispielen ging die eine Zahl in der andern auf, d. h. es ließ sich genau angeben, wie oft die eine Zahl genommen werden müsse, um die andere zu erhalten; es blieb kein Rest übrig. Oft, ja meistens, ist dieses aber nicht der Fall, sondern es bleibt gewöhnlich ein Rest; die eine Zahl geht nicht in der andern

auf. 3 geht in 3, nicht aber in 4 auf. Denn 3 ist 1×3, aber 4 ist mehr als 1×3 und weniger als 2×3; 3 ist also in 4 mehr als ein mal, aber weniger als 2 mal enthalten; 3 ist daher in 4, 1 mal enthalten, mit dem Reste 1; 4 ist $= 1 \times 3$ und 1. Hier soll nun das Enthaltensein mit den Resten angegeben werden.

1) 1 ist in 1 1 mal enthalten; denn $1 = 1 \times 1$.
— — 2 2 — — — $2 = 2 \times 1$.
— — 3 3 — — — $3 = 3 \times 1$.

1 ist in jeder Zahl ohne Rest enthalten.

2) 2 ist in 1 0 mal enthalten; Rest = 1; denn $1 = 0 \times 2 + 1$.
2 — 2 1 — — — = 0; — $2 = 1 \times 2$.
2 — 3 1 — — — = 1; — $3 = 1 \times 2 + 1$.
2 — 4 2 — — — = 0; — $4 = 2 \times 2$.
2 — 5 2 — — — = 1; — $5 = 2 \times 2 + 1$.
2 — 6 3 — — — = 0; — $6 = 3 \times 2$.
2 — 7 3 — — — = 1; — $7 = 3 \times 2 + 1$.

Alle Zahlen, in welchen 2 ohne Rest enthalten ist, heißen *gerade* Zahlen; alle andern *ungerade* Zahlen. Alle Zahlen gehen entweder durch 2 auf, oder der Rest ist 1.

3) 3 ist in 1 0 mal enthalten mit dem Reste = 1; denn $1 = 0 \times 3 + 1$.
3 — 2 0 — — — — — = 2; — $2 = 0 \times 3 + 2$.
3 — 3 1 — — — — — = 0; — $3 = 1 \times 3$.
3 — 4 1 — — — — — = 1; — $4 = 1 \times 3 + 1$.
3 — 5 1 — — — — — = 2; — $5 = 1 \times 3 + 2$.
3 — 6 2 — — — — — = 0; — $6 = 2 \times 3$.

u. s. w.

Alle Zahlen gehen entweder durch 3 auf, oder sie lassen den Rest 1 oder 2.

4) 4 ist in 1 0 mal enthalten mit dem Reste = 1; denn $1 = 0 \times 4 + 1$.
4 — 2 0 — — — — — = 2; — $2 = 0 \times 4 + 2$.
4 — 3 0 — — — — — = 3; — $3 = 0 \times 4 + 3$.
4 — 4 1 — — — — — = 0; — $4 = 1 \times 4 + 0$.

u. s. w.

Alle Zahlen gehen entweder durch 4 auf, oder sie lassen die Reste 1, 2, 3.

Man setze dies nach Belieben fort! Man kann dieses auf verschiedene Weise. Man läßt z. B. angeben, wie oft irgend eine Zahl jede andere kleinere enthalte.

Z. B. 6 ist wie oft 1, 2, 3, 4, 5?

Antw. $6 = 6 \times 1$.
$= 3 \times 2$.
$= 2 \times 3$.
$= 1 \times 4 + 2$.
$= 1 \times 5 + 1$.
$= 1 \times 6$.

$10 = 10 \times 1$.
$= 5 \times 2$.
$= 3 \times 3 + 1$.
$= 2 \times 4 + 2$.
$= 2 \times 5$.
$= 1 \times 6 + 4$.
$= 1 \times 7 + 3$.
$= 1 \times 8 + 2$.
$= 1 \times 9 + 1$.
$= 1 \times 10$.

$12 = 12 \times 1.$	$20 = 20 \times 1.$
$= 6 \times 2.$	$= 10 \times 2.$
$= 4 \times 3.$	$= 6 \times 3 \times 2.$
$= 3 \times 4.$	$= 5 \times 4.$
$= 2 \times 5 + 2.$	$= 4 \times 5.$
$= 2 \times 6.$	$= 3 \times 6 + 2.$
$= 1 \times 7 + 5.$	$= 2 \times 7 + 6.$
$= 1 \times 8 + 4.$	$= 2 \times 8 + 4.$
$= 1 \times 9 + 3.$	$= 2 \times 9 + 2.$
$= 1 \times 10 + 2.$	$= 2 \times 10.$
$= 1 \times 11 + 1.$	$= 1 \times 11 + 9.$
$= 1 \times 12.$	$= 1 \times 12 + 8.$ u. s. w.

Diese Uebung ist sehr tüchtig zu treiben.

Fragen.

In welcher Zahl ist 4 3 mal enthalten mit dem Reste 3? Antw. In $3 \times 4 + 3 = 15.$ —

19 ist wie oft 4? Antw. $4 \times 4 + 3.$
— — — — 6? — $3 \times 6 + 1.$
— — — — 10? — $1 \times 10 + 9.$ u. s. w.

Wie oft ist 7 in 52 enthalten? 7 mal mit dem Reste 3.
— — — — 68 — ? 9 — — — — 5.
— — — 9 — 1 — ? 0 — — — — 1.
— — — — 8 — ? 0 — — — — 8.
— — — — 62 — ? 6 — — — — 8.

In welchen Zahlen ist 5 so enthalten, daß jedesmal der Rest 1 bleibt?
Antw. In $1 \times 5 + 1 = 6.$
— $2 \times 5 + 1 = 11.$
— $3 \times 5 + 1 = 16.$ u. s. w.

In welchen Zahlen ist 8 so enthalten, daß der Rest 7 bleibt?

Antw. In 7
— $1 \times 8 + 7 = 15$
— $2 \times 8 + 7 = 23$
— $3 \times 8 + 7 = 31$

Oder: in $7 = 1 \times 8 - 1.$
— $2 \times 8 - 1 = 15.$
— $3 \times 8 - 1 = 23.$
— $4 \times 8 - 1 = 31.$ u. s. w.

Zweite Uebung.

Das Theilen mit den Grundzahlen.

Vorbemerkungen. Die Zahl 2 kann in 2, die Zahl 3 in 3, die Zahl 4 in 4 gleiche Theile getheilt werden; denn 2 ist $= 2 \times 1$, $3 = 3 \times 1$, $4 = 4 \times 1$. Jeder der 2 gleichen Theile von 2 ist 1, jeder der 3 gleichen Theile von 3 ist 1, jeder der 4 gleichen Theile von 4 ist auch 1. Wenn eine Zahl getheilt ist in

2 gl. Theile, so heißt jeder dieser Theile der halbe (zweite) Theil der ganzen Zahl;
3 gl. Theile, so heißt jeder dieser Theile der dritte Theil der ganzen;
4 gl. Theile, so heißt jeder dieser Theile der vierte Theil der ganzen;
5 gl. Theile, so heißt jeder dieser Theile der fünfte Theil der ganzen;
6 gl. Theile, so heißt jeder dieser Theile der sechste Theil der ganzen;
7 gl. Theile, so heißt jeder dieser Theile der siebente Theil der ganzen Zahl.

Hieraus ist klar, was man unter dem zehnten, achtzehnten, dreißigsten Theile einer Zahl versteht, in wie viel gleiche Theile sie in jedem dieser Fälle getheilt ist. Statt: der halbe, dritte, vierte u. s. w. Theil sagt man auch die Hälfte, das Drittheil, oder Drittel, das Viertheil oder Viertel, das Fünftel, das Zehntel u. s. w.

Man bezeichnet diese Theile durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$.

§. 49. Angabe, der wie vielste Theil die Grundzahlen von andern Zahlen sind.

Jede Zahl kann 2, 3, 4 u. s. w. mal genommen werden. Von diesem 2, 3, 4fachen einer Zahl ist die Zahl selbst der halbe, dritte, vierte Theil. Daher ist jede Zahl von irgend einer andern die Hälfte, das Drittel, das Viertel u. s. w. Dies soll hier angegeben werden. Wir stellen gleich die Reihenfolgen auf.

1) 1 ist der	halbe	Theil von	2	×	1	=	2.	
— —	dritte	— —	3	×	1	=	3.	
— —	vierte	— —	4	×	1	=	4.	
— —	fünfte	— —	5	×	1	=	5.	
— —	zehnte	— —	10	×	1	=	10.	u. s. w.

2) 2 ist	$\frac{1}{2}$	von	2	×	2	=	4.	
— —	$\frac{1}{3}$	—	3	×	2	=	6.	
— —	$\frac{1}{4}$	—	4	×	2	=	8.	
— —	$\frac{1}{10}$	—	10	×	2	=	20.	
— —	$\frac{1}{15}$	—	15	×	2	=	30.	u. s. w.
3) 3 ist	$\frac{1}{2}$	von	2	×	3	=	6.	
— —	$\frac{1}{3}$	—	3	×	3	=	9.	
— —	$\frac{1}{4}$	—	4	×	3	=	12.	
— —	$\frac{1}{20}$	—	20	×	3	=	60.	u. s. w.
4) 4 ist	$\frac{1}{2}$	von	2	×	4	=	8.	
— —	$\frac{1}{3}$	—	3	×	4	=	12.	
— —	$\frac{1}{4}$	—	4	×	4	=	16.	
— —	$\frac{1}{16}$	—	16	×	4	=	64.	
— —	$\frac{1}{40}$	—	40	×	4	=	160.	u. s. w.
5) 5 ist	$\frac{1}{2}$	von	2	×	5	=	10.	
— —	$\frac{1}{5}$	—	5	×	5	=	25.	
— —	$\frac{1}{10}$	—	10	×	5	=	50.	
— —	$\frac{1}{15}$	—	15	×	5	=	75.	u. s. w.

6) Auf dieselbe Art verfährt man mit den Zahlen 6, 7, 8, 9 u. 10.

Fragen. 7 ist der 6te Theil von? — der 9te Theil von? — der 10te Theil von? u. s. w. — Von welchen Zahlen ist 8 die Hälfte, das Fünftel, das Siebentel? u. s. w.

§. 50. Die umgekehrte Aufgabe.

Es sind die Zahlen bestimmt; man fragt nach ihrer Hälfte, ihrem Drittel, Viertel u. s. w.

Hier dürfen nur solche Zahlen gewählt werden, welche sich ohne Rest in 2, 3, 4 u. s. w. gleiche Theile theilen lassen; d. h. solche, welche ein Vielfaches von 2, 3, 4 u. s. w. sind.

1) Nennet diejenigen Zahlen, von welchen ihr die Hälfte anzugeben wißt, und nennet die Hälfte!

2.	Die Hälfte von	2	=	1.
4.	— —	4	=	2.
6.	— —	6	=	3.
8.	— —	8	=	4.
10.	— —	10	=	5.

3) Viertel.

4.	$\frac{1}{4}$ von	4	=	1.
8.	— —	8	=	2.
12.	— —	12	=	3.

u. s. w.

2) Drittel.
3. $\frac{1}{3}$ von 3 = 1.
6. — — 6 = 2.
9. — — 9 = 3.
12. — — 12 = 4.

4) Fünftel.
5. $\frac{1}{5}$ von 5 = 1.
10. — — 10 = 2.
15. — — 15 = 3.
u. s. w.

5) Auf dieselbe Art läßt man Zahlen nennen, deren Sechstel, Siebentel, Achtel, Neuntel, Zehntel angegeben werden kann ohne Rest, mit der Angabe des Sechstels, Siebentels u. s. w.

Fragen. Welches ist der halbe Theil von 6, 16, 24 u. s. w.? — Welches ist der dritte Theil von 9, 18, 30 u. s. w.?

§. 51. Angabe aller Theile bestimmter Zahlen ohne Rest.

Viele Zahlen können ohne Rest nicht nur auf eine, sondern auf mehrfache Weise getheilt werden. 12 kann z. B. in Hälften, Drittel, Viertel und Sechstel ohne Rest getheilt werden. Man erfährt dieses, wenn man sich erinnert, durch welche Factoren eine Zahl gebildet wird; z. B. 12 = 2 × 6 = 3 × 4. 2 ist der 6te, 6 der 2te, 3 der 4te, 4 der 3te Theil von 12. In solchen Angaben sollen hier die Schüler geübt werden. Der Lehrer nennt die Zahlen, die Schüler die Factoren und die Theile derselben.

Gebet an, aus welchen Factoren folgende Zahlen entstanden gedacht werden können, und nennet die Theile, in welche sich diese Zahlen ohne Rest theilen lassen!

2	=	2	×	1;	$\frac{1}{2}$	von	2	ist	1.
3	=	3	×	1;	$\frac{1}{3}$	—	3	=	1.
4	=	2	×	2;	$\frac{1}{2}$	—	4	=	2.
	=	4	×	1;	$\frac{1}{4}$	—	4	=	1.
5	=	5	×	1;	$\frac{1}{5}$	—	5	=	1.
6	=	6	×	1;	$\frac{1}{6}$	—	6	=	1.
	=	3	×	2;	$\frac{1}{3}$	—	6	=	2.
					$\frac{1}{2}$	—	6	=	3.
7	=	7	×	1;	$\frac{1}{7}$	—	7	=	1.
8	=	8	×	1;	$\frac{1}{8}$	—	8	=	1.
	=	4	×	2;	$\frac{1}{4}$	—	8	=	2.
					$\frac{1}{2}$	—	8	=	4.
9	=	9	×	1;	$\frac{1}{9}$	—	9	=	1.
	=	3	×	3;	$\frac{1}{3}$	—	9	=	3.
10	=	10	×	1;	$\frac{1}{10}$	—	10	=	1.
	=	5	×	2;	$\frac{1}{5}$	—	10	=	2.
					$\frac{1}{2}$	—	10	=	5.
11	=	11	×	1;	$\frac{1}{11}$	—	11	=	1.
12	=	12	×	1;	$\frac{1}{12}$	—	12	=	1.
	=	6	×	2;	$\frac{1}{6}$	—	12	=	2.
					$\frac{1}{2}$	—	12	=	6.
	=	4	×	3;	$\frac{1}{4}$	—	12	=	3.
					$\frac{1}{3}$	—	12	=	4. u. s. w

20 = 20 × 1 = 10 × 2 = 5 × 4.
24 = 24 × 1 = 12 × 2 = 8 × 3 = 6 × 4.
36 = 36 × 1 = 18 × 2 = 12 × 3 = 9 × 4 = 6 × 6.
60 = 60 × 1 = 30 × 2 = 20 × 3 = 15 × 4 = 12 × 5 = 10 × 6.
u. s. w.

Fragen. Welche Zahlen können in Hälften getheilt werden? (2, 4, 6 2c.) — Welche Zahlen können in Drittel getheilt werden? (3, 6, 9 2c.) — Welche Zahlen können in Viertel getheilt werden? (4, 8, 12 2c.) u. s. w. — Welche Zahlen können in Hälften und Drittel getheilt werden? (6, 12, 18, 24 2c.) — Welche Zahlen können in Hälften und Viertel getheilt werden? (4, 8, 12 2c.) — Welche Zahlen können in Hälften und Fünftel getheilt werden? (10, 20, 30 2c.) — Welche Zahlen können in Drittel und Fünftel getheilt werden? (15, 30, 45 2c.) — Welche Zahlen können in Viertel und Fünftel getheilt werden? (20, 40, 60 2c.) — Welche Zahlen können in Hälften, Drittel und Viertel getheilt werden? (12, 24, 36 2c.) u. s. w. — Wie kann 15, 21, 27, 30, 39 2c. ohne Rest getheilt werden? — In wie viele gleiche Theile kann man 30 theilen? Antwort:

In 2 gleiche Theil, deren jeder = 15 ist.
— 3 — — — — = 10 —
— 5 — — — — = 6 —
— 6 — — — — = 5 —
— 10 — — — — = 3 —
— 15 — — — — = 2 —
— 30 — — — — = 1 — u. s. w.

§. 52. Mehrfachheit der Theile bestimmter Zahlen.

Im vorigen §. wurde nach den einfachen Theilen bestimmter Zahlen gefragt. Man kann diese Theile aber auch mehrere Mal nehmen, und man muß es, wenn man eine gewisse Gewandtheit in der Vergleichung der Zahlen gegen einander erhalten will. Hier entstehen daher Fragen wie diese: wie viel ist 3 mal der 4te Theil von 8 ($^3/_4$ von 8)? Diese Uebung zerspalten wir in folgende Theile:

1) Mehrfachheit der Theile derselben Grundzahl.

a. Der Zahl 2.

Wie groß ist 1, 2, 3 u. s. w. mal die Hälfte von 2?

1 mal die Hälfte von 2 = 1 = 1
2 — — — — = 2 × 1 = 2
3 — — — — = 3 × 1 = 3
4 — — — — = 4 × 1 = 4
| |
10 — — — — = 10 × 1 = 10 u. s. w.

b. Der Zahl 4.

Wie viel mal eins ist 1, 2, 3 u. s. w. mal die Hälfte von 4?

1 mal $^1/_2$ von 4 = 1 × 2 = 2
2 — — — = 2 × 2 = 4
3 — — — = 3 × 2 = 6
4 — — — = 4 × 2 = 8
| |
10 — — — = 10 × 2 = 20

Auf dieselbe Weise läßt man die Mehrfachheit der Hälften von 6, 8, 10, 12, überhaupt der geraden Zahlen angeben.

c. Der Zahlen 3, 6, 9 u. s. w.

Wie viel mal eins ist 1, 2, 3 u. s. w. mal der dritte Theil von 3, 6 u. s. w.?

1 mal $^1/_3$ von 3 = 1 × 1 = 1
2 — — — = 2 × 1 = 2
3 — — — = 3 × 1 = 3 u. s. w.

d. Der Zahlen 4, 8, 12, 16 u. s. w.

Wie viel mal eins ist 1, 2, 3 u. s. w. mal der vierte Theil von 4, 8 u. s. w.

1 mal ¼ von 4	=	1 × 1	=	1		
2 — — —	=	2 × 1	—	2	u. s. w.	
1 mal ¼ von 8	=	1 × 2	=	2		
2 — — —	=	2 × 2	=	4	u. s. w.	

Auf dieselbe Weise läßt man die Mehrfachheit der Theile anderer Zahlen angeben, namentlich die

Mehrfachheit	des	fünften	Theiles	von	5, 10, 15 u. s. w.
—	—	sechsten	—	—	6, 12, 18 u. s. w.
—	—	siebenten	—	—	7, 14, 21 u. s. w.
—	—	achten	—	—	8, 16, 24 u. s. w.
—	—	neunten	—	—	9, 18, 27 u. s. w.
—	—	zehnten	—	—	10, 20, 39 u. s. w.

2) Die Mehrfachheit der Theile verschiedener Grundzahlen.

Z. B.	3 mal die Hälfte von	2 ist	= 3 × 1	=	3
	— — — —	4 —	= 3 × 2	=	6
	— — — —	6 —	= 3 × 3	=	9
	4 mal ⅓ von . . .	6 —	= 4 × 2	=	8
	— — — . . .	9 —	= 4 × 3	=	12
	5 mal ¼ von . . .	4 —	= 5 × 1	=	5
	— — — . . .	8 —	= 5 × 2	=	10
	6 mal ⅖ von . . .	5 —	= 6 × 2	=	12
	— — — . . .	10 —	= 6 × 4	=	24 u. s. w.

Fragen.

1) Wie viel mal eins ist 5mal die Hälfte von 12? Antw. 1 mal die Hälfte von 12 = 1 × 6; 5 mal die Hälfte von 12 = 5 × 6 = 30.

2) Wie groß ist 6 mal ⅓ von 12?
— — — — 24?
— — — — 30?

3) Wie groß ist 2 mal der dritte Theil (⅔) von 3?
— — — — — — — 6?
— — — — — — — 9?

4) ⅐ von 7 = ?	⅒ von 1 × 10 = ?
— — 14 = ?	— — 2 × 10 = ?
— — 21 = ?	— — 3 × 10 = ? u. s. w.

§. 53. Bestimmung des Größenverhältnisses gegebener Zahlenpaare.

In §. 52 wurde die Mehrfachheit der Theile bestimmter Zahlen verlangt. Jetzt werden jedesmal 2 Zahlen genannt, und es soll bestimmt werden, wie sich die Größen der beiden Zahlen zu einander verhalten, der wie vielste Theil, oder wie viel mal ein gewisser Theil, eine Zahl von einer andern sei. Z. B. Wie verhalten sich die Zahlen 4 und 6? Oder: der wie vielste Theil ist 4 von 6? Antw. 6 = 3 × 2; 4 = 2 × 2. Also enthält 6 die Zahl 2 drei mal, 4 die Zahl 2 zwei mal. 6 hat also derjenigen Theile 3, deren 4 2 hat. Oder: 6 = 3 × 2; 2 ist daher ein mal der dritte Theil von 6; 2 × 2 = 4; 4 ist also 2 mal der dritte Theil von 6. Kürzer:

$$6 = 3 \times 2$$
$$2 = \tfrac{1}{3} \text{ von } 6.$$
$$2 \times 2 = \tfrac{2}{3} \text{ von } 6.$$

A. Der wie vielste Theil.

1)	2 ist der wie vielste Theil von					4, 8, 10, 12 u. s. w.?
2)	3	—	—	—	—	6, 9, 12, 15 u. s. w.?
3)	4	—	—	—	—	8, 16, 20 u. s. w.?
4)	5	—	—	—	—	10, 15, 20 u. s. w.?
5)	6	—	—	—	—	12, 18, 24 u. s. w.?
6)	7	—	—	—	—	14, 21, 28 u. s. w.?
7)	8	—	—	—	—	8, 16, 24 u. s. w.?
8)	9	—	—	—	—	18, 27, 36 u. s. w.?
9)	10	—	—	—	—	20, 30, 40 u. s. w.?

B. Wie viel mal ein gewisser Theil?

1) 1 ist wie viel mal 1, 2, 3, 4 u. s. w.?
1 ist $= 1 \times 1 = \tfrac{1}{2}$ von $2 = \tfrac{1}{3} \times 3 = \tfrac{1}{4} \times 4$ u. s w.

2) 2 ist wie viel mal 1, 2, 4, 6, 8 u. s. w.?
$2 = 2 \times 1 = 1 \times 2 = \tfrac{1}{2} \times 4 = \tfrac{1}{3} \times 6 = \tfrac{1}{4} \times 8$ u. s. w.

3) 3 ist wie viel mal 1, 3, 6, 9, 12 u. s. w.?
$3 = 3 \times 1 = 1 \times 3 = \tfrac{1}{2} \times 6 = \tfrac{1}{3} \times 9 = \tfrac{1}{4} \times 12$ u. s. w.

4) 4 ist wie viel mal 1, 2, 4, 6, 8, 10 u. s. w.?
$4 = 4 \times 1 = 2 \times 2 = 1 \times 4 = 2$ mal der dritte Theil von $6 = \tfrac{2}{3} \times 6 = \tfrac{1}{2} \times 8 = \tfrac{2}{5} \times 10 = \tfrac{1}{3} \times 12$ u. s. w.

5) 5 ist wie viel mal 1, 5, 10, 15, 20 u. s. w.?

$$5 = 5 \times 1$$
$$= 1 \times 5$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 10$$
$$= \tfrac{1}{3} \times 15$$
$$= \tfrac{1}{4} \times 20 \text{ u. s. w.}$$

6) 6 ist wie viel mal 1, 3, 6, 9, 12, 15 u. s. w.?
$6 = 6 \times 1 = 2 \times 3 = 1 \times 6 = \tfrac{2}{3} \times 9 = \tfrac{1}{2} \times 12 = \tfrac{2}{5} \times 15$ u. s. w.

7) 7 ist wie viel mal 1, 7, 14, 21 u. s. w.?
$7 = 7 \times 1 = 1 \times 7 = \tfrac{1}{2} \times 14 = \tfrac{1}{3} \times 21$ u. s. w.

8) 8 ist wie viel mal 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 u. s. w.?
$8 = 8 \times 1 = 4 \times 2 = 2 \times 4 = \tfrac{4}{3} \times 6 = 1 \times 8 = \tfrac{4}{5} \times 10 = \tfrac{4}{6} \times 12$ u. s. w.

9) 9 ist wie viel mal 1, 3, 6, 9, 12, 15 u. s. w.?
$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3 = \tfrac{3}{2} \times 6 = 1 \times 9 = \tfrac{3}{4} \times 12 = \tfrac{3}{5} \times 15$ u. s. w.

10) 10 ist wie viel mal 1, 5, 10, 15, 20 u. s. w.?
$10 = 10 \times 1 = 2 \times 5 = 1 \times 10 = \tfrac{2}{3} \times 15 = \tfrac{1}{2} \times 20$ u. s. w.

Natürlich müssen die Schüler die Gründe dieser Angaben nennen. Z. B. 9 ist drei mal der halbe Theil von 6; $9 = \tfrac{3}{2} \times 6$. Denn: der halbe Theil von 6 ist 3; 9 ist 3 mal 3; folglich ist 9 drei mal der halbe Theil von 6; $9 = \tfrac{3}{2} \times 6$.

Fragen und Aufgaben.
Vergleichet 4 mit 14, 18, 22, 24 u. s. w. — 9 mit 2, 12, 14, 36, u. s. w. —
Wie verhalten sich zu einander 7 und 1, 7 und 21, 7 und 70 u. s. w.
9 und 3, 9 und 21, 9 und 30 u. s. w.
Welche Zahl ist 2 mal der 5te Theil von 20?
3 — — — —?
4 — — — —?
5 — — — —?
6 — — — —?
Welche Zahl ist $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$ u. s. w. mal so groß als 2?
Welche Zahl ist $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2 u. s. w. mal so groß als 3?
Welche Zahl ist $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ u. s. w. mal so groß als 4?
Welche Zahl ist $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ u. s. w. mal so groß als 8?
Welche Zahl ist $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$ u. s. w. mal so groß als 5? u. s. w.

§. 54. Fortsetzung des Vorigen.

In den vorhergehenden Uebungen bestimmten wir das Verhältniß solcher Zahlen gegen einander, welche einen gemeinschaftlichen Theiler hatten, z. B. 2 gegen 2, 4, 6, 8 u. s. w.; 9 gegen 3, 6, 9 u. s. w.; noch nicht aber das Verhältniß aller Zahlen gegen alle.

Dieses soll hier geschehen. Man fragt daher z. B.: wie verhalten sich 7 und 9 zu einander? Oder: der wie vielste Theil, oder wie viel mal ein gewisser Theil ist 7 von 9? Antw. 7 ist 7 mal der 9te Theil von 9. Denn 9 ist 9×1; also ist 1 ein mal der neunte Theil von 9; 7 ist 7×1; folglich ist 7 sieben mal der neunte Theil von 9; $7 = \frac{7}{9}$ von $9 = \frac{7}{9} \times 9$. Wir stellen gleich die Reihenfolgen auf.

1) Die Zahl 1.
$1 = 1 \times 1 = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{4} \times 4$ u. s. w.

2) Die Zahl 2.
$2 = 2 \times 1 = 1 \times 2 = \frac{2}{3} \times 3 = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{2}{5} \times 5$ u. s. w.

3) Die Zahl 3.
$3 = 3 \times 1 = \frac{3}{2} \times 2 = 1 \times 3 = \frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{5} \times 5$ u. s. w.

4) Die Zahl 4.
$4 = 4 \times 1 = 2 \times 2 = \frac{4}{3} \times 3 = 1 \times 4 = \frac{4}{5} \times 5 = \frac{4}{6} \times 6$ u. s. w. $= \frac{2}{3} \times 6$ u. s. w.

5) Die Zahl 5.
$5 = 5 \times 1 = \frac{5}{2} \times 2 = \frac{5}{3} \times 3 = \frac{5}{4} \times 4 = 1 \times 5 = \frac{5}{6} \times 6$ u. s. w.

6) Die Zahl 6.
$6 = 6 \times 1 = \frac{6}{2} \times 2$ $(= 3 \times 2)$ $= \frac{6}{4} \times 4$ $(= \frac{3}{2} \times 4)$ $= \frac{6}{5} \times 5$ u. s. w.

7) Die Zahl 7.
$7 = 7 \times 1 = \frac{7}{2} \times 2 = \frac{7}{3} \times 3 = \frac{7}{4} \times 4 = \frac{7}{5} \times 5 = \frac{7}{6} \times 6$ u. s. w.

8) Die Zahl 8.
$8 = 8 \times 1 = 4 \times 2 = \frac{8}{3} \times 3 = \frac{8}{4} \times 4$ $(= 2 \times 4)$ $= \frac{8}{5} \times 5$ u. s. w.

9) Die Zahl 9.
$9 = 9 \times 1 = \frac{9}{2} \times 2 = \frac{9}{3} \times 3 = \frac{9}{4} \times 4 = \frac{9}{5} \times 5$ u. s. w.

10) Die Zahl 10.
$10 = 10 \times 1 = \frac{10}{2} \times 2 = \frac{10}{3} \times 3 = \frac{10}{4} \times 4 = \frac{10}{5} \times 5$ u. s. w.

§. 55. Bestimmung, der wie vielste Theil eine gewisse Zahl von zwei oder mehreren Zahlen ist.

1 ist die Hälfte von 2, der dritte Theil von 3, der vierte Theil von 4 u. s. w. Also ist die Hälfte von 2 = dem dritten Theile von 3 = dem vierten Theile von 4 u. s. w.

2 ist 2 mal 1, 2 mal der dritte Theil von 3, die Hälfte von 4, 2 mal der fünfte Theil von 5 u. s. w. Also ist 2 mal 1 = 2 mal dem dritten Theile von 3 = der Hälfte von 4 = 2 mal dem fünften Theile von 5 u. s. w.

Es entstehen daher Fragen, wie folgende:

1) Die Hälfte von 6 ist — der wie vielste Theil der Zahlen von 1 bis 10? Antw. Die Hälfte von 6 (= 3) ist 3 × 1, $^3/_2$ × 2, 3 × 1, $^3/_4$ × 4 u. s. w.
2) Der dritte Theil von 21 ist der wie vielste Theil der Zahlen 1 bis 10?
3) Zwei mal der fünfte Theil von 20 — ist der wie vielste Theil der Zahlen 1 bis 10?
4) Der vierte Theil von 8 ist wie viel mal 1 bis 10?

§. 56. Aufgaben.

1) Verbindung des Theilens mit dem Zusammenzählen, Abziehen, Vervielfachen. Z. B.

$^3/_4 \times 12 + 36 = ?$ $48 + {}^2/_5 \times 30 = ?$ $^7/_8 \times 3 + {}^2/_3 \times 10 = ?$ $^3/_2 \times 4 - {}^2/_3 \times 6 = ?$

$(^8/_4 \times 16) - (^5/_6 \times 24) = ?$ Auflösung. 1 mal der 4te Theil von 16 = 4; 8 mal der 4te Theil von 16 = 8 × 4 = 32; 1 mal der 6te Theil von 24 = 4; 5 mal der 6te Theil von 24 = 5 × 4 = 20; 32 — 20 = 12; folglich ist 8 mal der 4te Theil von 16 weniger 5 mal der 6te Theil von 24 = 12.

Mehr dergleichen Aufgaben!

2) Bestimmung niederer Größen in Theilen einer höheren.

a. Pfennige in Sgr.

2 Pf. = $^1/_6$ Sgr.
3 — = $^1/_4$ —
4 — = $^1/_3$ —
6 — = $^1/_2$ —

Hier, wie überall, braucht man nicht pedantisch daran zu hängen, daß bisher nur die Grundzahlen betrachtet wurden. Man kann daher gleich die Aufgabe stellen: 1 Pf. wie viel Sgr.? Antw. 1 Pf. ist $^1/_{12}$ Sgr. — Man bilde Reihenfolgen:

	b. Sgr. in Thlr.
1 Pf. ist $^1/_{12}$ Sgr.	1 Sgr. ist $^1/_{30}$ Thlr.
2 — — $^2/_{12}$ = $^1/_6$ Sgr.	2 — — $^2/_{30}$ = $^1/_{15}$ Thlr.
3 — — $^3/_{12}$ = $^1/_4$ —	3 — — $^3/_{30}$ = $^1/_{10}$ —
4 — — $^4/_{12}$ = $^1/_3$ —	4 — — $^4/_{30}$ = $^2/_{15}$ —
5 — — $^5/_{12}$	5 — — $^5/_{30}$ = $^1/_6$ —
6 — — $^6/_{12}$ = $^1/_2$ — u. s. w.	6 — — $^6/_{30}$ = $^1/_5$ — u. s. w.

c. Quentchen in Loth.

1 Q. ist $^1/_4$ Loth.
2 — — $^2/_4$ = $^1/_2$ Loth
3 — — $^3/_4$
4 — — $^4/_4$ = 1 —
5 — — $^5/_4$ = $1^1/_4$ —
6 — — $^6/_4$ = $1^2/_4$ = $1^1/_2$ L. u. s. w.

d. Loth in Pfund.

1 Loth ist $^1/_{32}$ Pfund.
2 — — $^2/_{32}$ = $^1/_{16}$ Pfund.
3 — — $^3/_{32}$ Pfund.
4 — — $^4/_{32}$ = $^1/_8$ Pfund.
u. s. w.

Aehnliche Aufgaben. — Auch Zwischenfragen. Z. B. 20 Loth; wie viel Theile eines Pfundes? Antw. 20 Loth = $\frac{20}{32}$ = $\frac{5}{8}$ Pfund.

Denn: 1 Pfund ist 32 Loth; also ist 1 L. = $^1/_{32}$ Pfd., folglich 20 L. = $^{20}/_{32}$ Pfd. Oder 1 Pfd. ist 32 L. = 8 × 4 L.; 20 L. = 5 × 4 L. rc. Also hat 1 Pfd. derjenigen Theile 8, deren 20 L. 5 haben; folglich sind 20 L. 5 mal der 8te Theil von 1 Pfd. = $^5/_8$ Pfd.

3) Bestimmung höherer Größen in Theilen der niederen.

a. Sgr. in Pfennige.

$^1/_2$ Sgr. = 6 Pfen.
$^1/_3$ — = 4 —
$^1/_4$ — = 3 —
$^1/_6$ — = 2 —
$^1/_{12}$ — = 1 —

b. Thlr. in Sgr.

$^1/_2$ Thlr = 15 Sgr.
$^1/_3$ — = 10 —
$^1/_5$ — = 6 —
$^1/_6$ — = 5 —
$^1/_{10}$ — = 3 —
$^1/_{15}$ — = 2 —
$^1/_{30}$ — = 1 —

$^2/_3$ — = 20 —
$^4/_3$ — = 40 —

$^2/_5$ — = 12 —
$^3/_5$ — = 18 —
$^4/_5$ — = 24 —
u. s. w.

c. Pfund in Loth.

$^1/_2$ Pfd. = 16 Loth.
$^1/_4$ — = 8 —
$^1/_8$ — = 4 —
$^1/_{16}$ — = 2 —

$^3/_4$ — = 24 —
$^5/_4$ — = 40 —

$^3/_8$ — = 12 —
$^5/_8$ — = 20 —

$^3/_{16}$ — = 6 —
$^7/_{16}$ — = 14 —
u. s. w.

d. Fuß in Zoll. (Duodecimalmaß.)

$^1/_2$ Fuß = 6 Zoll.
$^1/_3$ — = 4 —
$^2/_3$ — = 8 —
$^1/_4$ — = 3 —
$^3/_4$ — = 9 —

Aehnliche Aufgaben. — Auch Zwischenfragen. Z. B. $^3/_4$ Fuß, wie viel Zoll? Antw. $^1/_4$ Fuß = 3 Zoll; also $^3/_4$ Fuß = 3 × 3 = 9 Zoll u. s. w.

Dann Aufgaben, wie diese:

1) $^2/_3$ Sgr. + $^1/_4$ Sgr., wie viel Pfennige? — Antw. 11 Pf.
Denn $^1/_3$ Sgr. = 4 Pf.; $^2/_3$ Sgr. = 2 × 4 = 8 Pf.; $^1/_4$ Sgr. = 3 Pf.; also sind $^2/_3$ Sgr. + $^1/_4$ Sgr. = 11 Pf.

2) $^2/_3$ Thlr. + $^4/_5$ Thlr., wie viel Sgr.? Antw. 44 Sgr.
Denn: $^1/_3$ Thlr. = 10 Sgr.; $^2/_3$ Thlr. = 2 × 10 = 20 Sgr.; $^1/_5$ Thlr. = 6 Sgr.; $^4/_5$ Thlr. = 4 × 6 = 24 Sgr.; 20 Sgr. + 24 Sgr. = 44 Sgr.

3) $\frac{3}{4}$ Pfd. + $\frac{5}{8}$ Pfd. + $\frac{1}{2}$ Pfd., wie viel Loth? Antw. 60 Loth.

4) 3 Ellen Tuch kosten 30 Rthlr., wie viel kostet 1 Elle? Antw. 10 Rthlr.

Auflösung. 1 Elle ist der dritte Theil von 3 Ellen; folglich kostet 1 Elle auch den dritten Theil von 30 Thlr.; der dritte Theil von 30 ist 10; folglich kostet 1 Elle Tuch 10 Thlr.

5) Für 8 Sgr. kauft man 40 Ellen Band; wie viel für 1 Sgr.? Antw. 5 Ellen.

6) 12 Pfd. Kirschen kosten 18 Kreuzer, wie viel kosten 8 Pfd.? Antw. 12 Kreuzer.

Denn: 8 Pfd. = $\frac{2}{3}$ von 12 Pfd.; also kosten 8 Pfd. auch $\frac{2}{3}$ von 18 Krzr; $\frac{1}{3}$ von 18 Krzr. = 6 Krzr.; $\frac{2}{3}$ von 18 Krzr. = 2 × 6 = 12 Krzr.; folglich kosten 8 Pfd. 12 Krzr.

7) Für 60 Rthlr. kauft man 35 Ellen feine Leinwand; wie viel für 24 Rthlr.? Antw. $\frac{2}{5}$ × 35 = 2 × 7 = 14 Ellen.

8) 6 Arbeiter erhalten 48 Rthlr. Lohn; wie viel Lohn erhalten 29 Arbeiter? Antw. 232 Rthlr.

Denn: 1 Arbeiter ist der 6te Theil von 6 Arbeitern; also erhält auch 1 Arbeiter den 6ten Theil von 48 Rthlr. = 8 Rthlr.; folglich 29 Arbeiter 29 × 8 Rthlr. = 20 × 8 + 9 × 8 = 160 + 72 = 232 Rthlr.

9) Ein Knabe verkauft von 42 Bogen Papier 2 mal den siebenten Theil; er verschenkt von dem übrigen Papier den dritten Theil; wie viel hatte er nun noch? Antw. 20 Bogen.

10) Jemand besitzt 60 Sgr. Er gibt davon 4 mal den 10ten Theil an die Armen, und von dem übrigen noch 2 mal den 9ten Theil; wie viel Sgr. bleiben ihm übrig? Antw. 28 Sgr.

11) Ein Weber hat 48 Ellen Leinwand; er nimmt $\frac{5}{6}$ davon und verfertigt Hemden daraus, aus je 2 Ellen ein Hemd; wie viel Hemden gibt es? Antw. 20 Hemden.

12) Ein Müller kauft $\frac{4}{7}$ mal 56 Malter Roggen, das Malter zu 4 Rthlr.; er verkauft wieder 6 Malter à 7 Rthlr. Wie viel Rthlr. hat er mehr ausgegeben als eingenommen? Antw. 86 Rthlr.

Mehr dergleichen Aufgaben! Die Lehrer wissen, daß diese Aufgaben gewöhnlich in der sogenannten Regel-de-Tri vorkommen. Sie gehören aber auch hieher. Es ist gleichgültig, ob die Schüler etwas von der Regel-de-Tri wissen, wenn sie nur die Aufgaben derselben mit Verstand auflösen können. Bei den hieher gehörigen Aufgaben muß man die Zahlen so wählen, daß keine den Kindern unbekannten Brüche entstehen. — Die allgemeinen Sätze, welche der Berechnung dieser Aufgaben zum Grunde liegen, sind:

Doppelte Waare, doppeltes Geld,
Dreifache — dreifaches —

So viel mal eine bestimmte Waare, eben so viel mal der bestimmte Preis; und umgekehrt. U. s. w.

Hälfte des Geldes, Hälfte der Waare,
Drittel — — Drittel — —

Ein gewisser Theil des Geldes, der eben so vielste Theil der Waare; und umgekehrt.

Anmerkung. Wir haben uns bisher schon gewisser Bezeichnungsarten bedient, deren völliges Verständniß erst in der Folge gegeben wird. Wir bezeichneten z. B. den dritten Theil von 4 durch: $\frac{1}{3}$ von 4 oder $\frac{1}{3}$ × 4. Die Schüler werden mit dieser Bezeichnungsweise gleich oben, nach dem mündlichen Verfahren, bekannt gemacht, ohne daß man von Brüchen spricht. Auch man läßt sie ganze Reihenfolgen mit diesen Zeichen aufschreiben, wie sie oben aufgestellt worden sind.

Z. B. 1 = $\frac{1}{7}$ × 7 $\qquad$ $\frac{1}{2}$ × 2 = 1
2 = $\frac{2}{7}$ × 7 $\qquad$ $\frac{1}{2}$ × 4 = 2
u. s. w. $\qquad$ $\frac{1}{2}$ × 6 = 3 u. s. w.

$\frac{1}{5} \times 20 = 4$
$\frac{2}{5} \times 20 = 2 \times 4 = 8$
$\frac{3}{5} \times 20 = 3 \times 4 = 12$ u. s. w.

Dann macht man sie noch mit dem Theilungszeichen bekannt, welches i
2 über einander stehenden Punkten besteht (:). Es wird zwischen die be
den Zahlen gesetzt, von welchen eine durch die andere getheilt werden sol
Die Zahl, welche theilt, wird voran gesetzt, z. B. 2 : 4 = 2, d, h. de
halbe Theil von 4 ist = 2, oder 2 in 4 = 2 mal.

3 : 6 = 2
3 : 9 = 3
4 : 20 = 5

Diejenige Zahl, welche getheilt wird, heißt die ganze Zahl, das Ganze
die zu theilende Zahl (der Dividendus, der Dividend); diejenig
Zahl, welche theilt, heißt die theilende Zahl, der Theiler, (der Divi
sor): diejenige Zahl, welche den gesuchten Theil angibt, heißt der Thei
(der Quotient); 4 : 12 = 3.

Hier ist 12 das Ganze, der Dividend;
— — 4 der Theiler, der Divisor;
— — 3 der Theil, der Quotient.

Sehr nahe damit verwandt ist die Vorstellung, wie oft 4 in 12 ent
halten sei; 4 ist in 12 3 mal enthalten. Das Verhältniß der Vor
stellungen des Enthaltenseins und des Theilens geht deutlich aus nach
folgenden Bemerkungen hervor.

Wenn wir fragen: wie oft ist 4 in 12 enthalten, so wollen wir wissen
wie oft 4 von 12 weggenommen werden kann, oder wie oft 4 genommen
werden muß, damit 12 entstehen. Antw. 3 mal; 3 × 4 = 12.

Fragen wir dagegen, welches der 4te Theil von 12 sei; so wollen wi
wissen, welche Zahl 4 mal genommen werden müsse, um 12 zu erhalten
Antw. 3; 4 × 3 = 12. Beide Vorstellungen verhalten sich also zu ein
ander wie 3 mal 4 und 4 mal 3, d. h. beim Enthaltensein suchen wir ein
Zahl, mit der wir eine gegebene, beim Theilen eine, die wir mit eine
gegebenen multipliciren müssen, um die enthaltende und die getheilte zu
erhalten. Die eine Vorstellung folgt aus der andern. Weiß man, daß 4
in 12 3 mal enthalten, also daß 3 × 4 = 12 ist, so weiß man auch
daß 4 der dritte Theil von 12 ist, woraus denn folgt, weil die Factoren
eines Products mit einander verwechselt werden können, daß 3 der 4te
Theil von 12 ist, und umgekehrt. Aus der Kenntniß des Einen kann man
daher auf das Andere schließen, und das Eine kann zur Hervorbringung
des Andern benutzt werden, wie es in dem Nachfolgenden geschehen wird
Das Ausführliche darüber siehe am Ende der 5ten Uebung der 9ten Stufe

Anmerkung. Wer andere mathematische Bücher kennt, wird wissen, daß das
Divisionszeichen (:) gewöhnlich nicht in dem oben angegebenen Sinne
gebraucht wird. Vielmehr heißt hergebrachter Weise 3 : 4 so viel, als drei
durch vier, wo 3 der Dividend, 4 der Divisor ist. Aber es ist zweckmäßi-
ger, das Divisionszeichen in dem oben angegebenen Sinne zu gebrauchen
Denn alsdann werden die Zahlen, von welchen eine durch die andere ge-
theilt werden soll, gerade so gestellt, wie es bei der gewöhnlichen Division
üblich ist, wo der Divisor die erste Stelle erhält. Eben deßwegen ist es
auch gerathen, das Divisionszeichen (:) in der Lehre von den Verhältnissen
auf dieselbe Weise, also immer in demselben Sinne zu gebrauchen.

Dritte Uebung.

Das Theilen mit größeren Zahlen.

I. Mündlich.

§. 57. Angabe, wie oft irgend eine Zahl zwischen 1 und 100 in jeder andern in demselben Zahlenraume enthalten ist.

Wenn zwei Zahlen einander gleich sind, so ist die eine in der andern ganz enthalten, und sie erfüllen einander wechselseitig, 4 ist in 2 × 2 oder 4 ein mal enthalten, und 4 erfüllt die Zahl 4.

Wenn 2 Zahlen nicht gleich sind, so ist zwar die kleinere in der größeren, nicht aber die größere in der kleineren ganz enthalten; nur ein Theil der größeren Zahl ist in der kleineren enthalten.

3 ist in 4 ganz enthalten, und 3 erfüllt 4 nicht; 4 ist aber nicht in 3 enthalten, sondern nur ein Theil von 4 ist in 3 enthalten, oder ein Theil von 4 erfüllt die 3. — Die Fertigkeit in der Bestimmung des gegenseitigen Enthaltenseins zweier Zahlen ist in der Rechenkunst von der größten Wichtigkeit. Wir widmen daher dieser Aufgabe unsere ganze Aufmerksamkeit.

Wenn gefragt wird, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten sei, z. B. wie oft 3 in 6, so will man wissen, wie oft die eine Zahl genommen werden müsse, um die andere zu erhalten; 3 muß 2 mal genommen werden, um 6 zu erhalten; also ist 3 in 6 2 mal enthalten. 4 ist in 2 nicht 1 mal, sondern nur $\frac{1}{2}$ mal enthalten, oder nur die Hälfte von 4 ist in 2 enthalten; denn $\frac{1}{2} \times 4$ ist $= 2$. Diese Bestimmungen müssen dem Schüler zur festesten Geläufigkeit gebracht werden. Wir stellen hier nun einige Reihenfolgen auf, welche den zu nehmenden Gang nachweisen, indem wir mit den bereits behandelten Grundzahlen anfangen und die größeren Zahlen an sie anreihen.

1) 1 ist in 1 1 mal enthalten; denn $1 \times 1 = 1$.
1 — 2 2 — — — $2 \times 1 = 2$.
1 — 2 3 — — — $3 \times 1 = 3$ u. s. w.

1 ist in jeder Zahl so oft enthalten, als diese Zahl Einheiten hat.

2) 2 ist in 1 $\frac{1}{2}$ mal enthalten; denn $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.
2 — 2 1 — — — $1 \times 2 = 2$.
2 — 3 $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ — — $1\frac{1}{2} \times 2 = 3$. u. s. w.

2) ist in jeder Zahl so oft enthalten, als der halbe Theil derselben beträgt. Der halbe Theil von 13 ist $6\frac{1}{2}$; also ist 2 in 13 $6\frac{1}{2}$ mal enthalten.

3) 3 ist in 1 $\frac{1}{3}$ mal enthalten; denn $\frac{1}{3} \times 3 = 1$.
3 — 2 $\frac{2}{3}$ — — — $\frac{2}{3} \times 3 = 2$.
3 — 3 $\frac{3}{3} = 1$ — — $1 \times 3 = 3$.
3 — 4 $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ — — $1\frac{1}{3} \times 3 = 4$ u. s. w.

3 ist in jeder Zahl so oft enthalten, als der dritte Theil derselben ausmacht; der dritte Theil von 24 ist 8; also ist 3 in 24 8 mal enthalten; $8 \times 3 = 24$.

4) Auf die bezeichnete Weise wird die Sache fortgesetzt. Wir finden als Resultat: jede Zahl, z. B. 10, ist in einer andern Zahl, z. B. in 33 so oft enthalten, als der so vielste Theil, welchen die erste angibt, hier der 10te Theil, der andern, hier 33, beträgt. Der 10te Theil von 33 ist $3^3/_{10}$; also ist 10 in 33 $3^3/_{10}$ mal enthalten.

Wir setzen noch einige Beispiele mit größeren Zahlen her.

5) 12 ist in 1 $^1/_{12}$ mal enthalten; denn $^1/_{12} \times 12 = 1$.
12 — 2 $^2/_{12}$ — — — $^2/_{12} \times 12 = 2$.
12 — 3 $^3/_{12}$ — — — $^3/_{12} \times 12 = 3$.
u. s. w.
12 — 13 $^{13}/_{12} = 1^1/_{12}$ — — $1^1/_{12} \times 12 = 13$.
12 — 14 $^{14}/_{12} = 1^2/_{12}$ — — $1^2/_{12} \times 12 = 14$ u. s. w.

6) 50 ist in 1 $^1/_{50}$ mal enthalten; denn $^1/_{50} \times 50 = 1$.
50 — 2 $^2/_{50}$ — — — $^2/_{50} \times 50 = 2$.
u. s. w.
50 — 60 $1^{10}/_{50}$ — — — $1^{10}/_{50} \times 50 = 60$ u. s. w.

7) Diese Uebung wird so lange fortgesetzt, bis die Schüler im Stande sind, Fragen, wie die folgenden, mit Schnelligkeit zu beantworten.

a. Wie oft ist 3 in 40 enthalten? Antw. $13^1/_3$ mal.
Denn: 40 ist 30 + 10. 3 ist in 30 10 mal, und 3 in 10 $3^1/_3$ mal enthalten; also ist 3 in 40 $10 + 3^1/_3 = 13^1/_3$ mal enthalten.

b. Wie oft ist 12 in 100 enthalten? Antw. $8^1/_3$ mal.
Denn: $100 = 96 + 4 = 8 \times 12 + ^1/_3 \times 12$. Also ist 12 in 100 $8 + ^1/_3 = 8^1/_3$ mal enthalten.

c. Wie viel ist der 9te Theil von 89? Antw. $9^8/_9$.
Denn: $89 = 81 + 8 = 9 \times 9 + ^8/_9 \times 9$. Folglich ist der 9te Theil von 81 = 9, und der 9te Theil von 8 = $^8/_9$: also ist der 9te Theil von $89 = 9 + ^8/_9 = 9^8/_9$.

d. Wie viel ist $7^5/_7 \times 14$? Antw. 108.
Denn: $7 \times 14 = 7 \times 10 + 7 \times 4 = 70 + 28 = 98$; $^1/_7 \times 14 = 2$; $^5/_7 \times 14 = 5 \times 2 = 10$; $98 + 10 = 108$; also ist $7^5/_7 \times 14 = 108$.

e. 13 ist in 100 wie oft enthalten? Antw. $7^9/_{13}$ mal.
Denn: $100 = 7 \times 13 + 9 = 7 \times 13 + ^9/_{13} \times 13$. Folglich ist 13 in 100 $7^9/_{13}$ mal enthalten.

f. Wie oft ist 48 in 30 enthalten? Antw. $^{30}/_{48} = ^5/_8$ mal.
Denn $48 = 8 \times 6$; $30 = 5 \times 6$; also hat 48 derjenigen Theile 8, deren 30 5 hat; also ist 48 in 30 $^5/_8$ mal enthalten.
Oder: 48 ist in 1 $^1/_{48}$ mal enthalten; also in 30 $^{30}/_{48} = ^5/_8$ mal.

g. Zur besonderen Geläufigkeit muß es gebracht werden, diejenigen Zahlen anzugeben, welche in anderen Zahlen ohne Rest aufgehen. Dieses sind diejenigen, welche Factoren dieser Zahlen sind. Der Schüler muß daher die Fertigkeit besitzen, die Factoren jeder Zahl mit Schnelligkeit anzugeben. Daher beispielweise die Fragen:

Durch welche Zahlen ist 64 ohne Rest theilbar?
Antw. $64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$.
Also ist 64 durch 2, 32, 4, 16, 8 ohne Rest theilbar. $\frac{1}{2} \times 64 = 32$; $\frac{1}{32}$ von 64 ist 2 u. s. w.

In welche 2 Factoren läßt sich 72 auflösen?
Antw. $72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$.

Anmerkung. Man macht diese Uebung zu einer Privataufgabe, indem man sämmtliche Zahlen von 1 bis 100 in Factoren auflösen läßt. Diese Uebung ist äußerst wichtig, fördert das Kopfrechnen ungemein. Weiß der Schüler z. B. augenblicklich (darum fleißige Uebung!), daß $91 = 7 \times 13$, so kennt er nicht nur den 7ten und 13ten Theil von 91, sondern wird auch augenblicklich den 7ten und 13ten Theil der auf 91 folgenden Zahlen angeben. Ich wüßte keine Uebung, welche wichtiger wäre als diese. Ihre Vernachlässigung ist der Grund, daß Viele niemals mit Fertigkeit im Kopf rechnen lernen. Im Kopfe rechnen und fertig rechnen ist aber eins und dasselbe.

8) Anwendungen.

a. Verwandlung der Pfennige in Sgr.
12 Pf. = 1 Sgr.
13 Pf. = 12 Pf. + 1 Pf. = 1 Sgr. + $\frac{1}{12}$ Sgr. = $1\frac{1}{12}$ Sgr.
14 Pf. = 12 Pf. + 2 Pf. = 1 Sgr. + $\frac{2}{12}$ Sgr. = $1\frac{2}{12}$ = $1\frac{1}{6}$ Sgr.
15 Pf. = 12 Pf. + 3 Pf. = 1 Sgr. + $\frac{3}{12}$ Sgr. = $1\frac{3}{12}$ = $1\frac{1}{4}$ Sgr. u. s. w.

b. Verwandlung der Lothe in Pfund.
1 Loth = $\frac{1}{32}$ Pfund.
2 — = $\frac{2}{32}$ — = $\frac{1}{16}$ Pfd.
u. s. w.
32 — = 1 Pfund.
33 — = 32 Loth + 1 L. = 1 Pfd. + $\frac{1}{32}$ Pfd. = $1\frac{1}{32}$ Pfd.
40 — = $1\frac{8}{32}$ = $1\frac{1}{4}$ Pfund u. s. w.

c. Verwandlung der Kreuzer in Gulden.
1 Krzr. = $\frac{1}{60}$ Fl.
2 — = $\frac{2}{60}$ — = $\frac{1}{30}$ Fl.
3 — = $\frac{3}{60}$ — = $\frac{1}{20}$ —
4 — = $\frac{4}{60}$ — = $\frac{1}{15}$ — u. s. w.

d. Verwandlung der Tage in Wochen.
1 Tag = $\frac{1}{7}$ Woche.
2 Tage = $\frac{2}{7}$ —
7 — = $\frac{7}{7}$ = 1 Woche.
8 — = $1\frac{1}{7}$ Woche.
14 — = $\frac{14}{7}$ = 2 Wochen u. s. w.

e. Verwandlung einer gewissen Anzahl in Dutzend.
1 = $\frac{1}{12}$ Dutzend.
2 = $\frac{2}{12}$ = $\frac{1}{6}$ Dutzend.
3 = $\frac{3}{12}$ = $\frac{1}{4}$ —
4 = $\frac{4}{12}$ = $\frac{1}{3}$ —
12 = $\frac{12}{12}$ = 1 —
13 = $1\frac{1}{12}$ u. s. w.

f. Verwandlung der Fuß in Ruthen.
1 Fuß = $\frac{1}{12}$ Ruthe.
2 — = $\frac{2}{12}$ = $\frac{1}{6}$ Ruthe.
24 — = $\frac{24}{12}$ = 2 —
25 — = $\frac{25}{12}$ = $2\frac{1}{12}$ — u. s. w.

Fragen:

1) 71 Pf. wie viel Sgr.? Antw. $5\frac{11}{12}$ Sgr.
Denn: 71 Pf. = 60 Pf. + 11 Pf. = 5 × 12 Pf. + 11 Pf.; 1 × 12 Pf. = 1 Sgr.; also sind 5 × 12 Pf. = 5 × 1 Sgr. = 5 Sgr.; 1 Pf. = $\frac{1}{12}$ Sgr.; 11 Pf. = $\frac{11}{12}$ Sgr.; also sind 71 Pf. = $5\frac{11}{12}$ Sgr.
Oder: 12 Pf. = 1 Sgr.; so oft ich 12 Pf. habe, so oft habe ich 1 Sgr.; so oft daher 12 Pf. in 71 Pf. enthalten sind, so oft habe ich 1 Sgr.; 12 Pf. sind in 71 Pf. $5\frac{11}{12}$ mal enthalten, denn $5\frac{11}{12}$ × 12 = 71; also sind 71 Pf. = $5\frac{11}{12}$ Sgr.

2) 100 Loth wie viel Pfund? Antw. $3\frac{4}{32}$ = $3\frac{1}{8}$ Pfd.
Denn: 32 ist in 100 $3\frac{4}{32}$ = $3\frac{1}{8}$ mal enthalten.
Oder: 100 L. = 96 L. + 4 L. = 3 × 32 L. + $\frac{1}{8}$ × 32 L. = $3\frac{1}{8}$ × 32 L. = $3\frac{1}{8}$ × 1 Pfd. = $3\frac{1}{8}$ Pfd.
Mehr dergleichen Fragen!

Unnöthige (?) Frage: Soll der Schüler alle Aufgaben so weitläuftig lösen? Nur der, der uns mißversteht, wird sie bejahen. Der Schüler soll die ersten Aufgaben einer Art mündlich so weitläuftig lösen, daß alle Hauptdenkoperationen genannt werden. Nachher kommt es auf Fertigkeit an. Er braucht sich dann der einzelnen Operationen nicht in jedem Moment bewußt zu sein, wenn er jeden Augenblick die Operationen zu klarem Bewußtsein zu erheben, also von seinem Thun Rechenschaft zu geben vermag. Wer thut alles das, was er thut, immer mit hellem Bewußtsein über das Einzelne? Niemand; man würde ja sonst zu zusammengesetzten (höheren) Thätigkeiten gar nicht fortschreiten können. Betrachtet man einen Baum im Ganzen, so darf man die Blätter nicht zählen, und wer einen Wald übersehen will, kann nicht die einzelnen Bäume betrachten. Also: keine Pedanterie!

§. 58. Angabe, wie oft überhaupt größere Zahlen in einander enthalten sind, oder das Theilen größerer Zahlen.

Obgleich Manches, was jetzt folgen wird, schon da gewesen ist, so führen wir es doch wieder mit auf, theils der Vollständigkeit wegen, theils um die Sache unter anderm Gesichtspunkte zu zeigen.

1) Das Theilen zwei- und mehrstelliger Zahlen durch die Grundzahlen.

a. Wie viel beträgt der 7te Theil von 70? Antw. 10.
Auflösung. 70 = 7 Z.; $\frac{1}{7}$ von 7 Z. = 1 Z.; 1 Z. = 10 E.; folglich ist $\frac{1}{7}$ von 7 Z. = 10 E. = 10.

b. Wie viel beträgt der 8te Theil von 97? Antw. $12\frac{1}{8}$.
Auflösung. 97 = 80 + 17 = 8 Z. + 17 E.; $\frac{1}{8}$ von 8 Z. ist 1 Z. = 10 E.; $\frac{1}{8}$ von 17 E. = $2\frac{1}{8}$ E.; also ist $\frac{1}{8}$ von 97 = 10 E. + $2\frac{1}{8}$ E. = $12\frac{1}{8}$.
Oder: 97 = 96 + 1 = 12 × 8 + $\frac{1}{8}$ × 8; folglich ist der 8te Theil von 97 = $12\frac{1}{8}$.

c. Wie viel ist der 6te Theil von 540? Antw. 90.

Auflösung. 540 = 54 Z.; $\frac{1}{6}$ von 54 Z. = 9 Z. = 90; folglich ist $\frac{1}{6}$ von 540 = 90.

d. Wie viel ist der 5te Theil von 7000? Antw. 1400.

Auflösung. 7000 = 70 H. = 50 H. + 20 H.; $\frac{1}{5}$ von 50 H. = 10 H.; $\frac{1}{5}$ von 20 H. = 4 H.; 10 H. + 4 H. = 14 H. = 1400.

e. Wie viel ist $\frac{1}{9}$ von 741? Antw. $82\frac{1}{3}$.

Auflösung. 741 = 720 + 21; $\frac{1}{9}$ von 720 = 80; $\frac{1}{9}$ von 21 = $2\frac{3}{9}$ = $2\frac{1}{3}$; also ist $\frac{1}{9}$ von 741 = 80 + $2\frac{1}{3}$ = $82\frac{1}{3}$.

f. Wie viel ist $\frac{1}{4}$ von 3833? Antw. $958\frac{1}{4}$.

Auflösung. 3833 = 36 H. + 2 H. + 33 E.; $\frac{1}{4}$ von 36 H. = 9 H. = 900 E.; $\frac{1}{4}$ von 2 H. oder 20 Z. = 5 Z. = 50 E.; 900 + 50 = 950; $\frac{1}{4}$ von 33 E. = $8\frac{1}{4}$ E. = $8\frac{1}{4}$; 950 + $8\frac{1}{4}$ = $958\frac{1}{4}$.

g. Wie viel ist $\frac{1}{6}$ von 25936? Antw. $4322\frac{2}{3}$.

Auflösung. 25936 = 24 T. + 18 H. + 12 Z. + 16 E.; $\frac{1}{6}$ von 24 T. = 4 T.; $\frac{1}{6}$ von 18 H. = 3 H.; $\frac{1}{6}$ von 12 Z. = 2 Z.; $\frac{1}{6}$ von 16 E. = $2\frac{2}{3}$ E.; 4 T. + 3 H. + 2 Z. + $2\frac{2}{3}$ E. ist $4322\frac{2}{3}$; also ist $\frac{1}{6}$ von 25936 = $4322\frac{2}{3}$.

2) Das Theilen zwei- und mehrstelliger Zahlen durch zwei- und mehrstellige Zahlen.

a. Reine Zehner durch reine Zehner.

Z. B. Wie viel ist der 30ste Theil von 80? Antw. $2\frac{2}{3}$.

Auflösung. 80 = 60 + 20; $\frac{1}{30}$ von 60 = 2; $\frac{1}{30}$ von 20 = $\frac{20}{30}$ = $\frac{2}{3}$; also ist $\frac{1}{30}$ von 80 = $2\frac{2}{3}$.

Oder: 80 = 8 Z.; 30 = 3 Z.; 3 Z. in 8 Z. = $2\frac{2}{3}$ mal; also ist $\frac{1}{30}$ von 80 = $2\frac{2}{3}$.

b. Reine Hunderte durch reine Zehner.

Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{60}$ von 500? Antw. $8\frac{1}{3}$.

Auflösung. 500 = 480 + 20; $\frac{1}{60}$ von 480 = 8; $\frac{1}{60}$ von 20 = $\frac{20}{60}$ = $\frac{1}{3}$; also ist $\frac{1}{60}$ von 500 = $8\frac{1}{3}$.

Oder: 500 = 50 Z. = 48 Z. + 2 Z.; 60 = 6 Z. sind in 48 Z. 8 mal enth.; 6 Z. sind in 2 Z. $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ mal enth.; also sind 6 Z. in 50 Z. $8\frac{1}{3}$ mal enth.; d. h. $\frac{1}{60}$ von 500 = $8\frac{1}{3}$.

c. Reine Hunderter durch reine Hunderter.

Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{300}$ von 800? Antw. $2\frac{2}{3}$.

Auflösung. 800 = 600 + 200; $\frac{1}{300}$ von 600 = 2; $\frac{1}{300}$ von 200 = $\frac{200}{300}$ = $\frac{2}{3}$; also = $\frac{1}{300}$ von 800 = $2\frac{2}{3}$.

Oder: 800 = 8 H. = 6 H. + 2 H.; 300 = 3 H.; 3 H. sind in 6 H. 2 mal, 3 H. in 2 H. $\frac{2}{3}$ mal, folglich sind 3 H. in 8 H. $2\frac{2}{3}$ mal enth.; d. h. $\frac{1}{300}$ von 800 = $2\frac{2}{3}$.

d. Reine Tausender durch reine Zehner.

Z. B. Wie oft ist 40 in 7000 enthalten? Antw. 175 mal.

Auflösung. 7000 = 4000 + 3000 = 4000 + 2800 + 200; $\frac{1}{40}$ von 4000 = 100; $\frac{1}{40}$ von 2800 = 70; $\frac{1}{40}$ von 200 = 5; also ist $\frac{1}{40}$ von 7000 = 100 + 70 + 5 = 175.

Oder: 7000 = 700 Z. = 600 Z. + 100 Z.; 40 = 4 Z.; 4 Z. sind in 600 Z. so oft enthalten, als 4 E. in 600 E., d. h.

150 mal; 4 Z. sind in 100 Z. so oft enthalten, als 4 E. in 100 E., d. h. 25 mal; folglich ist 40 in 7000 150 + 25 = 175 mal enthalten.

e. Reine Tausender durch reine Hunderter.

Z. B. Wie oft ist 700 in 9000 enthalten? Antw. $12\frac{6}{7}$ mal.

Auflösung. 9000 = 7000 + 2000 = 700 × 10 + 200 × 10; $\frac{1}{700}$ von 700 × 10 = 1 × 10 = 10; $\frac{1}{700}$ von 200 × 10 = $\frac{2}{7}$ × 10 = $\frac{20}{7}$ = $2\frac{6}{7}$; also ist $\frac{1}{700}$ von 9000 = 10 + $2\frac{6}{7}$ = $12\frac{6}{7}$.

Oder: 9000 = 90 H.; 700 = 7 H.; 7 H. sind in 90 H. so oft enthalten, als 7 E. in 90 E.; 90 = 70 + 20; $\frac{1}{7}$ von 70 = 10; $\frac{1}{7}$ von 20 = $2\frac{6}{7}$; also ist 700 in 9000 = 10 + $2\frac{6}{7}$ = $12\frac{6}{7}$ mal enthalten.

f. Reine Tausender durch reine Tausender.

Z. B. Wie oft ist 5000 in 2000 enthalten? Antw. $\frac{2}{5}$ mal.

Auflösung. 2000 = 2000 × 1; 5000 = 5000 × 1; 5000 × 1 ist in 2000 × 1 so oft enthalten, als 5 × 1 in 2 × 1; 5 × 1 ist in 2 × 1 $\frac{2}{5}$ mal enthalten; also ist auch 5000 in 2000 $\frac{2}{5}$ mal enthalten.

Oder: 2000 = 2 T.; 5000 = 5 T.; 5 T. in 2 T. so oft, wie 5 E. in 2 E.; 5 E. in 2 E. = $\frac{2}{5}$ mal; folglich auch 5 T. in 2 T. = $\frac{2}{5}$ mal.

g. Zehner mit Einern durch reine Zehner.

Z. B. Wie oft ist 10 in 62 enthalten? Antw. $6\frac{1}{5}$ mal.

Auflösung. 62 = 60 + 2; 10 ist in 60 6 mal, 10 in 2 $\frac{2}{10}$ = $\frac{1}{5}$ mal, folglich ist 10 in 62 $6\frac{1}{5}$ mal enthalten.

h. Hunderter mit Zehnern durch reine Zehner.

Z. B. Welches ist $\frac{1}{40}$ von 560? Antw. 14.

Auflösung. 560 = 56 Z.; 40 = 4 Z.; 4 Z. sind in 56 Z. (= 40 Z. + 16 Z.) 10 + 4 = 14 mal enthalten; also ist $\frac{1}{40}$ von 560 = 14.

i. Tausender mit Hundertern durch reine Zehner.

Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{30}$ von 2700? Antw. 90.

Auflösung. 2700 = 270 Z.; 30 = 3 Z.; 3 Z. sind in 270 Z. 90 mal enthalten; folglich ist $\frac{1}{30}$ von 2700 = 90.

k. Hunderter mit Zehnern und Einern durch reine Zehner.

Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{80}$ von 345? Antw. $4\frac{5}{16}$.

Auflösung. 345 = 32 Z. + 25 E.; 80 = 8 Z.; 8 Z. sind in 32 Z. 4 mal enth.; 80 E. in 25 E. $\frac{25}{80}$ = $\frac{5}{16}$ mal enthalten; also ist $\frac{1}{80}$ von 345 = $4\frac{5}{16}$.

l. Hunderter mit Zehnern durch Zehner mit Einern.

Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{25}$ von 370? Antw. $14\frac{4}{5}$.

Auflösung. 370 = 300 + 70; $\frac{1}{25}$ von 300 = 12; $\frac{1}{25}$ von 70 = $2\frac{4}{5}$; folglich ist $\frac{1}{25}$ von 370 = 12 + $2\frac{4}{5}$ = $14\frac{4}{5}$.

m. Hunderter mit Zehnern und Einern durch Zehner und Einer.

Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{35}$ von 388? Antw. $11\frac{3}{35}$.

Auflösung. 388 = 350 + 38; $\frac{1}{35}$ von 350 = 10; $\frac{1}{35}$ von 38 = $1\frac{3}{35}$; also ist $\frac{1}{35}$ von 388 = 10 + $1\frac{3}{35}$ = $11\frac{3}{35}$.

n. Tausender mit Hundertern, Zehnern und Einern durch Zehner und Einer.

Z. B. Wie viel ist $^1/_{54}$ von 2916? Antw. 54.

Auflösung. 2916 = 2160 + 756; $^1/_{54}$ von 2160 = 40; 756 = 540 + 216; $^1/_{54}$ von 540 = 10; $^1/_{54}$ von 216 = 4; also ist $^1/_{54}$ von 2916 = 40 + 10 + 4 = 54.

o. Hunderter mit Zehnern und Einern durch Hunderter mit Zehnern und Einern.

Wie viel ist $^1/_{227}$ von 692? Antw. $3^{11}/_{227}$.

Auflösung. 692 = 681 + 11; $^1/_{227}$ von 681 = 3; $^1/_{227}$ von 11 = $^{11}/_{227}$; also ist $^1/_{227}$ von 692 = $3^{11}/_{227}$.

Anmerkung. Wie weit vorstehende Uebungen auszudehnen sind, hängt von dem Standpunkte der Schüler ab. Man kann es denselben in der Regel ohne Nachtheil erlauben, bei diesen mündlichen Rechenübungen einige Ziffern oder Zeichen aufzuschreiben, wenn die Zahlen groß sind und ihre Zerlegung zusammengesetzt ist. Denn es ist nicht nöthig, daß alle Schüler im Kopfrechnen eine gleiche Fertigkeit erlangen. Je freier und selbstständiger aber ein Schüler arbeitet, desto besser. Geht es daher nicht mit Allen in gleichem Maaße vorwärts, so bildet man Abtheilungen, z. B. Nr. 1 solche, die alles im Kopfe machen; Nr. 2 solche, welche einzelne Resultate mit Ziffern notiren dürfen u. s. w. Also: keine Quälerei! das Kopfrechnen gedeiht nur bei Freudigkeit. Was ist daran gelegen, wenn ein Schüler nur mit den Zahlen von 1 bis 100 fertig operiren kann? — Innerhalb dieses kleinen (leicht zu beherrschenden) Zahlenraumes kommen alle Operationen vor, der formale Gewinn ist ihm also gesichert, und das Leben bringt selten Aufgaben zum Kopfrechnen, die über 100 oder 200 hinausgehen. Wer mit 100 leicht fertig wird, wird es auch mit 200. Darum noch einmal: Man verderbe dem Schüler, dem das Kopfrechnen schwerer wird als andern, darum die Jugend nicht! Dem Leben darf man auch Einiges zutrauen!

§. 59. Aufgaben.

1) Verbindung des Theilens mit dem Zuzählen, Abziehen und Vervielfachen. Beispiele:

1. Zu 24 zählet 12, addiret zu der Summe 3 × 5, ziehet 7 × 3 ab, theilet durch 6; wie viel habt ihr nun? Mehr dergl. Aufgaben mit nicht zu großen Zahlen!
2. Wie viel ist $^1/_9$ × 90 + 360?
3. — — — $^1/_{20}$ × 360 + 9?
4. — — — ($^1/_{24}$ × 504) − 7?
5. — — — $^1/_3$ (von $^1/_5$ × 320) + 120?

Dergleichen Aufgaben schreibt man an die Schultafel; die Schüler rechnen sie still für sich aus und schreiben nur das Resultat mit Ziffern auf ihre Schiefertafeln. Denn wenn die Schüler bis hieher richtig geführt worden sind, so kommen sie durch die Darstellung einiger Zahlen durch Ziffern nicht vom wahren Kopfrechnen ab. — Aufgaben (wie die vorstehenden 2 — 5) eignen sich für einzelne Abtheilungen zur stillen Beschäftigung.

2) 8 Ellen Tuch kosten 96 Rthlr.; was kostet 1 Elle? Antw. $^1/_8$ von 96 Th. = $^{96}/_8$ = 12 Th.

Auflösung. 1 Elle ist der achte Theil von 8 Ellen; also kostet 1 Elle auch den achten Theil der Summe, welche die 8 Ellen

kosten, d. h. den achten Theil von 96 Rthlr.; $^1/_8$ von 96 Rthlr. = 12 Rthlr.; folglich kostet 1 Elle 12 Rthlr.

3) Für 15 Rthlr. kauft man 34 Pfund Baumwolle; wie viel für 1 Rthlr.? Antw. $^1/_{15}$ von 34 Pfund = 2 $^4/_{15}$ Pfund.

4) Ein Fuhrmann legt in 20 Tagen 97 Meilen zurück, wie viel durchschnittlich in einem Tage? Antw. $^1/_{20}$ von 97 Meilen = $4^{17}/_{20}$ Meilen.

5) 24 Schafe kosten 100 Rthlr.; wie viel 1 Schaf? Antw. $4^1/_6$ Rthlr.

6) Wie viel wird täglich ausgegeben, wenn man in 30 Tagen 310 Rthlr. ausgibt? Antw. $10^1/_3$ Rthlr.

7) In 5 Schulen befinden sich 1730 Kinder; wie viel in einer Schule im Durchschnitt? Antw. 346 Kinder.

8) 6 Fleischer kaufen 216 Kühe, jede zu 42 Rthlr.; wie viel Kühe erhält jeder, und was bezahlt jeder? Antw. 36 Kühe und 1512 Rthlr.

9) Ein Kaufmann kauft für 1380 Rthlr. 30 Morgen Land; wie hoch kommt 1 Morgen? Antw. 46 Rthlr.

10) 24 Thlr. 12 Sgr. sollen unter 8 Menschen vertheilt werden; wie viel erhält jeder? Antw. $91^1/_2$ Sgr. = 3 Thlr. $1^1/_2$ Sgr.

11) 369 Krz.; wie viel Gulden? Antw. 6 Gld. 9 Krz.

12) 1000 Krz.; wie viel Gld.? Antw. 16 Gld. 40 Krz. = $16^2/_3$ Gld.

13) 729 Sgr.; wie viel Thlr.? Antw. 24 Thlr. 9 Sgr.

14) 12 Pfd. kosten 13 Gld.; wie viel kostet 1 Pfd.? Antw. 1 Gld. 5 Krz.

15) 18 Pfd. kosten 21 Gld.; wie viel kostet 1 Pfd.?

Auflösung. 1 Pfd. ist $^1/_{18}$ von 18 Pfd.; also kostet 1 Pfd. $^1/_{18}$ von 21 Gld. d. h. von 18 Gld. und 3 Gld.; $^1/_{18}$ von 18 Gld. ist 1 Gld.; $^1/_{18}$ von 3 Gld. oder 3 × 60 Krz. = 180 Krz. sind 10 Krz.; folglich kostet 1 Pfd. = 1 Gld. 10 Krz.

16) 32 Pfd. kosten 100 Thlr. preußisch; wie viel kostet 1 Pfund?

Auflösung. 1 Pfd. ist $^1/_{32}$ von 32 Pfd.; also kostet 1 Pfd. den 32sten Theil von 100 Thlr., d. h. von 96 Thlr. und 4 Thlr. Der 32ste Theil von 96 Thlr. ist 3 Thlr.; der 32ste Theil von 4 Thlr. oder 4 × 30 = 120 Sgr. = 96 Sgr. + 24 Sgr. ist 3 Sgr. und $^{24}/_{32}$ Sgr.; also kostet 1 Pfd. 3 Thlr. $3^{24}/_{32}$ Sgr. = 3 Thlr. $3^3/_4$ Sgr.

17) Wie viel kostet 1 Pfund, wenn 12 Pfd. 4 Thlr. 5 Sgr. kosten?

Auflösung. 4 Thlr. 5 Sgr. = 125 Sgr.; $^1/_{12}$ von 125 Sgr. = 10 Sgr. und $^1/_{12}$ von 5 Sgr.; 5 Sgr. = 5 × 12 = 60 Pf.; $^1/_{12}$ von 60 Pf. = 5 Pf.; also kostet 1 Pfd. 10 Sgr. 5 Pf.

18) Wie viel kosten 3 Pfd., wenn 10 Pfd. 8 Thlr. 25 Sgr. kosten?

Auflösung. 8 Thlr. 25 Sgr. = 8 × 30 + 25 = 240 + 25 = 265 Sgr.; 1 Pfd. ist $^1/_{10}$ von 10 Pfd.; also kostet 1 Pfd. $^1/_{10}$ von 265 Sgr., d. i. $26^1/_2$ Sgr., folglich kosten 3 Pfd. 3 × $26^1/_2$ Sgr. = $79^1/_2$ Sgr. = 2 Thlr. $19^1/_2$ Sgr. = 2 Thlr. 19 Sgr. 6 Pf.

Mehr dergleichen Aufgaben!

II. Schriftlich.

§. 60. Schriftliche Darstellung der Divisionsaufgaben mit einigen Folgerungen.

Das Enthaltensein und das Theilen kann als ein verkürztes Abziehen angesehen werden.

Soll 30 durch 5 getheilt werden, so will man wissen, wie groß der fünfte Theil von 30 ist, und dieses weiß man, wenn man zusieht, wie oft 5 in 30 enthalten ist. Solches aber erfährt man, wenn man zusieht, wie oft sich 5 von 30 abziehen läßt. Es geschehe dieses:

```
30
 5
--
25
 5
--
20
 5
--
15
 5
--
10
 5
--
 5
 5
--
 0
```

Hier hat man nach und nach 5 so oft von 30 abgezogen, bis 0 übrig blieb, nämlich 6 mal. Also hat 30 derjenigen Theile 6, deren 5 einen hat; d. h. 5 ist in 30 6 mal enthalten, oder der fünfte Theil von 30 ist = 6.

Soll daher irgend eine Zahl durch eine andere getheilt werden, so zieht man dieselbe von jener Zahl so oft ab, als es angeht. So oft dies angeht, so viel mal ist die eine Zahl in der andern enthalten, und der so vielste Theil ist jene von dieser. Allein diese Art des Theilens wäre sehr weitläuftig. Man macht daher die Sache kürzer. Wie oben schon angegeben worden ist, setzt man zwischen die zu theilenden Zahlen 2 Punkte (:), den Divisor voran, den Dividenden hintenhin; z. B. 5 : 30. Oder man trennt beide durch einen Strich 5 | 30 — und setzt den Quotienten hinter den Dividenden, zwischen beide einen Strich. Also

5 | 30 | 6; d. h. 5 ist in 30 | 6 mal enthalten.

Also muß sich 5 6 mal von 30 abziehen lassen. Man nimmt daher 5 6 mal, setzt dieses Product unter den Dividenden und zieht ab. Also:

```
5 | 30 | 6          5 | 34 | 6
  | 30 |              | 30 |
  ----                ----
    0                   4
```

Geht die Division auf, so bleibt kein Rest, wie im ersten Beispiele; geht die Division nicht auf, so bleibt ein Rest, wie im 2ten Beispiele.

Aus diesen Beispielen erhellet, wie man bei einer schriftlich auszuführenden Division verfährt.

Wir können aus den angeführten Beispielen noch gleich einige wichtige Sätze ableiten. Da 5 in 30 6 mal enthalten ist ohne Rest, so muß $30 = 6 \times 5$ sein; d. h. der Dividend ist, wenn kein Rest bleibt, gleich dem Producte des Quotienten in den Divisor.

Da 5 in 34 6 mal enthalten ist mit dem Reste 4, so muß 34 $= 6 \times 5 + 4$ sein; d. h. der Dividend ist, wenn ein Rest bleibt, gleich dem Producte des Quotienten in den Divisor sammt dem Reste.

Allgemein: In jedem Falle ist der Dividend gleich dem Producte des Quotienten in den Divisor, oder des Divisors in den Quotienten plus dem Reste.

Da $30 = 6 \times 5$, so ist 30, getheilt durch 5, $= 6$; d. h. der Quotient ist, wenn kein Rest geblieben ist, gleich dem Dividenden, getheilt durch den Divisor.

Da $30 = 6 \times 5$, so ist 30, getheilt durch 6, $= 5$; d. h. der Divisor ist, wenn kein Rest bleibt, gleich dem Dividenden, getheilt durch den Quotienten.

Da $34 = 6 \times 5 + 4$, so ist $34 - 4 = 6 \times 5$; d. h. der Dividend weniger dem Reste (der Unterschied des Dividenden und des Restes) ist gleich dem Producte des Divisors in den Quotienten.

Da $34 - 4 = 6 \times 5$, so ist $(34 - 4)$ getheilt durch $5 = 6$; d. h. der Dividend weniger dem Reste, getheilt durch den Divisor, ist gleich dem Quotienten.

Da $34 - 4 = 6 \times 5$, so ist $(34 - 4)$ getheilt durch $6 = 5$, d. h. der Dividend weniger dem Reste, getheilt durch den Quotienten, ist gleich dem Divisor.

Da $34 = (6 \times 5) + 4$, so ist $34 - (6 \times 5) = 4$; d. h. der Dividend, weniger dem Producte des Divisors in den Quotienten, ist gleich dem Reste.

Zusammenstellung dieser Sätze:

1) Wenn die Division aufgeht, so ist:
   a. der Dividend gleich dem Producte des Divisors in den Quotienten;
   b. der Divisor ist gleich dem Dividenden getheilt durch den Quotienten;
   c. der Quotient ist gleich dem Dividenden getheilt durch den Divisor.
2) Wenn die Division nicht aufgeht, so ist:
   a. der Dividend gleich dem Producte des Divisors in den Quotienten mehr (plus) dem Reste;
   b. der Divisor gleich dem (Dividenden weniger dem Reste) getheilt durch den Quotienten;
   c. der Quotient gleich dem (Dividenden weniger dem Reste) getheilt durch den Divisor;
   d. der Rest gleich dem Dividenden weniger (dem Producte des Divisors in den Quotienten).

Man bringe diese Sätze den Schülern noch durch einige Beispiele zur klarsten Anschauung.

§. 61. Division der Zahlen durch eine einziffrige Zahl.

Erstes Beispiel. Theilet 264 durch 2!

Auflösung. $264 = 200 + 60 + 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{a. } 2 : 200 = 100 \\ \quad 2 : \ \ 60 = \ \ 30 \\ \quad 2 : \ \ \ \ 4 = \ \ \ \ 2 \end{array}\right\} \text{ Einzelne Theile des Quotienten.}$$

2 : 264 = 132; der ganze Quotient.

b. Oder:

```
2 | 264 | 100      100
  | 200 |           30
  -----             2
    64 | 30      -----
    60 |           132
  -----
     4 | 2
     4 |
  -----
     0
```

c. Kürzer:

```
2 | 264 | 132
  | 2:: |
  -----
    6:
    6:
  -----
     4
     4
  -----
     0
```

Erklärung. Die Ausrechnung in a. ist für sich klar.

In b. wurden zuerst die 2 Hunderter durch 2 getheilt, welches einen Hunderter im Quotienten gab; $2 \times 100 = 200$: diese 2 Hunderter wurden von 264 abgezogen; es blieben 6 Zehner 4 Einer übrig. Nun theilten wir die 6 Zehner durch 2; es entstanden dadurch im Quotienten 3 Zehner; 2×3 Z. = 60 E.; wir zogen diese 60 E. von 64 E. ab; es blieben 4 Einer übrig. Nun theilten wir diese 4 E. durch 2; es entstanden dadurch im Quotienten 2 Einer; $2 \times 2 = 4$ E.; wir zogen diese 4 E. von den 4 E. ab; es blieb nichts übrig. Der Quotient war 132.

c. ist bloß eine kürzere Darstellung desselben Verfahrens.

Zweites Beispiel. Theilet 4648 durch 4!

Auflösung. $4648 = 4000 + 600 + 40 + 8$.

Da die 6 Hunderter nicht durch 4 aufgehen, so muß man dieselben so zerlegen, daß die Division aufgeht. Wir zerlegen daher die Zahl 4648 so:

$$4648 = 4000 + 400 + 240 + 8.$$

```
a. 4 : 4000 = 1000
   4 :  400 =  100
   4 :  240 =   60
   4 :    8 =    2
   ================
   4 : 4648 = 1162
```

b. Oder:

```
4 | 4648 |      1000
  | 4000 |       100
  ------          60
     648           2
     400       -----
  ------        1162
     248
     240
  ------
       8
       8
  ------
       0
```

c. Kürzer:

```
4 | 4648 | 1162
  | 4::: |
  ------
     6::
     4::
  ------
     24:
     24:
  ------
       8
       8
  ------
       0
```

Erklärung. a. ist für sich klar. In b. war zu nehmen der vierte Theil von 600; dies gab 100; $4 \times 100 = 400$; Rest = 200; diesen 200 fügten wir die 48 bei; wir hatten nun noch zu theilen 24 Zehner und 8 Einer; $\frac{1}{4}$ von 24 Zehnern = 6 Zehner; $\frac{1}{4}$ von 8 Einern = 2 Einer; Quotient = 1162.

Aus c., wie überhaupt aus dem ganzen Verfahren, entnehmen wir folgende Regeln für die schriftliche Division:

Man dividirt zuerst in die höchste Ziffer des Dividenden, unbekümmert um ihren Stellenwerth, schreibt den Quotienten als höchste Ziffer des gan-

zen Quotienten rechts vom Dividenden hin, bildet das Product aus diesem ersten Theile des Quotienten in den Divisor, setzt es unter die höchste Ziffer des Dividenden und zieht ab. Entweder bleibt ein Rest, oder nicht. In jedem Falle setzt man die zweite Ziffer des Dividenden herunter, neben den Rest, wenn einer blieb. Hierauf dividirt man in diesen Theil des Dividenden, schreibt den Quotienten als den zweiten Theil des Hauptquotienten hin, bildet das Product, setzt es an die rechte Stelle, zieht ab, u. s. w. So wird fortgefahren, bis man alle Ziffern des Dividenden herunter gezogen und nach und nach in alle dividirt hat. Alsdann erhält man den Hauptquotienten. Geht die Division auf, so bleibt kein Rest: wo nicht, so bleibt ein Rest.

Drittes Beispiel. Theilet 27983 durch 8!

```
8 | 27983 | 3497
  | 24::: |
  ----
     39::
     32::
     ----
      78:
      72:
     ----
       63
       56
      ---
        7
```

Zerlegung von 27983. 27983 = 24000 + 3200 + 720 + 56 + 7.

Erläuterung. Hier ist zuerst zu theilen mit 8 Einern in 2 Zehntausender. Allein der 8te Theil von 2 Zehntausendern ist nicht 1 Zehntausender; dazu gehörten 8 Zehntausender. 8 Einer sind daher in 2 Zehntausendern nur Tausendermal (besser: ein oder mehrere Tausendmal) enthalten; man muß deßwegen die 2 Zehntausender als Tausender betrachten und daher die 7 Tausender hinzu nehmen; man dividirt daher zuerst mit 8 in 27 Tausender. Quotient: 3 Tausender. 8 × 3 Tausender = 24 Tausender; abgezogen von 27 Tausendern bleiben 3 Tausender = 30 Hunderter; die 9 Hunderter hinzu, gibt 39 Hunderter; $^1/_8$ von 39 Hundertern ist 4 Hunderter, welche als zweiter Theil des Quotienten hinzugeschrieben werden; 8 × 4 Hunderter = 32 Hunderter; diese von 39 Hundertern abgezogen, bleiben 7 Hunderter = 70 Zehner; die 8 Zehner hinzu, gibt 78 Zehner; $^1/_8$ von 78 Z. = 9 Z., welche den dritten Theil des Quotienten bilden; 8 × 9 Z. = 72 Z.; diese 72 Z. von 78 Z. abgezogen, bleiben 6 Zehner = 60 E.; die 3 Einer hinzu, gibt 63 E.; $^1/_8$ von 63 E. = 7 E., welche den vierten Theil des Quotienten bilden; 8 × 7 E. = 56 E.; 56 E. von 63 E. bleiben 7 E. Der Quotient heißt also 3497 mit dem Reste 7. Daher ist 27983 = 8 × 3497 + 7.

Anmerkung. In vorstehender Auflösung wird das Theilen auf das Enthaltensein oder das Messen mit dem Divisor reducirt; also ist es beim schriftlichen Rechnen, was in der Praxis zum mechanischen (unbewußten) Rechnen wird, am bequemsten. Man mißt die durch die Ziffern des Dividenden (ohne Berücksichtigung ihres Stellenwerthes) ausgedrückten Einheiten durch den Divisor. Dabei muß man oft mehrere Ziffern des Dividenden zusammennehmen, nämlich wenn eine Ziffer des Dividenden kleiner ist als die Ziffer des Divisors. 2 Zehntausender können als Zehntausender nicht durch 8 gemessen oder in 8 gleiche Theile getheilt werden. Dieses ist in der Erläuterung so ausgedrückt: 8 Einer sind in 2 Zehntausendern nur Tausender-mal enthalten. Es ist unverfänglich, sich so auszudrücken. Wer sich daran stößt (und das thut man, wenn der Schüler es nicht auch anders zu sagen weiß), der vermeide diesen Ausdruck. Er erleichtert nur die Regel, daß, wenn die Ziffer des Dividenden kleiner ist als die Ziffer (Ziffern — nämlich ihre Einheiten) des Divisors, man die nächstfolgende (nächstfolgenden) Ziffern hinzunehmen muß. So oder so: nur verständig!

Viertes Beispiel. Theilet 182005 durch 7.

```
7 | 182005 | 26000⁵/₇
  | 14:::: |
   ------
    42:::
    42:::
    -----
     00::        Zerlegung: 182005 = 140000 + 42000
      0::                   + 5.
     ----
      00:
       0:
     ----
       5
```

Kurze Erläuterung. 7 in 1 geht 0 mal. Diese Null wird nicht an die Stelle des Quotienten geschrieben, weil eine Null zur Linken einer Zahl keinen Werth hat. 7 in 18 2 mal; 7 × 2 = 14; 14 von 18 bleibt 4; die 2 herunter; 7 in 42 6 mal; 7 × 6 = 42; 42 abgezogen von 42 bleibt 0; die Null hinzu; 7 in 0 null-mal; 7 × 0 ist 0; 0 von 0 bleibt 0; die andere Null herunter; 7 in 0 null-mal; 7 × 0 = 0, 0 von 0 bleibt 0; die 5 herunter; 7 in 5 geht 0 mal; Rest 5. Nun ist noch der siebente Theil von 5 zu nehmen; der siebente Theil von 1 ist $\frac{1}{7}$; der siebente Theil von 5 ist $\frac{5}{7}$. Der ganze Quotient heißt also $26000\frac{5}{7}$.

Anmerkung. Die Schüler rechnen viele Divisionsexempel mit einem einziffrigen Divisor still für sich, und laut mit Angabe aller Gründe, bis ihnen die Sache zur größten Geläufigkeit geworden ist. (Siehe pract. Rechenbuch I. Abschn. VI. Aufg. 1 bis 16.)

§. 62. Division durch reine Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w.

Erstes Beispiel. Theilet 845 durch 10.

Auflösung. 845 = 800 + 40 + 5.

$$\begin{aligned} 10 : 800 &= 80 \\ 10 : 40 &= 4 \\ 10 : 5 &= \tfrac{5}{10} = \tfrac{1}{2}. \\ \hline 10 : 845 &= 84\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

```
10 | 845 | 84⁵/₁₀
   | 80  |
    ---
     45
     40
    ---
      5
```

Erläuterung. Vergleicht man die Ziffern des Quotienten mit den Ziffern des Dividenden, so findet man, daß die Ziffern des Dividenden, die niedrigste ausgenommen, auch die Ziffern des Quotienten sind, und daß die niedrigste Ziffer des Dividenden den Rest anzeigt. Um daher bei der Division mit 10 gleich den Quotienten zu finden, schneidet man von den Ziffern des Dividenden die niedrigste ab, setzt die übrigen als Ziffern des Quotienten hin, die niedrigste als den Rest, welcher die durch den Divisor noch zu theilende Zahl anzeigt. Durch dieses Verfahren werden die Zehner des Dividenden zu Einern, die Hunderter zu Zehnern, die Tausender zu Hundertern, kurz die ganze Zahl wird durch 10 getheilt.

10 : 7893 | $789\frac{3}{10}$ 10 | 50940 | 5094

Wir sehen sogleich ein, daß es mit den Divisoren 100, 1000, 10000 u. s. w. eine ähnliche Bewandtniß hat. Man schneidet so viele Ziffern von den Ziffern des Dividenden, von der rechten zur linken Hand, ab, als der Divisor Nullen hat, so hat man gleich den Quotienten, dem man noch den Rest nebst darunter geschriebenem Divisor beifügt.

Z. B. 100 : 400 = 4.
100 : 4000 = 40.
100 : 4300 = 43.
100 : 4361 = $43\frac{61}{100}$

100 | 7800 | 78 1000 | 78900 | $78\frac{900}{1000}$ 1000 | 34582 | $34\frac{582}{1000}$.

Zweites Beispiel. Theilet 3840 durch 30!

a. 30 | 3840 | 128
30
84
60
240
240
= = =

b. 30 | 3840 | 128
3
8
6
24
24
= =

Erläuterung. Die Ausrechnung der Aufgabe ist in b. kürzer als in a. Man kann nämlich auch hier gegen die Null des Divisors eine Ziffer im Dividenden abschneiden, und mit der andern Ziffer des Divisors in die übrigen Ziffern des Dividenden theilen, wie gewöhnlich. So verkürzt man die Arbeit.

Z. B. 40 : 84208 = $2105\frac{8}{40}$.

70 : 3456 = $49\frac{26}{70}$
28
65
63
26

80 | 26793 | $334\frac{73}{80}$
24
27
24
39
32
73

Wir sehen sogleich ein, daß sich dieselbe Abkürzung anbringen läßt, wenn der Divisor mehrere Nullen hat mit einer voranstehenden, beliebigen Ziffer. Man schneidet jedesmal so viel Ziffern vom Dividenden, von der rechten zur linken Hand, ab, als der Divisor Nullen hat, und dividirt mit der übrigen Ziffer des Divisors auf die gewöhnliche Weise. Nur muß man in Betreff der Bestimmung des Restes die nöthige Vorsicht anwenden, d. h. auch hier denkend verfahren.

Z. B. a. 700 | 8456 | $12\frac{56}{700}$.
7
14
14
= = 56

b. 500 | 900456 | $1800\frac{456}{500}$.
5
40
40
04
0
456

c. 4000 | 159060 | $39\,^{3060}/_{4000}$.
12
39
36
3060

d. 8000 | 7905432 | $988\,^{1432}/_{8000}$.
72
70
64
65
64
1432

Erläuterung des Beispieles c. 4 Taus. sind in 159 Taus. so oft enthalten, als 4 Einer in 159 Einern. Daher kann man die 4 Taus. und die 159 Taus. als Einer betrachten und so behandeln. Der vierte Theil von 159 ist 39; Rest = 3. Diese 3 sind 3 Tausender; 4 Taus. sind in 3 Tausender nicht einmal enthalten; man muß jetzt die abgeschnittenen Stellen des Dividenden zu den 3 Taus. nehmen, welches 3060 gibt; $^{1}/_{4000}$ von dieser Zahl ist $^{3060}/_{4000}$; der Quotient heißt also $39\,^{3060}/_{4000}$.

§. 63. Division durch zwei- und mehrstellige Zahlen.

Erstes Beispiel. Theilet 256 durch 12!

12 | 256 | $21\,^{4}/_{12}$.
24:
16
12
4

Erläuterung. Aus diesem Beispiele erhellet, daß man, wenn der Divisor 2 Ziffern hat, gleich in 2 Stellen des Dividenden theilen muß; denn 2 Hund. lassen sich als Hunderter nicht in 12 gleiche Theile theilen; sie müssen daher als Zehner betrachtet werden; 2 H. = 20 Z.; 20 Z. + 5 Z. = 25 Z.; man theilt daher zuerst in die 25 Zehner; $^{1}/_{12}$ von 25 Z. = 2 Z. u. s. w.

Zweites Beispiel. Theilet 64638 durch 39!

Erläuterung. 64638 = 64000 + 600 + 30 + 8. Wenn man hier nur die erste Ziffer des Divisors mit der ersten Ziffer des Dividenden vergleicht, so möchte man verleitet werden, 2 als ersten Theil des Quotienten anzunehmen. Denn da 3 in 6 2 mal enthalten ist, so wäre also 2 der erste Theil des Quotienten. Setzen wir diesen wirklich an, so erhalten wir (39 | 64638 | 2)
78

78 von 64 abzuziehen, welches nicht angeht. Es kam dieses daher, daß die zweite Ziffer des Divisors 9 ist, welches mit 2 vervielfacht 18 gibt. Der 39ste Theil von 64000 ist daher nicht 2, sondern nur 1 Tausender. Die Rechnung sieht nun so aus:

39 | 64638 | 1
39
256

Theilt man jetzt wieder mit 3 in 25, um den zweiten Theil des Quotienten zu finden, so erhält man 8. Allein $8 \times 39 = 312$; also sind dann 312 abzuziehen. Dieses ist wieder zu viel; wir nehmen daher nur 7 als zweiten Theil des Quotienten.

```
39 | 64638 | 17
   | 39:   |
   ------
     256
     273
```

Wir sollen nun 273 abziehen; auch diese Zahl ist noch zu groß; also ist der 39ste Theil von 256 Hund. auch nicht 7 Hund., sondern nur 6 Hunderter.

```
39 | 64638 | 1657 15/39
   | 39::: |
   -------
     256::
     234::
     -----
      223:
      195:
      ----
       288
       273
       ---
        15
```

Da 3 in 22 7 mal enthalten ist, so wäre man leicht versucht worden, 7 als 3ten Theil des Quotienten hinzusetzen; allein 7 ist zu groß; auch 6; der 39ste Theil von 223 Zehnern ist nur 5 Zehner. Als letzter Theil des Quotienten darf nicht 9 und nicht 8, sondern nur 7 angenommen werden.

Wir ziehen aus diesem Beispiele folgende Regel. Wenn man mit einer mehrzifferigen Zahl zu theilen hat, so sieht man zunächst zu, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten oder in den beiden ersten Ziffern des Dividenden enthalten ist; diesen Quotienten nimmt man als ersten Theil des Quotienten an. Leicht kann es alsdann geschehen, daß dieser Quotient zu groß genommen worden ist, wenn nämlich das Product dieses Quotienten in den Divisor größer ist als der Theil des Dividenden, von welchem abgezogen werden soll. Es ist dieses ein Zeichen, daß man den Quotienten zu groß angenommen hat. In diesem Falle vermindert man ihn um 1, und sieht zu, ob derselbe nun nicht mehr zu groß ist; sonst muß er abermals um 1 vermindert werden, bis sich das Product dieses Quotienten in die betreffenden Ziffern des Divisors von der Zahl des Dividenden, in welche getheilt worden ist, abziehen läßt.

Ist der Quotient zu groß angenommen; so sagt man gewöhnlich, man habe zu viel genommen. Am leichtesten wird man dazu verleitet, wenn die erste Ziffer des Divisors kleiner ist als die folgende.

Noch einige Beispiele.

```
184 | 65432 | 355 112/184        298 | 814207 | 2732 71/298
    | 552:: |                        | 596::: |
    -------                          --------
     1023:                             2182::
      920:                             2086::
     -----                             ------
     1032                               960:
      920                               894:
     ----                               ----
      112                                667
                                         596
                                         ---
                                          71
```

Sobald man irgend ein Product von dem betreffenden Theile des Dividenden abgezogen hat; so wird man von selbst inne, ob man den Quotienten nicht vielleicht zu klein genommen hat. Ist nämlich der Rest bei dem Abzuge gleich oder größer als der Divisor, so ist ja der Divisor in diesem Reste wenigstens noch einmal enthalten; der Quotient muß daher um 1 vermehrt werden.

Beispiel. 81 | 165 | 1
81
84

Hätte man bei der Division von 81 in 165 vermuthet, daß 81 in 165 nur einmal enthalten sein möchte, so blieb zum Reste 84. 84 ist aber größer als 81, also ist 81 in 84 noch 1 mal, also 81 in 165 2 mal enthalten.

Nützlich ist es auch häufig, von Anfang zu bestimmen, wie viel Stellen der Quotient enthalten wird. Es ist dies ganz leicht. Zuerst sieht man zu, wie viel Ziffern des Dividenden genommen werden müssen, um die erste Stelle des Quotienten zu erhalten. So viel Ziffern alsdann vom Dividenden noch übrig sind, so viele Stellen erhält der Quotient auch noch zu der einen, welche er bereits hat. Z. B.

29 : 24567. Hier müssen die drei ersten Ziffern des Quotienten (245) genommen werden, um den ersten Theil des Quotienten zu erhalten. Nun bleiben noch im Dividenden 2 Ziffern übrig; der Quotient erhält daher 1 + 2 = 3 Stellen.

345 : 156789 gibt 3 Stellen im Quotienten.
39 : 780045 — 5 — — —
8471 : 79245184 — 4 — — — u. s. w.

§. 64. Fortsetzung des Vorigen.

In den bisherigen Bemerkungen ist das Wesentlichste von dem enthalten, was man bei der schriftlichen Division zu beobachten hat. Es kommt nun darauf an, daß die Schüler durch häufige Uebung Gewandtheit im Dividiren erhalten. Zuerst läßt man sie von jeder Operation die Gründe nennen, und man führt sie nicht eher weiter, bis sie vollkommene Einsicht in die Sache erlangt haben. Dieses geht langsam. Daher muß man bei der Division lange verweilen, und namentlich eine Anzahl Aufgaben auf mehrfache Weise berechnen lassen, in kürzerer oder weitläuftigerer Manier. Späterhin muß den Schülern das Dividiren so geläufig werden, daß sie es gewissermaßen ganz mechanisch, nämlich ohne Anstrengung der Aufmerksamkeit, verrichten können. Aber sie müssen es zuerst rationell, nicht mechanisch erlernen. Die mechanische Fertigkeit entsteht durch fortgesetzte Uebung von selbst. Unzählige Mal habe ich die Behauptung gehört und widerlegt, daß das rationelle Dividiren zu viel Zeit koste, zu schwer sei und dgl. mehr. Aber es ist nicht wahr. Gut geleitete Schüler sträuben sich gegen das todte mechanische Verfahren. So ist es recht. Solche Widerspenstigkeit (eine geistige, durch naturgemäße Entwickelung entstandene!) ist ein Triumph für den Lehrer!

Wir wollen hier noch einige größere Beispiele auf mehrfache Weise ausführen.

Erstes Beispiel. 5893 : 5842714.

a. 5842714 = 5 Mill. + 8 Hunderttaus. + 4 Zehntaus. + 2 Taus. + 7 H. + 1 Z. + 4 E.

Wollten wir diese Theile des Dividenden einzeln durch 5893 theilen, so wäre mit den 5 Millionern anzufangen. Aber die 5 Mill. können, so lange sie als Millioner betrachtet werden, nicht durch 5893, sondern nur durch 5 getheilt werden. Man muß daher die 5 Mill. als Hunderttausender betrachten; 5 Mill. = 50 Hundertt.; 50 + 8 = 58

Hunderttausender. Aber auch diese lassen sich als Hunderttausender nicht durch den Divisor theilen; wir betrachten sie daher als Zehntausender; 58 Hundertt. = 580 Zehntaus.; 580 Zehnt. + 4 Zehnt. = 584 Zehnt. Aber auch diese können als Zehntausender nicht durch 5893 getheilt werden. Wir verwandeln sie daher in Tausender; 584 Zehnt. × 10 = 5840 Tausender; dazu die 2 Taus.; dieses giebt 5842 Tausender. Aber auch diese lassen sich als Tausender noch nicht durch 5893 theilen. Man verwandle sie daher in Hunderter. 5842 Taus. = 5842 × 10 H. = 58420 H.; 58420 + 7 = 58427 H. Diese endlich lassen sich durch 5893 theilen, oder in 5893 gleiche Theile theilen.

5893 : 58427 H. = 9 Hund.
53037
―――――
5390

Diese 5390 H. müssen in Zehner verwandelt werden; 5390 H. = 5390 × 10 = 53900 Z.; dazu den einen Zehner des Dividenden, gibt 53901 Zehner.

5893 : 53901 Zehn. = 9 Zehner.
53037
―――――
864

Diese 864 Zehner verwandeln wir, um die Theilung weiter fortzusetzen, in Einer; 864 Zehner = 864 × 10 = 8640 Einer; dazu die 4 Einer des Dividenden, gibt 8644 Einer.

5893 : 8644 Einer = 1 Einer
5893
―――――
2751

Endlich der 5893ste Theil von 2751 ist $\frac{2751}{5893}$.

Der Quotient von 5893 in 5842714 ist also 9 H. + 9 Z. + 1 E. = 991, mit dem Reste 2751.

b. Kürzere Darstellung.

```
5893 | 5842714 | 991 2751/5893
     | 53037:: |
       ―――――
        53901:
        53037:
       ―――――
          8644
          5893
         ―――――
          2751
```

Erläuterung dieser kürzeren Darstellung.

Um mit 5893 theilen zu können, macht man die 5 Millioner zu Hunderttausender; 5 Mill. = 50 Hunderttaus.; dazu die 8 Hunderttaus. gibt 58 Hunderttaus.; 58 Hunderttaus. zu Zehntausendern gibt 580 Zehntaus.; dazu die 4 Zehntaus. gibt 584 Zehntaus.; 584 Zehntaus. zu Tausendern gibt 5840 Taus.; dazu die 2 Taus. gibt 5842 Tausender; diese zu Hundertern gibt 58420 Hunderter; dazu die 7 Hunderter gibt 58427 Hunderter. Diese 58427 Hunderter sind durch 5893 theilbar. Der Quotient wird daher Hunderter, Zehner und Einer enthalten. Nun sucht man den muthmaßlichen Quotienten, welcher mit dem Di-

visor multiplicirt, ein vom Dividenden abziehbares Product gibt. Es ist dies der Quotient 9. Es bleibt der Rest 5390; dazu nimmt man die folgende Stelle des Dividenden, welches 53901 gibt. Nun sieht man zu, wie oft 5893 in 53901 enthalten ist. Antwort: 9 mal. Es bleibt der Rest 864. Dazu nimmt man die folgende Stelle des Dividenden, welches 8644 gibt Von dieser Zahl nimmt man den 5893sten Theil. Dieser ist 1. Es bleibt der Rest 2751. Nun ist keine Ziffer im Dividenden mehr übrig. Der vollständige Quotient heißt daher $991^{2751}/_{5893}$.

Zweites Beispiel.

```
7432 | 106781532 | 14367 5988/7432
     | 7432      |
     | 32461
     | 29728
     |  27335
     |  22296
     |   50393
     |   44592
     |    58012
     |    52024
     |     5988
```

(Siehe pract. Rechenbuch I. Abschn. VI. Aufg. 17 u. s. w.)

§. 65. Abkürzungen.

1) Wenn nicht mit sehr großem Divisor zu theilen ist, so pflegen geübte Rechner das Product des jedesmaligen Quotienten in den Divisor nicht unter den Dividenden zu schreiben, sondern dasselbe im Kopfe abzuziehen. Den Rest schreiben sie entweder hin, oder behalten ihn im Sinne. Wenn der Divisor eine einstellige Zahl ist, so geht dies am besten. Diejenigen Ziffern des Dividenden, in welche getheilt ist, pflegt man durchzustreichen.

```
Z. B. 3 | 224565 | 74855
        | 1211   |
```

Oder ohne das Hinschreiben der Reste:

```
3 | 224565 | 74855
```

Erläuterung. 3 in 22 7 mal, Rest 1
3 in 14 4 — — 2
3 in 25 8 — — 1
3 in 16 5 — — 1
3 in 15 5 — — 0.
Quotient = 74855.

2) Die Hälfte von 36 ist 18, und der dritte Theil von 18 ist 6. Und 6 ist der sechste Theil von 36. Ob ich daher von 36 zuerst die Hälfte, dann den dritten Theil, oder gleich den sechsten Theil nehme, ist eins und dasselbe. Soll daher 36 durch 6 getheilt werden, so kann ich 6 in die Factoren 2×3 zerlegen, und zuerst durch den einen, den herauskommenden Quotienten alsdann durch den andern Factor dividiren.

Beispiel 1. Es soll 9396 durch 12 getheilt werden. $12 = 4 \times 3 = 2 \times 6$; also kann ich nach einander durch die Factoren 4 und 3, oder 2 und 6 theilen. Alsdann habe ich den 12ten Theil von 9396 gewonnen.

4	9396 113	2349		2	9396 111	4698
3	2349 2	783		6	4698 41	783

Beispiel 2. Es soll 18768 durch 24 getheilt werden.

$24 = 2 \times 3 \times 4$.

2	18768	9384
3	9384	3128
4	3128 3	782

Kürzer: 2 | 18768
3 | 9384
4 | 3128
782

Dieses Zerfällen des Divisors in seine Factoren u. s. w. läßt sich jedoch nur da mit Vortheil anwenden, wo die Division mit den ersten Factoren keinen Rest läßt.

Anmerkung. Die sonst noch gebräuchlichen Abkürzungen sind theils nicht häufig anwendbar, theils nur in der Hand-sehr geübter Rechner von einigem Werthe. Wir müssen sie daher übergehen.

§. 66. Die Probe der Multiplications- und Divisions-Aufgaben.

1) Der Multiplications-Aufgaben.

Ist eine Zahl mit einer andern multiplicirt, d. h. so viel mal genommen worden, als diese andre Einer hat, so muß die ursprüngliche Zahl wieder entstehen, wenn man das Product durch den Multiplicator theilt. Nehme ich z. B. irgend eine Zahl 3 mal, theile das erschienene Product wieder durch 3, so erscheint die ursprüngliche Zahl wieder. Da es nun gleichgültig ist, welchen der beiden Factoren man als Multiplicand, welchen als Multiplicator ansieht, so muß jedesmal, wenn man das gebildete Product durch den einen Factor dividirt, der andere Factor als Quotient erscheinen:

Beispiele. a. 24 × 3 = 72

Probe: 3 | 72 | 24

Oder: 24 | 72 | 3

b. 678 × 5 = 3390

5 | 3390 | 678

c. 72 × 69:

```
   72
   69
  ---
  648
 432
 ----
 4968
```

Probe: 72 | 4968 | 69
          | 432 |

            648
            648

            = = =

Oder: 69 | 4968 | 72
         | 483 |

           138
           138

Erscheint bei dieser Probe der andere Factor nicht als Quotient, so ist die Rechnung nicht richtig. In diesem Falle weiß man jedoch noch nicht, wo der Fehler steckt, ob in der ursprünglichen Rechnung oder in der Probe selbst. Die Sache bedarf alsdann noch einer näheren Untersuchung. — Die Probe der Multiplications-Aufgaben wird also durch die Division, durch die der Multiplication entgegengesetzte Operation, vollführt.

2) Der Divisions-Aufgaben.

Wenn 4 in 12 3 mal enthalten ist, so muß $3 \times 4 = 12$ sein; oder wenn 4 der 3te Theil von 12 ist, so muß diese 4 3 mal genommen 12 geben. Und wenn 4 in 14 3 mal enthalten ist mit dem Reste 2, so muß $3 \times 4 + 2 = 14$ sein, wie dies auch früher schon nachgewiesen worden ist. Multiplicirt man daher nach einer vollendeten Division den Divisor mit dem Quotienten und füget den Rest hinzu (wenn keiner geblieben ist, so fügt man, wie sich von selbst versteht, nichts hinzu); so erhält man den Dividenden, wenn richtig dividirt worden ist. Hierin liegt also die Probe bei den Divisions-Aufgaben.

Beispiele. 4 | 8964 | 2241
              | | 4

                      8964

12 | 6432 | 536
   | 47 | 12

           1072
           536

           6432

Erscheint durch dieses Verfahren der ursprüngliche Dividend nicht wieder, so steckt in der Rechnung ein Fehler. Alsdann muß untersucht werden, ob er in der Division oder in der zur Probe dienenden Multiplication steckt. Die Probe der Divisions-Aufgaben wird also durch die Multiplication, durch die der Division entgegengesetzte Operation, vollführt.

Wir können nun über die Proben bei den bisher behandelten vier Rechnungsarten folgende Sätze neben einander stellen:

Die Probe der Addition geschieht durch die Subtraction;
— — — Subtraction — — — Addition;
— — — Multiplication — — Division;
— — — Division — — — Multiplication.

Folglich wird die Probe über die Operation immer durch das entgegengesetzte Verfahren gemacht. Man sucht durch das entgegengesetzte Verfahren die ursprüngliche Zahl wieder darzustellen. Gelingt dies, so ist die Rechnung richtig; wo nicht, so steckt in derselben ein Fehler.

§. 67. Noch einige vollständig berechnete Multiplications- und Divisions-Aufgaben nebst den Proben.

```
1)       2045
          631
       ------
         2045
        6135
       12270
631 | 1290395 | 2045
    | 1262    |
      ----
        2839
        2524
        ----
         3155
         3155
         ----
         ====
```

```
2) 746 : 3218954 = 4314
         2984        746
         ----      -------
          2349      25884
          2238     17256
          ----    30198
           1115   -------
            746   3218244
           ----       710
           3694   -------
           2984   3218954
           ----
            710
```

```
3) 39 : 4582 = 114
        39       39
        --      ----
         58     1026
         39     342
         --      36
         192    ----
         156    4482
         ---
          36
```

Da in dem dritten Beispiele durch die angestellte Probe der Dividend 4582 nicht herauskommt, so steckt irgendwo in der Rechnung ein Fehler.

Man lasse mehrere solcher Aufgaben rechnen und die Probe beifügen.

§. 68. Aufgaben.

1) Verbindung des Theilens mit den übrigen Rechnungsarten.

Beispiele:

a. Wie viel ist (7842 + 709) × 892, getheilt durch 79? Antw. 96550, Rest 42.

b. (10739 — 4904) × 30908 + (84 × 309) getheilt durch 102 = ? Antw. 3252955, Rest 30.

c. (8905 × 749) + (7801 × 34007) — (790412 — 24821) getheilt durch 8904700 = ? Antw. 30, Rest 4051861.

d. Zähle 400945, 87123, 4099217 und 400900 zusammen; multiplicire die Summe mit 800972, ziehe von dem Producte 8457 × 70004 ab, und theile den Rest durch 4080! Wie groß ist der Quotient? Antw. 979180931, Rest 3512.

e. 5098768 getheilt durch 8, vom Quotienten $^2/_3$ mal 87654 abgezogen, ist wie viel mal 364? Antw. 1590 mal, Rest 150.

f. Wie viel ist (79324 + 84009873 + 54907) × 39048 — (79875 × 790028), getheilt durch 79418? Antw. 33426228, Rest 61188.

2) Practische Aufgaben.

a. 100000 Rthlr. sollen unter 12 Personen vertheilt werden; wie viel erhält jede? Antw. 8333 + $^4/_{12}$ Rthlr.

b. 7 Kinder erhalten eine Erbschaft von 7963 Rthlr.; wie groß ist der Antheil eines jeden Kindes? Antw. 1137 + $^{4}/_{7}$ Rthlr.
c. 282 Morgen Landes kosten 48329 Rthlr.; wie viel kostet 1 Morgen? Antw. 171 + $^{107}/_{282}$ Rthlr.
d. Eine Stadt von 8994 Einwohnern zahlt 43807 Rthlr. Abgaben; wie viel macht dies auf den Kopf? Antw. 4 + $^{7831}/_{8994}$ Rthlr.

Diese und ähnliche Aufgaben werden auf dieselbe Art durch Division ausgerechnet. Welche Zahl getheilt, und durch welche getheilt werden muß, findet man durch kurze Betrachtung. Derselben liegen die Sätze zu Grunde:

Halbe Waare, halbes Geld;
Dritter Theil der Waare, dritter Theil des Geldes;
Der so vielste Theil der Waare, der so vielste Theil des Geldes.

Statt Waare und Geld kann man auch andre, in solchen Verhältnissen stehende Größen setzen. Z. B. 7 Kinder erhalten eine Erbschaft von 7963 Rthlr.; 1 Kind ist der 7te Theil von 7 Kindern; also erhält auch ein Kind den 7ten Theil desjenigen Geldes, welches die 7 Kinder erhalten, d. h. den 7ten Theil von 7963. Um also den Antheil jedes Kindes zu finden, hat man den 7ten Theil von 7963 zu nehmen. Der Quotient nennt den Antheil jedes Kindes.

Wenn in 15 Reihen 1350 Bäume stehen, so steht in jeder Reihe (im Durchschnitt) der 15te Theil von 1350 Bäumen; denn 1 Reihe ist der 15te Theil von 15 Reihen. Um daher die Anzahl der Bäume in jeder Reihe zu finden, hat man den 15ten Theil von 1350 Bäumen zu nehmen, d. h. mit 15 in 1350 zu dividiren. — In 2 Reihen würden stehen 2 mal der 15te Theil, in 3 Reihen 3 mal der 15te Theil u. s. w.

(Siehe pract. Rechenbuch I. Abschn. IV. Aufg. 52—70.)

Sechste Stufe.

Verwandlung der Größen einer Art in Größen einer andern Art.

§. 69. **Begriff von gleichartigen und ungleichartigen, über- und untergeordneten, höheren und niederen, reinen und angewandten, gleich- und ungleichbenannten (gleich- und ungleichnamigen) Zahlen und Größen.**

Wenn 2 Dinge zu einer und derselben Art von Dingen gehören, so sind es Dinge gleicher Art, und man nennt sie *gleichartige* Dinge. Gehören aber 2 oder mehrere Dinge nicht zu derselben Art, so sind es Dinge ungleicher Art, und man nennt sie *ungleichartige* Dinge. Gleichartige Dinge sind z. B. Münzen: Silbergroschen und Silbergroschen, Gulden und Gulden, Thaler und Thaler; Pfunde und Pfunde; auch Thaler und Silbergroschen, denn beide sind Münzen; Pfunde und Loth, denn beide sind Gewichte; Längen-

fuß und Längenzoll, denn beide sind Längenmaße; Quadratruthen und Quadratfuß als Flächengrößen. Ungleichartige Dinge sind z. B. Münzen und Gewichte; Thaler und Pfunde, Flächenmaße und Längenmaße, Geldsorten und Zeiten; auch Thaler und Silbergroschen als solche, wenn man sie nicht auf eine gemeinschaftliche Einheit reducirt.

Alle Dinge gleicher Art sind einem und demselben Begriffe untergeordnet, und dieser Begriff ist den gleichartigen Dingen übergeordnet. Die gleichartigen Dinge sind gleichartig eben in Bezug auf diesen, ihnen gemeinschaftlich übergeordneten Begriff. Den Begriffen Groschen und Thaler ist der Begriff Münze; den Begriffen Pfund, Centner, Loth ist der Begriff Gewicht; den Begriffen Fuß, Zoll, Linie ist der Begriff Längenmaß; den Begriffen Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minute ist der Begriff Zeit übergeordnet. Der höhere Begriff hat einen weitern Umfang und ist von allgemeinerer Bedeutung als der niedere; von den beiden Begriffen Gewicht und Centner ist der erste der höhere, allgemeinere, umfassendere, der zweite der speciellere, engere. Wenn nun zwei Gegenstände nicht demselben Begriffe untergeordnet gedacht werden können, so sind es ungleichartige Gegenstände oder Größen. Da aber alle Gegenstände (Größen) wenigstens Dinge, Wesen oder Vorstellungen sind; da folglich alle Gegenstände (Größen) diesen allgemeinsten Vorstellungen untergeordnet gedacht werden können: so sind alle Gegenstände (Größen) in Beziehung auf die Vorstellungen, Wesen, Dinge u. s. w. gleichartig. Aber in diesem allgemeinen Sinne werden die Größen in der Rechenkunst (in der Regel) nicht betrachtet.

Von den beiden Größen 4 und 4 Pfunde ist die erste eine reine, die zweite eine angewandte, oder die erste eine unbenannte, die zweite eine benannte Zahl. Ist nämlich nicht bestimmt, zu welcher Art von Größen eine Zahl gehört, sondern bloß die Anzahl der Einheiten angegeben, z. B. $3 = 3 \times 1$, $10 = 10 \times 1$; so nennt man solche Zahlen reine oder unbenannte Zahlen; ist aber zugleich angegeben, welche Art von Größen, ob Münzen, Gewichte, Maße u. s. w. gemeint ist; so heißen solche Zahlen angewandte oder benannte Zahlen; z. B. 3 Sgr., 4 Ochsen, 5 Schoppen u. s. w.

Die benannten Größen sind nun entweder gleich- oder ungleichbenannt, gleich- oder ungleichnamig. 4 Thlr. und 3 Sgr. sind ungleichbenannte Größen; deßgleichen 7 Ctr., 32 ℔, 9 Loth; 4 Anker, 3 Maß u. s. w. 7 Ctr. und 3 Ctr., 8 Eimer und 4 Eimer sind gleichbenannte oder gleichnamige Größen. Jedoch können, wie diese Beispiele lehren, ungleichnamige Größen gleichartige sein, wie z. B. 4 Thlr. und 3 Sgr. als Münzen, 7 Ctr., 32 ℔, 9 Loth als Gewichte. Gleichartige Größen sind daher entweder zugleich gleichnamig oder ungleichnamig; ungleichartige Größen sind stets auch ungleichnamig.

Sehr oft tritt im praktischen Leben der Fall ein, daß höhere Sorten in niedere, z. B. Thaler in Sgr., oder niedere in höhere, z. B. Sgr. in Thaler verwandelt, daß ungleichnamige gleichnamig,

gemacht werden sollen; z. B. 4 Thlr. 15 Sgr. — wie viel Sgr.? Die beiden Fälle, welche hier statt finden können, sind: 1) höhere Sorten werden in niedere verwandelt. Diese Operation nennt man das Auflösen höherer Sorten in niedere, oder die Resolution; 2) niedere Sorten werden in höhere verwandelt. Diese Operation heißt die Zurückführung oder die Reduction. Wir werden diese beiden Operationen nun vornehmen.

Erste Uebung.

Verwandlung oder Auflösung höherer Sorten in niedere.

Resolution in benannten ganzen Zahlen.

I. Mündlich.

§. 70. Das Verfahren mit der Auflösungs- oder Resolutionszahl.

Jede höhere Sorte enthält eine gewisse bestimmte Menge einer niederen Sorte, der Thaler enthält eine gewisse Anzahl Sgr., nämlich 30, der Ctr. eine gewisse Anzahl Pfund, nämlich 110. Diejenige Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten einer niederen Sorte oder Ordnung eine Einheit einer höheren Sorte oder Ordnung ausmachen, nennt man allgemein die Resolutionszahl, bei Münzen auch die Währungszahl. Bei der Verwandlung der Sgr. in Pf. ist 12, bei der Resolution der Gulden in Kreuzer ist 60 die Resolutions- oder Währungszahl. Natürlich muß man, bevor man im Stande ist, Verwandlungen der verschiedenen Sorten in einander zu machen, diese Resolutionszahlen kennen. Man findet die gebräuchlichsten in dem ersten Theile des praktischen Rechenbuches am Ende angegeben. Das Verfahren selbst erhellet nun gleich durch einige Beispiele, deren übrigens auch schon mehrere vorgekommen sind.

Beispiel 1. 8 Thlr., wie viel Sgr.?

Auflösung. 1 Thlr. = 30 Sgr.; 8 Thlr. also 8 × 30 Sgr. = 240 Sgr.

Beispiel 2. 3 Ctr. 24 ℔, wie viel ℔?

Auflösung. 1 Ctr. = 110 ℔; 3 Ctr. = 3 × 110 ℔ = 330 ℔; 330 ℔ + 24 ℔ = 354 ℔.

Beispiel 3. 4 Thlr. pr. C., wie viel Pfennige?

Auflösung 1. 1 Thlr. = 30 Sgr.; 4 Thlr. = 4 × 30 = 120 Sgr.; 1 Sgr. = 12 Pf.; 120 Sgr. = 120 × 12 Pf. = 120 × 10 + 120 × 2 = 1200 + 240 = 1440 Pf.

Auflösung 2. 1 Thlr. = 30 Sgr.; 1 Sgr. = 12 Pf.; also 1 Thlr. = 30 × 12 = 360 Pf.; 4 Thlr. = 4 × 360 Pf. = 1440 Pf.

Beispiel 4. 6 ℔, 2 Quentchen, wie viel Quentchen?

Auflösung. 1 ℔ = 32 Loth; 6 ℔ = 6 × 32 L. = 6 × 3 + 6 × 2 = 180 + 12 = 192 L.; 1 Loth = 4 Quentcher 192 L = 192 × 4 Q. = 200 × 4 — 8 × 4 = 800 — 3 = 768 Q.; 768 Q. + 2 Q. = 770 Quentchen; also sind ℔ 2 Q. = 770 Quentchen.

Aus der Auflösung dieser Beispiele entnehmen wir folgen Regeln:

a. Ist eine höhere Sorte allein gegeben, welche in die zunäch niedere verwandelt werden soll, so multiplicirt man die Ei heiten der höheren Sorte mit der Resolutionszahl.

4 Thlr., wie viel Sgr.? Antw. 4 × 30 Sgr.

b. Ist nebst der höheren Sorte, welche in die zunächst niede verwandelt werden soll, noch eine Anzahl der niederen Sor gegeben, so multiplicirt man wieder die Einheiten der höhere Sorte mit der Resolutionszahl, und addirt zu diesem Produc die Anzahl der niederen Sorte.

2 ℔ 5 Loth, wie viel Loth? Antw. (2 × 32 + 5) Loth.

c. Soll eine höhere Sorte nicht in die zunächst niedere, sonder in eine entfernte niedere verwandelt werden, so verwande man die höhere Sorte zuerst in die nächst niedere, und dan die Anzahl dieser nächstniederen in die folgende niedere u. s. w bis zur verlangten niederen Sorte.

3 Thlr., wie viel Pfennige? Antw. 3 Thlr. = 3 × 30 Sg = 90 Sgr.; 90 Sgr. = 90 × 12 Pf. = 1080 Pf.; also sin 3 Thlr. = 1080 Pf.

Weiß man, wie viel Einheiten der entfernten niederen Sor zu einer Einheit der entfernten höheren gehören, so kann ma die Resolution auch unmittelbar machen. Z. B. 1 Thlr. = 36 Pf.; also 3 Thlr. = 3 × 360 Pf. = 1080 Pf.

d. Sind nebst der höheren Sorte, welche in eine entfernte nieder verwandelt werden soll, auch noch niedere Sorten gegeben, s werden diese zu den gefundenen gleichnamigen addirt.

2 Ctr. 7 Pfd., wie viel Loth? Antw. 2 Ctr. = 2 × 110 = 220 Pfd. 220 Pfd. + 7 Pfd. = 227 Pfd.; 227 Pfd. = 227 × 32 Lot

5 Ctr. 3 Pfd. 18 Loth, wie viel Quentchen? Antw. 5 Ctr. = × 110 Pfd. = 550 Pfd.; 550 Pfd. + 3 Pfd. = 553 Pfd. 553 Pfd. = 553 × 32 Loth; 553 × 32 + 18 Loth = (55 × 32 + 18) × 4 Quentchen?

Anmerkung. Die Schüler werden durch viele Aufgaben in der Resoluti geübt; Anfangs mit kleineren, dann mit größeren Zahlen. Damit sie dar die gehörige Fertigkeit erlangen, so läßt man sie die gebräuchlichsten Mün zen, Gewichte und Maße in Reihenfolgen auflösen.

Z. B.:	1 Thlr. = 30 Sgr.		1 ℔ = 32 L.
	2 — = 2 × 30 = 60 Sgr.		2 ℔ = 2 × 32 = 64
	3 — = 3 × 30 = 90 —		3 ℔ = 3 × 32 = 96
	4 — = 4 × 30 = 120 —		4 ℔ = 4 × 32 = 128
	u. s. w.		u. s. w.

1 Gl. = 60 Krz.	1 Längenfuß = 12 Längenzoll
2 — = 2 × 60 = 120 Krz.	2 — = 2 × 12 = 24 —
3 — = 3 × 60 = 180 —	3 — = 3 × 12 = 36 =
4 — = 4 × 60 = 240 — u. s. w.	u. s. w.

§. 71. **II. Schriftlich.**

Das schriftliche Verfahren bei Resolutionen ist dem mündlichen ganz gleich, nur daß die Ziffern hingeschrieben werden und die Multiplication schriftlich vollführt wird.

Beispiel 1. 824 Thlr., wie viel Sgr.?

Ansatz: 824
30
―――
24720 Sgr.

Beisp. 2. 39 Thlr. 15 Sg. 3 Pf., wie viel Pfennige?

Ansatz: 39
× 30
―――
1170
+ 15
―――
1185 Sgr.
× 12
―――
2370
1185
―――
14220
+ 3
―――
14223 Pf.

Beisp. 3. 504 ℔ 7 Quentchen, wie viel Quentchen?

Ansatz: 504
× 32
―――
1008
1512
―――
16128 Loth.
× 4
―――
64512
+ 7
―――
64519 Quentchen.

Regel: Man schreibt zunächst die Zahl der höheren Sorte als Multiplicand hin, die Resolutionszahl als Multiplicator unter denselben; nun multiplicirt man diese mit jener; ist eine Anzahl der nun gefundenen nächst niederen Sorte vorhanden, so wird dieselbe hinzu addirt; unter diese Summe schreibt man die folgende Resolutionszahl und verfährt wie vorher bis zu den gesuchten Einheiten der niederen Sorte.

(Siehe pract. Rechenbuch I. Abschn. VII.)

Zweite Uebung.

Zurückführung niederer Sorten auf höhere.

Reduction in benannten ganzen Zahlen.

I. Mündlich.

§. 72. Das Verfahren mit der Reductionszahl.

Soll eine Menge einer niederen Sorte in eine höhere Sorte verwandelt, oder sollen kleinere Sorten auf größere zurückgeführt werden; so muß man wissen, wie viel Einheiten der niederen Sorte

auf eine Einheit der höheren Sorte gehen. Die Zahl, welche dieses angibt, nennt man die Reductionszahl. Die Resolutionszahl heißt hier Reductionszahl, weil das Verfahren das Umgekehrte ist. Soll z. B. eine Anzahl Silbergroschen in Thaler verwandelt werden; so ist 30 die Reductionszahl. So oft man daher 30 Sgr. hat, so oft hat man 1 Thlr. Wie oft 30 Sgr. vorhanden sind, wird dadurch gefunden, daß man untersucht, wie oft 30 Sgr. in der gegebenen Anzahl Sgr. enthalten sind, d. h. dadurch, daß man mit der Reductionszahl 30 in die gegebene Anzahl Sgr. dividirt. Der sich ergebende Quotient bezeichnet die Anzahl Thaler, in welche die Sgr. verwandelt worden sind. Zu den Thlr. tritt noch der Rest von Sgr., wenn die Division nicht aufgeht. Niedere Sorten werden daher in höhere dadurch verwandelt, daß man mit der Reductionszahl dividirt. Was noch ferner bei diesen Reductionen in einzelnen Fällen zu bemerken ist, entnehmen wir aus einigen Beispielen.

Beispiel 1. 64 Sgr., wie viel Thlr.?

Auflösung. 30 Sgr. = 1 Thlr.; so oft nun 30 Sgr. in 64 Sgr. enthalten sind, so viel Thlr. sind vorhanden; 30 ist in 64 zweimal enthalten mit dem Rest von 4 Sgr.; also sind 64 Sgr. = 2 Thlr. 4 Sgr. Oder: 64 Sgr. = $2 \times 30 + 4$ Sgr. = 2 Thlr. 4 Sgr.

Beispiel 2. 18 Sgr., wie viel Thlr.?

Auflösung. 1 Sgr. ist $\frac{1}{30}$ Thlr.; 18 Sgr. sind 18 mal $\frac{1}{30}$ Thlr. = $\frac{18}{30}$ Thlr. = $\frac{3}{5}$ Thlr.

Beispiel 3. 150 Kreuzer, wie viel Gulden?

Auflösung. 60 Kr. = 1 Gld.; so oft daher 60 Kr. in 150 Kr. enthalten sind, so viel Gld. sind es; 60 Kr. sind in 150 Kr. 2 mal enthalten mit dem Reste von 30 Kr.; also sind 150 Kr. = 2 Gld. 30 Kr. = $2\frac{30}{60} = 2\frac{1}{2}$ Gld. Oder: 150 Kr. = $2 \times 60 + 30$ Kr. = 2 Gld. 30 Kr.

Beispiel 4. 600 Pfennige, wie viel Thlr. pr. C.?

Auflösung. Zwischen Pfennigen und Thlr. liegen Sgr. als Mittelsorte; daher verwandle ich erst die Pfennige in Sgr., dann die Sgr. in Thlr. Die Reductionszahl für Pfennige, um sie in Sgr. zu verwandeln, ist 12, 12 ist in 600 50mal enthalten; also sind 600 Pf. = 50 Sgr.; 30 Sgr. sind in 50 Sgr. 1mal enthalten mit dem Reste von 20 Sgr.; also sind 50 Sgr. = 1 Thlr. 20 Sgr.; folglich sind 600 Pf. = 1 Thlr. 20 Sgr. Oder: 600 Pf. = 50×12 Pf. = 50 Sgr. = 1 Thlr. 20 Sgr.

Beispiel 5. 207 Quentchen, wie viel Pfund?

Auflösung. Ich verwandle die Quentchen zuerst in Loth, dann die Loth in Pf.; 4 Qt. = 1 Loth; 4 in 207 51mal enthalten mit dem Reste 3; also sind 207 Qt. = 51 L. 3 Qt. = $51\frac{3}{4}$ Loth; 32 Loth sind in $51\frac{3}{4}$ Loth 1mal enthalten mit dem Reste von $19\frac{3}{4}$ Loth; also sind $51\frac{3}{4}$ Loth = 1 Pfd. $19\frac{3}{4}$ Loth; folglich sind 207 Qt. = 1 Pfd. $19\frac{3}{4}$ Loth = 1 Pf. 19 Loth 3 Qt. Oder: 207 Qt. = $51 \times 4 + 3$ Qt. = 51 Loth 3 Qt. = 1 Pfund 19 Loth 3 Quentchen.

Beispiel 6. 8 Pf., wie viel Thlr. pr. C.?
Auflösung. 1 Thlr. = 30 Sgr. = 30 × 12 = 360 Pf.; also ist 1 Pf. = $\frac{1}{360}$ Thlr.; 8 Pf. = $\frac{8}{360}$ = $\frac{1}{45}$ Thlr.

Beispiel 7. 2 Pfd. 10 Loth, wie viel Ctr.?
Auflösung. 2 Pfd. = 64 Loth; 2 Pfd. 10 Loth = 64 + 10 = 74 Loth; 1 Ctr. = 110 Pfd. 110 × 32 = 3520 Loth; also ist 1 Loth = $\frac{1}{3520}$ Ctr.; folglich sind 74 Loth $\frac{74}{3520}$ Ctr.

Aus den Auflösungen dieser Beispiele entnehmen wir folgende Regeln:

a. Ist eine Anzahl einer niederen Sorte allein gegeben, so dividirt man, um dieselbe in die höhere Sorte zu verwandeln, mit der Reductionszahl in die Anzahl der niederen Sorte. Alsdann gibt der Quotient die Anzahl der nächst höheren Sorte, welcher noch der Rest beigefügt wird.

96 Sgr., wie viel Thlr.? Antw. 30 in 96 = 3, mit dem Reste 6; also sind 96 Sgr. = 3 Thlr. 6 Sgr.

Den Rest kann man auch in Theilen des Thlr. ausdrücken; man theilt alsdann den Rest nochmals durch die Reductionszahl. 3 Thlr. 6 Sgr. = $3\frac{6}{30}$ = $3\frac{1}{5}$ Thlr.

Anmerkung. Diese Regel gilt vorzüglich für das schriftliche Rechnen. Die andere, nach welcher die mit O d e r gegebenen Auflösungen gerechnet sind, wird beim Kopfrechnen (an kleineren Zahlen) geübt.

b. Ist eine Anzahl einer niederen Sorte, welche nicht in die zunächst übergeordnete Sorte verwandelt werden soll, gegeben; so verwandelt man die Anzahl der niederen Sorte zuerst in die zunächst übergeordnete, und diese zunächst übergeordnete in die entferntere übergeordnete, beides durch die betreffenden Reductionszahlen. Jedesmal fügt man die Reste bei, oder man drückt sie in Theilen der übergeordneten Sorte aus. — Man kann jedoch eine niedere Sorte in eine entfernte höhere unmittelbar verwandeln, wenn man die Reductionszahl kennt.

194 Längenzoll, wie viel Ruthen zehntheiligen Maßes? Antw. 10 ist in 194 19mal enthalten mit dem Reste 4, oder 10 ist in 190 19 mal und in 4 $\frac{4}{10}$ mal enthalten; also sind 194 Zoll = 19 Fuß 4 Zoll = $19\frac{4}{10}$ = $19\frac{2}{5}$ Fuß; 10 Fuß sind in 19 Fuß 1 mal enthalten mit dem Reste von 9 Fuß; also sind 194 Zoll = 1 Ruthe $9\frac{2}{5}$ Fuß = 1 Ruthe 9 Fuß 4 Zoll.

c. Ist von jeder zweier verschiedenen Sorten eine Anzahl gegeben, welche in eine höhere Sorte verwandelt werden sollen, so verwandelt man entweder beide Sorten zunächst in die niedrigste durch Resolution, und dann beide zugleich in die gesuchte höhere Sorte, oder man verwandelt bloß die höhere der beiden gegebenen Sorten in die nächst höhere.

9 Sgr. 7 Pf., wie viel Thlr.? Antw. 9 Sgr. = 9 × 12 = 108 Pf.; 108 + 7 = 115 Pf.; 1 Pf. = $\frac{1}{360}$ Thlr., also 115 Pf. = $\frac{115}{360}$ Thlr.

100 Sgr. 3 Pf., wie viel Thlr.? Antw. 100 Sgr. = 3 Thlr. 10 Sgr.; also 100 Sgr. 3 Pf. = 3 Thlr. 10 Sgr 3 Pf. Die 3 Thlr. 10 Sgr. 3 Pf. sind auch $3\frac{1}{3}$ Thlr. + $\frac{3}{360}$ Thlr.

Anmerkung. Solche Ausdrücke, wie der letzte, sind hier zu gestatten. Nach Lessing liegt in solchem Anticipiren, welches zugleich auf die folgenden Lehren hinweiset und sie anbahnet, ein wesentlicher Vorzug der Unterrichtsmethode. Sie regt an, spornt den denkenden Kopf, bestimmt ihn zu selbstständigem Denken. Die vollkommene Vereinfachung und genaue Reduction solcher Beispiele wird in der Lehre von den Brüchen gezeigt werden.

§. 73. II. Schriftlich.

Das schriftliche Verfahren beruht auf denselben Gründen, wie das mündliche. Neues kommt hierbei gar nicht vor. Man dividirt die Anzahl der niederen Sorte mit der Reductionszahl.

Beispiel 1. 8064 Loth, wie viel Pfund? (Antw. 252 Pfd.)

Berechnung. 32 | 8064 | 252 Pfd.
64
166
160
64
64
= =

Beispiel 2. 1000 Pf., wie viel Thlr. pr.? (Antw. 2 Thlr. 23 Sgr. 4 Pf.)

Berechnung. 12 | 1000 | 83 Sgr. 4 Pf.
96
40
36
4

30 | 83 | 2 Thlr. 23 Sgr.
60
23 2 Thlr. 23 Sgr. 4 Pf.

Beispiel 3. 9000 Secunden, wie viel Minuten, Stunden? (Antw. 150 Minuten = 2 Stunden 30 Minuten.)

Berechnung.

60 | 9000 | 150 Min. 60 | 150 | 2 Stund. 30 Min.
6 12
30 30
30
0

Beispiel 4. 30 Thlr. pr. C., wie viel Thlr. bergisch? (Antw. 39 Thlr. berg.)

Auflösung. Hier muß der Schüler wissen, welchen Werth der Kassen- und der bergische Thaler in derselben Münzsorte hat. 1 Kassenthaler ist = 78 Stüber, ein berg. Rthr. = 60 Stbr. Nun bringt man die 30 Kassenthaler zuerst auf Stüber, durch Multiplication mit 78, dann theilt man diese Stübersumme durch 60, so hat man die gesuchte Zahl der berg. Rthlr.

Berechnung. 30
78

60 | 2340 | 39 Rthlr. berg.
18

54
54

= =

Beispiel 5. 990 Fl. rheinisch, wie viel franz. Kronenthaler? (Antw. 360 franz. Krthlr.)

1 franz. Krthlr. = 2 Fl. 45 Krzr. = 165 Krzr.

Berechnung. 990
60

165 | 59400 | 360 franz. Krthlr.
495

990
990

= = = 0

Zuerst wurden die 990 Fl. rhein. durch Multiplication mit 61 in Kreuzer verwandelt, dieselben dann durch 165 Kreuzer dividirt. Der Quotient gab die gesuchte Anzahl der franz. Kronenthaler.

Beispiel 6. 8709 Sgr., wie viel Friedrichsd'or? (Antw. 50 Frd. 1 Thlr. 9 Sgr.)

1 Friedrichsd'or = 5 Thlr. 20 Sgr.

Berechnung. 5 Thlr. 20 Sgr.
30

150
20

170 Sgr.

170 | 8709 | 51
850

209
170

30 | 39 | 1
30

9

Man verwandelt den Friedrichsd'or zuerst in Sgr. = 170 Sgr.; theilt mit diesen 170 Sgr. die 8709 Sgr.; es bleiben zum Rest 39 Sgr.; diese werden mit 30 in Thlr. verwandelt. Man erhält zum Quotienten 51 Friedrichsd'or 1 Thlr. 9 Sgr.

(Siehe das pract. Rechenb. I. Abschn. VIII.)

Siebente Stufe.

Zusammenzählen und Abziehen in benannten ganzen Zahlen.

Erste Uebung.

Das Zusammenzählen in benannten ganzen Zahlen.

I. Mündlich.

§. 74. Das Verfahren bei dem mündlichen Zusammenzählen.

Wir stellen Beispiele voran und leiten aus denselben die Regeln ab.

Beispiel 1. 16 Sgr. 4 Pf. und 12 Sgr., wie viel zusammen?

Auflösung. 16 Sgr. + 12 Sgr. = 28 Sgr.; 28 Sgr. und 4 Pf. = 28 Sgr. 4 Pf.; also sind 16 Sgr. 4 Pf. und 12 Sgr. = 28 Sgr. 4 Pf.

Beispiel 2. 5 Thlr. 10 Sgr. und 8 Thlr. 19 Sgr., wie viel zusammen? (Antw. 13 Thlr. 29 Sgr.)

Auflösung. 5 Thlr. und 8 Thlr. sind 13 Thlr.; 10 Sgr. und 19 Sgr. sind 29 Sgr.; also sind 5 Thlr. 10 Sgr. und 8 Thlr. 19 Sgr. zusammen 13 Thlr. 29 Sgr.

Beispiel 3. 24 Thlr. 22 Sgr. und 30 Thlr. 24 Sgr., wie viel zusammen? (Antw. 55 Thlr. 16 Sgr.)

Auflösung. 24 Thlr. und 30 Thlr. = 54 Thlr.; 22 Sgr. + 24 Sgr. = 46 Sgr. = 1 Thlr. 16 Sgr.; 54 Thlr. + 1 Thlr. 16 Sgr. = 55 Thlr. 16 Sgr.; also sind 24 Thlr. 22 Sgr. + 30 Thlr. 24 Sgr. = 55 Thlr. 16 Sgr.

Beispiel 4. 7 Pfund 9 Loth + 8 Pfund 24 Loth und 17 Pfund, wie viel zusammen? (Antw. 33 Pfd. 1 Lth.)

Auflösung. 7 Pfd. + 8 Pfd. = 15 Pfd.; 15 Pfd. + 17 Pfd. = 32 Pfd.; 9 L. + 24 L. = 33 L. = 1 Pfd. 1 L.; 32 Pfd. + 1 Pfd 1 L. = 33 Pfd. 1 L.; also u. s. w. (Das Also u. s. w. braucht nicht immer beigefügt zu werden, besonders beim Kopfrechnen nicht.

Beispiel 5. 80 Pfd. 20 L. + 92 Pfd. 30 L. + 100 Pfd. 7 L., wie viel zusammen? (Antw. 273 Pfd. 25 L.)

Auflösung. 80 Pfd. + 92 Pfd. = 172 Pfd.; 172 Pfd. + 100 Pfd. = 272 Pfd.; 20 L. + 30 L. = 50 L.; 50 L. + 7 L. = 57 L. = 1 Pfd. 25 L.; 272 Pfd. + 1 Pfd. 25 L. = 273 Pfd. 25 L.

Regel: Man zählt die Zahlen, welche gleichnamige Stücke nennen, zusammen, verwandelt die Summe der gleichnamigen Stücke, wenn sie zusammen die Anzahl der Einheiten der nächst höheren Sorte (die Reductionszahl) erreichen oder übersteigen, in diese höhere Sorte, und zählt die gleichnamigen Größen abermals zusammen; also z. B. die Pfunde zu den Pfunden, die Lothe zu den Lothen. Ist die Summe der Lothe 1 Pfund oder mehr als 1 Pfund, so verwandelt man sie in Pfund, und zählt die-

selben zu den übrigen Pfunden; ist die Summe der Pfunde 1 Centner oder mehr als 1 Centner, so verwandelt man sie in Centner u. s. w. Beim Zusammenzählen mehrsortiger Größen beginnt man entweder bei den höheren oder bei den niederen Einheiten, je nachdem das Eine oder das Andere als das Bequemere erscheint.

Noch einige Beispiele zur mündlichen Uebung.

Beispiel 6. 1 Päckchen Waaren wiegt 33 Pfd. 4 L. 2 Qt.; ein zweites 90 Pfd. 18 L. 3 Qt.; wie viel wiegen beide zusammen? (Antw. 1 Ctr. 13 Pfd. 23 L. 1 Qt.)

Beispiel 7. Jemand bezahlt 22 Thlr. 8 Sgr.; dann 12 Thlr. 17 Sgr. 7 Pf., endlich 9 Thlr. 10 Sgr. 11 Pf.; wie viel hat er ausgegeben? (Antw. 44 Thlr. 6 Sgr. 6 Pf.)

Beispiel 8. Ein Faß enthält 3 Ohm (Ahm) 20 Maß; man gießt zuerst 4 Ohm 62 Maß, dann 1 Ohm 82 Maß hinzu; wie viel ist jetzt in dem Fasse? (Antw. 9 Ohm 60 Maß.)

Beispiel 9. Jemand gibt 1 Thlr. 4 Sgr. aus, den folgenden Tag 8 Sgr. mehr, und so jeden folgenden Tag 8 Sgr. mehr als den vorhergehenden, 8 mal hinter einander; wie viel hat er überhaupt ausgegeben? (Antw. 19 Thlr. 24 Sgr.)

Anmerkung. Dergleichen Aufgaben werden so lange gegeben, bis die Schüler es zur Fertigkeit im Zusammenzählen gebracht haben.

II. Schriftlich.

§. 75. Das Verfahren bei dem schriftlichen Zusammenzählen.

Beispiel 1. 15 Sgr., 3 Sgr., 18 Sgr., 29 Sgr. und 11 Sgr. sollen addirt werden.

Auflösung. Man schreibt sie unter einander, wie die reinen Zahlen, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, und addirt von den Einern an, wie bei reinen Zahlen.

```
 15
  3
 18
 29
 11
----
 76 Sgr.
```

Diese 76 Sgr. macht man zu Thalern, durch Division mit der Reductionszahl 30.

```
30 | 76 | 2 Thlr. 16 Sgr.
   | 60 |
   ----
     16
```

Beispiel 2. Zusammenzählen: 24 Sgr. 9 Pf. + 17 Sgr. 11 Pf. + 13 Sgr. 4 Pf. + 9 Pf.

Auflösung. Schreibe die gleichnamigen Zahlen unter einander, addire die gleichnamigen, mit der niedrigsten Sorte anfangend, ziehe die Anzahl der höheren Sorte heraus durch Division mit der Reductionszahl, schreibe den Rest der niedrigsten Sorte unter die Säule der niedrigsten Sorte, addire die herausgezogene

8*

Anzahl der höheren Sorte zu der höheren Sorte; dividire wieder, wenn die Anzahl so groß ist, mit der Reductionszahl u. s. w.

		24	Sgr.	9	Pf.
		17	—	11	—
		13	—	4	—
				9	—
1	Thlr.	26	Sgr.	9	Pf.

Die Summe der Pfennige war 33; diese durch 12 getheilt, gibt 2 Sgr. 9 Pf.; die 9 Pf. werden unter die Pf. geschrieben, die 2 Sgr. zu den Sgr. gezählt. Die Summe der Sgr. war 56; diese durch 30 getheilt, gibt 1 Thlr. 26 Sgr.; die 26 Sgr. schreibt man unter die Sgr.; den 1 Thlr. voran. Dies gibt die Summe 1 Thlr. 26 Sgr. 9 Pf.

Beispiel 3.

13	Thlr.	24	Sgr.	9	Pf.
17	—	8	—	7	—
104	—	—	—	3	—
62	—	9	—	5	—
		18	—	5	—
198	Thlr.	1	Sgr.	5	Pf.

Die Gründe dieser Ausrechnung sind ganz dieselben, welche im Beispiel 2. angegeben worden sind.

Beispiel 4.

17	Ctr.	92	Pfd.	8	Lth.	3	Qt.
300	—	12	—	7	—	—	—
18	—	45	—	—	—	—	—
—	—	92	—	9	—	2	—
11	—	—	—	17	—	3	—
348	Ctr.	22	Pfd.	11	Lth.	—	—

(Siehe das pract. Rechenb. I. Abschn. IX.)

Zweite Uebung.

Das Abziehen in benannten ganzen Zahlen.

I. Mündlich.

§. 76. **Das Verfahren bei dem mündlichen Abziehen.**

Beispiel 1. Jemand gibt von 12 Sgr. 7 Sgr. aus, wie viel bleibt ihm?

Auflösung. 12 Sgr. — 7 Sgr. = 5 Sgr.

Beispiel 2. Von 24 Sgr. 9 Pf. 17 Sgr. 7 Pf. weggenommen, was bleibt übrig?

Auflösung 1. 24 Sgr. — 17 Sgr. = 7 Sgr.; 9 Pf. — 7 Pf. = 2 Pf.; 7 Sgr. + 2 Pf. sind 7 Sgr. 2 Pf. Also sind 24 Sgr. 9 Pf. — 17 Sgr. 7 Pf. = 7 Sgr. 2 Pf. (Ueber das Also u. s. w. siehe die vorhergehende Bemerkung!)

Auflösung 2. 9 Pf. — 7 Pf. = 2 Pf.; 24 Sgr. — 17 Sgr. = 7 Sgr.; also sind 24 Sgr. 9 Pf. — 17 Sgr. 7 Pf. = 7 Sgr. 2 Pf.

Regel: Man zieht die gleichnamigen Größen von einander ab, indem man entweder mit der höheren oder mit der niederen Sorte anfängt; die beiden Reste werden zusammengestellt.

Beispiel 3. 16 Thlr. 25 Sgr. 8 Pf. — 12 Thlr. 19 Sgr., was bleibt?

Auflösung. 16 Thlr. — 12 Thlr. = 4 Thlr.; 25 Sgr. — 19 Sgr. = 6 Sgr.; also ist 16 Thlr. 25 Sgr. 8 Pf. — 12 Thlr. 19 Sgr. = 4 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf.

Beispiel 4. 24 Thlr. — 26 Sgr., was bleibt übrig?

Auflösung. Hier zieht man 26 Sgr. von 1 Thlr. ab; es bleiben 4 Sgr.; also bleiben übrig 23 Thlr. 4 Sgr.

Beispiel 5. 37 Thlr. — 7 Thlr. 19 Sgr., was bleibt?

Auflösung. 37 Thlr. — 7 Thlr. = 30 Thlr., von diesen 30 Thlrn. nehme ich einen Thlr. weg, und ziehe von demselben die 19 Sgr. ab; 1 Thlr = 30 Sgr.; 30 Sgr. — 19 Sgr. = 11 Sgr.; also ist 37 Thlr. — 7 Thlr. 19 Sgr. = 29 Thlr. 11 Sgr. Oder: 37 Thlr. — 7 Thlr. = 30 Thlr. = 29 Thlr. + 1 Thlr. 1 Thlr. oder 30 Sgr. — 19 Sgr. = 11 Sgr. Also u. s. w.

Beispiel 6. 100 Thlr. — 81 Thlr. 24 Sgr. 9 Pf.; was bleibt?

Auflösung. Hier beginnt man entweder mit dem Abziehen der Thlr., oder mit dem Abziehen der Pf.

a. 100 Thlr. — 81 Thlr. = 19 Thlr.; 19 Thlr. — 1 Thlr. = 18 Thlr.; 1 Thlr. = 30 Sgr.; 30 Sgr. — 24 Sgr. = 6 Sgr.; 6 Sgr. — 1 Sgr. = 5 Sgr.; 1 Sgr. = 12 Pf.; 12 Pf. — 9 Pf. = 3 Pf.; also ist 100 Thlr. — 81 Thlr. 24 Sgr. 9 Pf. = 18 Thlr. 5 Sgr. 3 Pf.

b. 100 Thlr. = 99 Thlr. + 1 Thlr.; 1 Thlr. = 30 Sgr. = 29 Sgr. + 12 Pf.; 12 Pf. — 9 Pf. = 3 Pf.; 29 Sgr. — 24 Sgr. = 5 Sgr.; 99 Thlr. — 81 Thlr. = 18 Thlr.; also ist 100 Thlr. — 81 Thlr. 24 Sgr. 9 Pf. = 18 Thlr. 5 Sgr. 3 Pf.

c. 81 Thlr. 24 Sgr. 9 Pf. = 82 Thlr. — 5 Sgr. 3 Pf.; 100 Thlr. — 82 Thlr. = 18 Thlr.; also 18 Thlr. 5 Sgr. 3 Pf.

Anmerkung. Es ist — bemerken wir nochmals — auch beim Rechnen nicht immer nöthig, Alles zu sagen, was man denkt. Wenn der Schüler nur dazu fähig ist!

Beispiel 7. 87 Thlr. 16 Sgr. — 49 Thlr. 25 Sgr. 7 Pf.; was bleibt?

Auflösung. 87 Thlr. — 49 Thlr. = 38 Thlr.; 25 Sgr. können nicht von 16 Sgr. abgezogen werden; ich nehme daher von den 38 Thlrn. 1 Thlr. oder 30 Sgr. zu den 16 Sgr.; 30 Sgr. + 16 Sgr. = 46 Sgr; 46 Sgr. — 25 Sgr. = 21 Sgr.; von diesen 21 Sgr. löse ich einen Sgr. in Pf. auf; 1 Sgr. = 12 Pf.; 12 Pf. — 7 Pf. = 5 Pf.; also ist 87 Thlr. 16 Sgr. — 49 Thlr. 25 Sgr. 7 Pf. = 37 Thlr. 20 Sgr. 5 Pf.

Beispiel 8. 36 Thlr. 9 Sgr. 2 Pf. — 12 Thlr. 28 Sgr. 11 Pf.; was bleibt?

Auflösung. 36 Thlr. — 12 Thlr. = 24 Thlr.; von diesen 24 Thlrn. löse ich einen in Sgr. auf und ziehe von demselben die 28 Sgr. ab, zähle dann zu dem Reste die 9 Sgr. hinzu; 30 Sgr.

— 28 Sgr. = 2 Sgr.; 2 Sgr. + 9 Sgr. = 11 Sgr.; von diesen 11 Sgr. löse ich einen in Pf. auf, ziehe von demselben die 11 Pf. ab, und addire zu dem Reste die 2 Pf.; 12 Pf. — 11 Pf. = 1 Pf.; 1 Pf. + 2 Pf. = 3 Pf.; also ist 36 Thlr. 9 Sgr. 2 Pf. — 12 Thlr. 28 Sgr. 10 Pf. = 23 Thlr. 10 Sgr. 3 Pf. Andere Auflösungsarten finden die Schüler selbst. Z. B. bei der letzten Aufgabe: 36 Thlr. — 13 Thlr. = 23 Thlr.; 1 Sgr. 1 Pf. + 9 Sgr. 2 Pf. = 10 Sgr. 3 Pf.; also 23 Thlr. 10 Sgr. 3 Pf.

(In dieser Auflösung ist nicht Alles gesagt, was der Kopf gedacht hat. Ist auch nicht (immer) nöthig. Der Rechenmeister soll kein Pedant sein).

Anmerkung. Die Regeln für die Auflösung dieser Aufgaben liegen in den gegebenen Auflösungen vorstehender Aufgaben, welche vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren geordnet sind. Die Schüler müssen in diesen im gemeinen Leben sehr häufig vorkommenden Aufgaben recht tüchtig, und zwar nicht bloß mit Thlrn. und Sgr., sondern mit allen vorkommenden Arten von Größen geübt werden. Will man eine gewisse Regelmäßigkeit in diese Aufgaben bringen, oder eine Abtheilung der Schule im Stillen mit ihnen beschäftigen, so gibt man ihnen Reihenfolgen und verlangt, daß sie zuletzt den kleinsten Rest, der übrig bleibt, nennen sollen.

a. Man läßt z. B. immer dieselbe Menge abziehen.

100 Pfd. — 3 Pfd. 7 Loth = 96 Pfd. 25 Loth.
96 Pfd. 25 Loth — 3 — 7 — = 93 — 18 —
93 — 18 — — 3 — 7 — = u. s. w.

b. Man läßt abwechselnd abziehen und zuzählen.

100 Fuß 11 Zoll — 8 Fuß 9 Zoll = 92 Fuß 2 Zoll
92 Fuß 2 Zoll + 7 Fuß 4 Zoll = 99 Fuß 6 Zoll
99 Fuß 6 Zoll — 8 Fuß 9 Zoll = 90 Fuß 7 Zoll (zehntheilig)
90 Fuß 7 Zoll + 7 Fuß 4 Zoll = 98 Fuß 1 Zoll u. s. w.

Noch einige Aufgaben.

Beispiel 9. Jemand besitzt 31 Thlr. 27 Sgr.; er gibt vom Sonntag an jeden Tag, die ganze Woche durch, 10 Sgr. 11 Pf. aus; wie viel hat er am nächsten Sonntage noch? (Antw. 29 Thlr. 10 Sgr. 7 Pf.)

Beispiel 10. A hat ein Vermögen von 722 Rthlrn. 42 Stbr. 3 Füchse; und 844 Rthlr. 12 Stbr. Schulden. Um wie viel übersteigen die Schulden das Vermögen? (Antw. 121 Rthlr. 29 Stbr. 1 Fuchs.

Beispiel 11. A verdient in 3 Wochen 28 Rthr. 27 Stbr.; er hat in der ersten Woche 4 Rthlr. 27 Stbr., in der zweiten 3 Rthlr. 45 Stbr., in der dritten 2 Rthlr. 9 Stbr. ausgegeben; wie viel hatte er in 3 Wochen erübrigt? (Antw. 18 Rthlr. 16 Stbr.)

Beispiel 12. Von 30 Ctr. 82 Pfd. verkauft A nacheinander 4 Ctr. 12 Pfd., 2 Ctr. 49 Pfd., 8 Ctr. 100 Pfd.; wie viel Ctr. und Pfd. bleiben ihm noch? (Antw. 15 Ctr. 31 Pfd.)

Beispiel 13. Jemand ist einem Andern 50 Pfd. 12 Loth schuldig; er bezahlt ihm zuerst 7 Pfd. 9 Loth, dann 8 Pfd. 13 Loth, dann 4 Pf. 5 Loth; wie viel Pfd. und Loth hat derselbe nun noch zu bezahlen? (Antw. 30 Pfd. 17 Loth.)

Beispiel 14. Bei einer Geldsammlung gingen ein 3 Thlr. 4 Sgr., 8 Thlr. 9 Sgr., 12 Thlr. 12 Sgr., 10 Thlr. 24 Sgr. Der Sammler glaubte 35 Thlr. 10 Sgr. eingenommen zu haben. Um wie viel hatte er sich verrechnet? (Antw. Um 21 Sgr.).

Beispiel 15. Eine Rechnung bestand aus folgenden Resten: 2 Thlr. 12 Sgr. 3 Pf., 9 Thlr. 14 Sgr. 11 Pf., 4 Thlr. 3 Pf., 13 Sgr. 4 Pf., 27 Thlr. 9 Pf., 12 Thlr. 8 Sgr. 2 Pf. Die Summe war zu 56 Thlnr. 26 Sgr. angegeben. Wie groß war der Irrthum? (Antw. 1 Thlr. 6 Sgr. 4 Pf.)

II. Schriftlich.

§. 77. Das Verfahren bei dem schriftlichen Abziehen.

Man schreibt diejenigen Größen, von welchen abgezogen werden soll, hin, die davon abzuziehenden unter dieselben, die gleichnamigen unter einander, zieht nun die einzelnen von einander ab, indem man mit der kleinsten Sorte anfängt. Dieses geschieht ohne Weiteres, wenn die Anzahl der abzuziehenden Sorte kleiner ist als die, von welcher abgezogen werden soll. Ist dieses nicht der Fall, so borgt oder leiht man eine Einheit der nächst höheren Sorte, löset dieselbe in Einheiten der niedrigeren Sorte auf, zählt die Anzahl der niedrigen Sorte hinzu und bewirkt nun den Abzug. Den Rest schreibt man unter die Zahl, bei welcher der Abzug statt fand. Manchmal ist es der Fall, daß in der Voll- und in der Abzugszahl nicht gleich viel Sorten vorkommen; die geringere Zahl der Sorten kann in der Voll- und in der Abzugszahl vorkommen; alsdann muß man mit einiger Vorsicht verfahren. Im Uebrigen ist die Operation dieselbe.

Einige Beispiele werden zur Erläuterung hinreichen.

Beispiel 1. Von 12 Pfd. 16 Lth. 3 Qt. sollen 7 Pfd. 14 Lth. 1 Qt. abgezogen werden, wie groß ist der Rest?

Berechnung. 12 Pfd. 16 Lth. 3 Qt.
7 — 14 — 1 —
―――――――――――
5 Pfd. 2 Lth. 2 Qt.

Beispiel 2. 36 Pfd. 17 Lth. 2 Qt. — 28 Pfd. 24 Lth. 3 Qt. wie groß ist der Rest?

Berechnung. 36 Pfd. 17 Lth. 2 Qt. (über 17: 32, über 2: 4)
28 — 24 — 3 —
―――――――――――
7 Pfd. 24 Lth. 3 Qt.

Hier waren zuerst 3 Qt. von 2 Qt. abzuziehen. Man borgt 1 Lth. = 4 Qt.; 4 Qt. + 2 Qt. = 6 Qt.; nun werden 3 Qt. von 6 Qt. abgezogen; es bleiben 3 Qt. Die 17 Lth. sind nun zu 16 Lth. geworden; 24 Lth. können nicht von 16 Lth. abgezogen werden; ich leihe 1 Pfd. = 32 Lth.; 32 Lth. + 16 Lth. = 48 Lth.; nun ziehe ich 24 Lth. von 48 Lth. ab, es bleiben 24 Lth.; die 36 Pfd. sind zu 35 Pfd. geworden; 28 Pfd. von 35 Pfd. bleiben 7 Pfd.; Rest: 7 Pfd. 24 Lth. 3 Qt.

Beispiel 3. Jemand besitzt 138 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf.; er gibt davon 102 Thlr. aus; wie viel hat er noch?

Berechnung. 138 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf.
102 — — — — —
―――――――――――
36 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf.

Beispiel 4. Wie groß ist der Unterschied von 29 Thlrn. und 13 Thlr. 27 Sgr. 11 Pf.?

Berechnung.	29 Thlr.	— Sgr.	— Pf.
	13 —	27 —	11 —
	15 Thlr.	2 Sgr.	1 Pf.

Hier borgt man 1 Thlr. = 30 Sgr.; von diesen 30 Sgr. nimmt man einen weg, und löset ihn in Pf. auf; 1 Sgr. = 12 Pf.; die 29 Thlr. werden also verwandelt in 28 Thlr. 29 Sgr. 12 Pf. Nun kann der Abzug der einzelnen Theile geschehen.

Beispiel 5. 100 Fuß 11 Zoll 2 Linien — 82 Fuß 8 Linien, zwölftheilig, was bleibt?

Berechnung.	100 Fuß	11 Zoll	2 Lin.
	82 —	— —	8 —
	18 Fuß	10 Zoll	6 Lin.

Hier wird ein Zoll = 12 Linien geborgt u. s. w.

Beispiel 6. Wie groß ist der Unterschied von 1000 Ctr. 13 Lth. und 984 Ctr. 89 Pfd. 19 Lth. 2 Qt.?

		109	32	4
Berechnung.	1000 Ctr.	— Pfd.	13 Lth.	— Qt.
	984 —	89 —	19 —	2 —
	15 Ctr.	20 Pfd.	25 Lth.	2 Qt.

Zuerst wird ein Loth geborgt = 4 Qt.; 4 Qt. — 2 Qt. = 2 Qt.; die 13 Loth sind zu 12 L. geworden; ich borge 1 Pfd.; aber die Pfd. fehlen in der Vollzahl; ich borge daher 1 Ctr. = 110 Pfd., und von diesen 110 Pfd. nehme ich 1 Pfd. = 32 L. zu den L. herüber, 32 + 12 L. = 44 L.; 44 L. — 19 L. = 25 L.; die 110 Pfd. sind zu 109 Pfd. geworden; 109 Pfd. — 89 Pfd. = 20 Pfd.; die 1000 Ctr. sind zu 999 Ctr. geworden; 999 Ctr. — 984 Ctr. = 15 Ctr.; Rest: 15 Ctr. 20 Pfd. 25 L. 2 Qt.

Beispiel 7. Jemand gibt von 20 Kassenthalern, 7 Rthlr. Bergisch und 37 Stbr. aus: 7 Kassenthaler, 9 Rthlr. Bergisch und 52 Stbr.; wie viel behält er noch?

		2	36
Berechnung:	20 Kass.	7 Rthlr. berg.	37 Stbr.
	7 —	9 — —	52 —
	11 Kass.	— Rthlr. berg.	21 Stbr.

Der Abzug der Stüber kann sogleich bewerkstelligt werden, wenn ich einen Rthlr. Bergisch borge. Aber um die Rthlr. Bergisch abzuziehen, muß ich Kassenthaler borgen. Nehme ich einen Kassenthaler, so habe ich 1 Rthlr. 18 Stbr.; folglich eine ungleich benannte Zahl; es kommen daher noch Stüber zu den Stübern. Deßhalb sehe ich zuerst zu, wie viel Kassenthaler geborgt werden müssen. Antw.: 2 Kass.

2 Kass. = 2 Rthlr. 36 Stbr.; ich schreibe die 2 Rthl. über die 7 Rthlr., die 36 Stbr. über die 37 Stbr., und ziehe nun ab. 36 Stbr. + 37 Stbr. = 73 Stbr.; 73 Stbr. — 52 Stbr. = 21 Stbr.; 7 + 2 Rthlr. = 9 Rthlr.; 9 Rthlr. — 9 Rthlr. = 0 Rthlr.; die 20 Kass.

sind zu 18 Kass. geworden; 18 Kass. — 7 Kass. = 11 Kass. Also Rest: 11 Kassenthaler 21 Stbr.

Anmerkung. Man kann in vielen Fällen ein leichteres Verfahren einschlagen.

Beispiel.	15 Thlr. 12 Sgr. 7 Pf.
	12 — 16 — 10 —

Statt einen Sgr. in Pfennige zu verwandeln und sie zu 7 Pf. hinzuzuzählen und dann 10 Pf. von 19 Pf. abzuziehen, ziehe ich 10 Pf. von 12 Pf. ab, es bleiben 2 Pf.; diese 2 Pf. zähle ich zu 7 Pf. hinzu; 7 + 2 Pf. = 9 Pf., der erste Rest. Ferner: statt 16 Sgr. von 30 + 11 = 41 Sgr. abzuziehen, ziehe ich 16 Sgr. von 30 Sgr. ab, Rest 14 Sgr., und zähle zu diesen 14 Sgr. die 11 Sgr. hinzu, Summa 25 Sgr. u. s. w. Auf diese Weise operirt man mit kleineren Zahlen.

Dieses läßt sich auch auf gewöhnliche Subtractionsaufgaben, wenn geborgt werden muß, anwenden. Z. B.

423	8 von 10 bleibt 2, 2 + 3 = 5, erster Rest;
298	9 von 10 bleibt 1, 1 + 1 = 2, zweiter Rest u. s. w.

Zusatz 1. Die Probe bei allen diesen Berechnungen wird auf dieselbe Art gemacht, wie bei reinen Zahlen. Die Summe des Subtrahenden und des Restes gibt den Minuenden und der Unterschied des Restes und Minuenden gibt den Subtrahenden.

Beispiel. 12 Thlr. 8 Sgr. 8 Pf. — 4 Thlr. 24 Sgr. 3 Pf.

Berechnung:	12 Thlr. 8 Sgr. 8 Pf.	
	4 — 24 — 3 —	
	7 Thlr. 14 Sgr. 5 Pf.	
Probe a.	4 Thlr. 24 Sgr. 3 Pf.	
	7 — 14 — 5 —	
	12 Thlr. 8 Sgr. 8 Pf.	(der Minuend.)
Probe b.	12 Thlr. 8 Sgr. 8 Pf.	
	7 — 14 — 5 —	
	4 Thlr. 24 Sgr. 3 Pf.	(der Subtrahend.)

Zusatz 2. Die Subtractionsaufgaben mit benannten Zahlen enthalten häufig Zeitgrößen. Von Jahren, Monaten und Tagen sind Jahre u. s. w. abzuziehen.

Diese Rechnungen erfordern nicht selten eine eigene Ueberlegung. Daher ist es nöthig, daß der Schüler mit der Berechnung der Zeitgrößen bekannt gemacht werde. Es geschieht dies am besten an dieser Stelle. Wir wollen die vorzüglichsten Fälle in Beispielen aufführen und die nöthigen Bemerkungen den einzelnen Beispielen anreihen, nachdem wir vorher das Wichtigste über die Eintheilung der Zeit angeführt haben.

Aus der unendlichen, unaufhörlich gleichförmig fortlaufenden Zeit hat man verschiedene bestimmte Abschnitte herausgenommen, nach denen man die Länge der Zeit zählt. Schon früher nahm man als Hauptabschnitt die Zeit des Umlaufs der Erde um die Sonne an. Man nennt diesen Hauptabschnitt ein Jahr. Ein kleinerer Abschnitt ist die Zeit, in welcher sich die Erde ein mal um ihre Achse dreht. Diesen Zeitraum nennt man einen Tag. Man theilt den Tag in 24 gleiche Theile, Stunden genannt. Die Stunde wird in 60 Minuten,

die Minute in 60 Sekunden, die Sekunde in 60 Tertien eingetheilt. Ein anderer Zeitraum ist der Monat, dessen Länge ungefähr mit der Zeit des Umlaufs des Mondes um die Erde übereinstimmt. Das Jahr umfaßt 12 Monate. Doch sind dieselben nicht alle von gleicher Länge. Wir werden gleich darauf zurückkommen.

Ein Jahr wird in runder Zahl zu 365 Tagen angenommen. Die eigentliche Zeit des Umlaufs der Erde um die Sonne beträgt aber 5 Stunden 48 Minuten 45 Sekunden, (nach andrer Angabe 51 Sekunden), also ungefähr 6 Stunden mehr. Wenn daher ein gewöhnliches Jahr zu 365 Tagen angenommen wird, so begeht man jährlich einen Fehler von beinahe 6 Stunden, also in 4 Jahren ungefähr einen Fehler von 24 Stunden oder von einem ganzen Tage. Um dieses wieder auszugleichen, rechnet man jedes vierte Jahr zu 366 Tagen. Ein solches Jahr nennt man ein Schaltjahr, weil den 365 Tagen ein Tag beigefügt oder eingeschaltet wird. Den sogenannten Schalttag pflegt man dem Februar anzuhängen. In einem Schaltjahre ist daher der Februar einen Tag länger als gewöhnlich. Nun kommt es darauf an, wie man erfährt, welche Jahre Schalt-, welche gemeine Jahre sind. Es ist dieses sehr leicht. Man nimmt die beiden letzten Ziffern der Jahreszahl des zu suchenden Jahres, und theilt die dadurch ausgedrückte Zahl durch 4. Bleibt kein Rest, so ist das Jahr ein Schaltjahr; bleibt ein Rest, so ist dasselbe ein gemeines Jahr. Die Reste, welche bleiben können, sind 1, 2 oder 3. Im ersten Falle ist das gemeine Jahr das erste, im zweiten Falle das zweite, im dritten Falle das dritte nach einem Schaltjahre. Es sei z. B. das Jahr 1827 zu prüfen. Die Zahl, welche durch die beiden letzten Ziffern dieser Jahreszahl ausgedrückt werden, heißt 27. Wir dividiren dieselbe durch 4. Es bleibt der Rest 3. Also ist 1827 das dritte Jahr nach einem Schaltjahre. Das zunächst vorhergehende Schaltjahr ist daher 1824 gewesen, und das nächstfolgende Schaltjahr wird 1828 sein. Die darauf folgenden Schaltjahre sind 1832, 1836, 1840 u. s. w. — Wenn man jedes 4te Jahr als ein Schaltjahr ansieht, so nimmt man den Fehler, welcher in 4 Jahren begangen wird, zu groß an. Denn der jährliche Ueberschuß des wahren Jahres über 365 Tage ist nicht 6 Stunden, sondern nur 5 Stunden 48 Minuten 45 Sekunden. Deßwegen darf man nach einem bestimmten Zeitverlauf nicht jedes 4te Jahr zu 366 Tagen rechnen, sondern man muß ein solches, welches, der Regel nach, ein Schaltjahr sein sollte, wieder zu 365 Tagen annehmen. Wenn man nun berechnet, wie viel eigentliche Schaltjahre wieder als gemeine anzusehen sind; so findet man, daß man in 400 Jahren 3 Jahre, welche nach der gewöhnlichen Berechnung Schaltjahre sein sollten, als gemeine Jahre zu 365 Tagen annehmen muß. Man hat dazu die Jahre bestimmt, mit welchen die Jahrhunderte sich endigen (die Säcularjahre). So sollten die Jahre 1700, 1800, 1900 eigentlich Schaltjahre sein; sie werden aber als gemeine Jahre angenommen. Will man erfahren, ob ein solches Jahr, mit welchen ein Jahrhundert schließt, ein Schaltjahr sei, oder nicht; so nimmt man die Zahl, welche durch die Ziffern vor den Nullen ausgedrückt wird, und theilt dieselbe durch 4. Geht die Division auf, so ist das Jahr ein Schaltjahr; im Gegentheil nicht. Es sei z. B.

1700 zu prüfen. Wir theilen 17 durch 4; die Division geht nicht auf. Dieses Jahr ist also kein Schaltjahr. Ebenso sind 1800, 1900, 2100, 2200 keine Schaltjahre; wohl aber 1600, 2000, 2400, 2800 u. s. w.

Das Jahr wird, wie schon bemerkt, in 12 Monate eingetheilt. Rechnet man mit runden Zahlen, so nimmt man den Monat zu 30 Tagen an. Dieses macht aber nur 12 × 30 = 360 Tage. Auch nimmt man in runder Zahl das Jahr zu 52 Wochen an, die Woche zu 7 Tagen. Dieses macht 52 × 7 = 364 Tage. Die wahre (genaue) Länge der einzelnen Monate ist aber folgende:

Januar	oder	Frostmonat	=	31	Tage.
Februar	—	Hornung	=	28	—, im Schaltj. = 29 Tage.
März	—	Lenzmonat	=	31	—
April	—	Windmonat	=	30	—
Mai	—	Wonnemonat	=	31	—
Juni	—	Brachmonat	=	30	—
Juli	—	Heumonat	=	31	—
August	—	Erntemonat	=	31	—
September	—	Herbstmonat	=	30	—
Oktober	—	Weinmonat	=	31	—
November	—	Wintermonat	=	30	—
December	—	Christmonat	=	31	—

Länge des gem. Jahres = 365, des Schaltj. = 366 Tagen.

In Betreff der Anfänge der Zeiträume ist Folgendes zu bemerken. Unsere Zeitrechnung fängt mit der Geburt Jesu Christi an, und vom Tage der Geburt desselben schreiben wir das Jahr 1. Als dieses geschrieben wurde, war indessen noch kein Jahr verflossen, sondern erst, als die Jahreszahl 2 nach Christi Geburt geschrieben wurde, war ein ganzes Jahr verflossen. Wenn wir daher die Jahreszahl 1827 schreiben, so sind erst 1826 volle Jahre nach Christi Geburt verflossen. — Wir zählen die Monate des Jahres in der oben angegebenen Ordnung; der Mai z. B. ist der 5te, der Juli der 7te Monat des Jahres. Wenn wir daher Mai, z. B. den 20. Mai, schreiben, so sind erst 4 Monate des Jahres verflossen. Dasselbe gilt von den einzelnen Tagen der Monate. Schreiben wir an einem Tage den 30. Juli, so sind 29 Tage des Juli verflossen. — Die Stunden der Tage beginnen um 12 Uhr Mitternachts, indem wir von 1 Uhr Nachts bis 12 Uhr Mittags, und wieder von 1 Uhr Mittags bis 12 Uhr Nachts zählen. Ist daher eine Begebenheit an einem bestimmten Tage um 7 Uhr vorgefallen, so muß bemerkt werden, ob dieses um 7 Uhr Vor-, oder um 7 Uhr Nachmittags gewesen ist. In jenem Falle waren von dem bezeichneten Tage 7, in diesem Falle 12 + 7 = 19 Stunden verflossen.

Wenn wir daher schreiben:

1827 den 3ten Juli Vormittags 9 Uhr; so sind bis zu diesem Augenblicke von Christi Geburt an verflossen

1826 Jahre 6 Monate 2 Tage 9 Stunden.

Wenn wir schreiben:
1814 den 18ten Oktober Nachmittags um 5 Uhr; so ist von Christi Geburt an bis zu diesem Augenblicke verflossen
1813 Jahre 9 Monate 17 Tage und 12 + 5 = 17 Stunden.

Wenn wir schreiben:
1811 den 11ten November Abends um 9 Uhr 43 Minuten; so sind von Christi Geburt an bis zu diesem Augenblicke verflossen
1810 Jahre 10 Monate 10 Tage 21 Stunden 43 Minuten.

Nach diesen Vorbemerkungen (die nur das Nothwendigste, zum practischen Rechnen mit Zeitgrößen Unentbehrlichste enthalten) können wir zu einzelnen Aufgaben übergehen.

Beispiel 1. Welches Datum (Jahreszahl, Monat, Tag) schrieb man 1800 Jahre 3 Monate 4 Tage nach Christi Geburt?
Antw. 1801 den 5. April.

Denn als 1800 Jahre verflossen waren, schrieb man 1801; mit dem Verlauf von 3 Monaten des Jahres 1801 begann der April, und mit dem Verlauf von 4 Tagen im April der 5te April.

Beispiel 2. Welches Datum schrieb man 1826 Jahre 8 Monate 7 Tage 17 Stunden nach Christi Geburt?
Antw. 1827 den 8ten September Nachmittags um 5 Uhr.

Beispiel 3. Welches Datum wird man 1884 Jahre 11 Monate 29 Tage 23 Stunden 57 Minuten nach Christi Geburt schreiben?
Antw. 1885 den 30sten December Nachts um 11 Uhr 57 Minuten.

Beispiel 4. Wie viel Tage des Jahres 1827 sind am 3ten August desselben Jahres verflossen?

Auflösung. Dieses Jahr ist ein gemeines Jahr, der Februar hat also 28 Tage; folglich sind am 3ten August verflossen:

Januar	31
Februar	28
März	31
April	30
Mai	31
Juni	30
Juli	31
August	2
Summa 214 Tage.	

Beispiel 5. Wie viel Tage sind im Jahr 1832 vom ersten Januar bis zum 8ten März verflossen?

Auflösung. Das Jahr 1832 ist ein Schaltjahr; also sind bis zum 8. März d. J. 31 + 29 + 7 = 67 Tage verflossen.

Beispiel 6. Wie viel Tage verfließen vom Anfange des 29sten Oktobers bis zum Ende des Jahres?

Auflösung. Vom Oktober noch 3, vom November noch 30, vom December noch 31, im Ganzen also noch 64 Tage.

Beispiel 7. Wie viel Tage liegen zwischen dem 24sten März und dem 11ten November eines Jahres?

Auflösung.	Im März	kommen	noch	7	Tage.
	— April	—	—	30	—
	— Mai	—	—	31	—
	— Juni	—	—	30	—
	— Juli	—	—	31	—
	— August	—	—	31	—
	— September	—	—	30	—
	— Oktober	—	—	31	—
	— November	—	—	10	—
			Summa	231	Tage.

Beispiel 8. Wie viel Monate und Tage verfließen im J. 1829 vom 3ten April bis zum 16ten August?

Auflösung. Am 16. August sind verflossen 7 Monate 15 Tage.
— 3. April — — 3 — 2 —

Unterschied 4 Monate 13 Tage.

Beispiel 9. Wie viel Jahre, Monate und Tage verflossen vom Jahre 1813 den 18. Oktober bis zum J. 1815 den 18. Juni?

Auflösung. Offenbar so viel Jahre und Tage, als letztere Zahlen mehr sind als erstere. Man muß daher diese von jenen abziehen. 1813 den 18. Oktober waren verflossen: 1812 Jahre 9 Monate 17 Tage, und 1815 den 18. Juni waren verflossen: 1814 Jahre 5 Monate 17 Tage. Daher

1814 Jahre 5 Monate 17 Tage.
1812 — 9 — 17 —

1 Jahr 8 Monate — —

Beispiel 10. Jemand war 1643 den 18. Februar Morgens um 9 Uhr geboren, und er starb 1699 den 10. Mai Abends um 9 Uhr; wie alt ist er geworden?

1698 Jahre 4 Monate 9 Tage 21 Stunden
1642 — 1 — 17 — 9 —

56 Jahre 2 Monate 22 Tage 12 Stunden.

Auflösung. Als er starb, waren 1698 Jahre 4 Monate 9 Tage 21 Stunden verflossen, und als er geboren wurde: 1642 Jahre 1 Monat 17 Tage 9 Stunden. Zieht man letztere Zahl von der ersteren ab, so hat man die Dauer des Lebens des Mannes; 9 Stunden von 21 Stunden bleiben 12 Stunden; 17 Tage kann man nicht von 9 Tagen abziehen; man nimmt daher von den 4 Monaten einen Monat weg; dieses ist der 4te Monat, oder der April; derselbe hat 30 Tage; man hat also 17 Tage von 39 Tagen abzuziehen; es bleiben 22 Tage u. s. w. Das Alter des Mannes war also 56 Jahre 2 Monate 22 Tage und 12 Stunden.

Beispiel 11. Eduard starb den 20. März des Jahres 1820, des Morgens um 11 Uhr; er war geboren 1809 den 29. Oktober Abends um 10 Uhr; wie alt ist er geworden?

1819 Jahre 2 Monate 19 Tage 11 Stunden
1808 — 9 — 28 — 22 —

10 Jahre 4 Monate 19 Tage 13 Stunden.

Auflösung 1. Die beiden Ansätze sind im Vorigen erklärt worden. Bei dem Abzuge der Tage mußte ein Monat zu Tagen gemacht werden; dies war der zweite Monat des Jahres 1820, eines Schaltjahres, der also 29 Tage hatte; man hatte also, da die 19 Tage schon um einen verringert waren, 29 + 18 = 47 Tage; 47 T. — 28 T. = 19 T.; das Uebrige ist für sich klar.

Auflösung 2.

1820 J.	2 M.	20 T.	11 St.
1809 —	9 —	29 —	22 —
10 J.	4. M.	19 T.	13 St.

In diesen Ansätzen sind die wirklichen Jahre und Tage, in welche die Geburt und der Tod fällt, mit ihren Zahlen angeschrieben, statt daß in den früheren Ansätzen aus den angeführten Gründen die Jahreszahlen und die Tageszahlen um 1 vermindert werden mußten. Da nun in jedem Falle die beiden Jahreszahlen und die beiden Tageszahlen um 1 vermindert werden müssen, so sind die Unterschiede dieselben, wenn ich keine von beiden vermindere, sondern sie selbst hinschreibe. Denn wenn Minuend und Subtrahend um gleich viel Einheiten vermehrt oder vermindert werden, so bleibt der Rest derselbe.

Beispiel 12. Gustav lebte vom 31sten December des Jahres 1790 des Morgens um 9 Uhr bis zum ersten März Morgens um 5 Uhr des Jahres 1820; wie alt ist er geworden?

1819 J.	2 M.	0 T.	5 St.
1789 —	11 —	30 —	9 —
29 J.	1 M.	29 T.	20 St.

Auflösung. Hier muß bei dem Abzuge der Tage ein Monat in Tage verwandelt werden; dieses ist der Februar des Jahres 1820, der, da 1820 ein Schaltjahr war, 29 Tage hat; diese 29 Tage sind schon um einen verringert worden, da einer zu den Stunden hingezogen werden mußte; es bleiben also noch 28 Tage übrig; diese reichen aber nicht hin, um 30 Tage von ihnen abzuziehen; man muß daher einen zweiten Monat in Tage verwandeln; dieses ist der Januar, welcher 31 Tage hat; 31 + 28 = 59 T.; 59 T. — 30 T. = 29 Tage u. s. w.

Beispiel 13. Karl starb 1811 den 11. November Morgens um 9 Uhr in einem Alter von 59 Jahren 10 Monaten 8 Tagen 3 Stunden; wann war Karl geboren?

1810 J.	10 M.	10 T.	9 St.
59 —	10 —	8 —	3 —
1751 J.	= M.	2 T.	6 St.

d. h. als Karl geboren wurde, schrieb man 1752 den 3ten Januar Morgens 6 Uhr.

Auflösung. Hier ist der Zeitpunkt gegeben, wann Karl starb. Als derselbe geboren wurde, war weniger Zeit verflossen, und zwar so viel weniger, als das Alter Karl's beträgt. Zieht man daher das Alter Karl's von der Zeit, welche bei seinem Tode verflossen war, ab, so erhält man die Zeit, welche bei seiner Geburt bereits verflossen war, d. h. die Zeit seiner Geburt.

Beispiel 14. Auguste war 1782 den 10. April Abends um 11 Uhr geboren, und sie lebte 42 Jahre 8 Monate 24 Tage und 2 Stunden; wann starb sie?

	1781 J.	3 M.	9 T.	23 St.
	42 —	8 —	24 —	2 —
	1823 J.	11 M.	34 T.	1 St.
=	1824 —	„ —	3 —	1 —

d. h. man schrieb bei dem Tode der Auguste 1825 den 4. Januar Morgens um 1 Uhr.

Auflösung. In dieser Aufgabe ist zuerst die Zeit der Geburt gegeben. Man schreibt die Zahl der Jahre, Monate u. s. w. hin, welche bei der Geburt verflossen waren. Zu diesen Zeiten fügt man addirend das Alter hinzu, welches sie erreicht hat; die herauskommende Summe nennt uns die Zeit, welche bei ihrem Tode verflossen ist. Hierauf überträgt man diese so, wie das Datum gewöhnlich geschrieben wird. Bei der vorstehenden Aufgabe kommen 34 Tage heraus. Diese kann man nicht eher in einen Monat auflösen, bis man weiß, welchem Monate die Tage angehören, da die Monate verschiedene Länge haben. Deßhalb läßt man vorerst die 34 Tage stehen, und summirt die Monate und Jahre. Hier sehen wir, daß die 34 Tage nach dem Verlauf von 11 Monaten eingetreten sind; folglich gehören sie dem December an; da derselbe 31 Tage hat, so zählen wir von den 34 Tagen 31 Tage zu einem Monate, die 3 übrigen Tage unter die Tage schreibend; 11 M. + 1 M. = 12 M. = 1 Jahr.

Beispiel 15. Ein Gebäude, welches 1720 den 31. August gebaut worden war, brannte 92 Jahre 6 Monate 30 Tage darnach ab; wann geschah dies?

1719 J.	7 M.	30 T.
92 —	6 —	30 —
1812 J.	1 M.	60 T.
1812 —	3 —	1 —

d. h. 1813 den 2ten April.

Auflösung. Als das Gebäude gebaut wurde, waren nach der christlichen Zeitrechnung 1719 J. 7. M. 30 Tage verflossen. Zählt man die Zeit, während welcher das Gebäude gestanden hat, hinzu, so erhält man die Zeit, welche in der christlichen Zeitrechnung bis zur Zeit des Abbrennens desselben verflossen ist.

In der Auflösung erhielt man 60 Tage. Diese läßt man, da man noch nicht weiß, welchen Monaten sie angehören, einstweilen stehen, und addirt die Monate und Jahre. Nun sieht man, daß die 60 Tage nach dem ersten Monate des Jahres 1813 verflossen sind. Dieses Jahr ist ein gemeines Jahr von 365 Tagen gewesen. Der Februar desselben hat also 28 Tage gehabt; der März hat 31 Tage; 28 + 31 = 59 Tage; die 60 Tage machen also noch 2 Monate und einen Tag; 1 M. + 2 M. = 3 M.; folglich sind in der christlichen Zeitrechnung bis zur Zeit des Brandes 1812 J. 3 M. 1 T. verflossen, d. h. man schrieb damals 1813 den 2ten April.

Anmerkung. Die bis jetzt angeführten Beispiele aus der sogenannten Zeitrechnung enthalten die gewöhnlichen Fälle, welche im practischen Leben vorkommen; sie beziehen sich entweder auf die Berechnung der Dauer, oder auf die Berechnung des Anfangs, oder des Endpunktes eines Zeitraumes. Ich habe sie aber absichtlich nicht nach bestimmtem Eintheilungsgrunde aufgeführt, weil es dem Schüler mehr Uebung bringt, wenn er die Aufgaben ohne alle Vorbemerkungen und Winke erhält, er ist dann genöthigt, sein Nachdenken mehr anzustrengen, und die Aufgaben treten ihm alsdann so entgegen, wie das wirkliche Leben sie ihm vorführt. — Es bleibt nun nichts mehr zu thun, als den Schülern noch eine Anzahl Aufgaben aus der Zeitrechnung zur mündlichen und schriftlichen Uebung zu geben.

Einige Aufgaben zur mündlichen Uebung.

1) Wie viel Stunden des Tages sind verflossen: des Morgens um 9 Uhr, des Nachmittags um 5 Uhr, des Abends um 11, Mittags um 12, Mitternachts um 12? (A. 9, 17, 23, 12, 24 Stunden.)
2) Wie viel Zeit des Tages ist verflossen: um $^1/_2$ 9 Uhr Morgens; um $^3/_4$ auf 10 Uhr Morgens, um $^1/_4$ nach 11 Uhr Morgens, um $^1/_4$ vor 8 Uhr Abends, um 11 Uhr 40 Minuten Morgens, um 3 Uhr 57 Minuten Nachmittags? (A. $8^1/_2$, $9^3/_4$, $11^1/_4$, $19^3/_4$ Stunden, 11 St. 40 M., 15 St. 57 Minuten.)

Anmerkung. $^3/_4$ auf 10 Uhr heißt: $^3/_4$ nach 9 Uhr = $^1/_4$ vor 10 Uhr.

3) Wie viel Monate, Tage und Stunden des Jahres sind in einem gewöhnlichen Jahre verflossen: den 18. Januar Morgens um 11 Uhr; den 11. Mai Abends um 7 Uhr; den 3. August früh um $^3/_4$ auf 5 Uhr; den 11. November $2^1/_2$ Stunden vor Mitternacht; den 29. Oktober 7 Minuten vor $^1/_2$ 4 Nachmittags? (A. 17 T. 11 St. — 130 T. 19 St. — 214 T. $4^3/_4$ St. — 314 T. $21^1/_2$ St. — 301 T. 15 St. 23 Minuten.)
4) Wie viel Jahre, Monate, Tage, Stunden und Minuten sind seit Christi Geburt verflossen:

   1829 den 3. März; 1829 den 11. April, Morgens um 4 Uhr; 1829 den 3. Juli Abends um $^1/_2$ 11 Uhr; 1563 den 28. Februar $^1/_4$ vor 7 Uhr Morgens; 1690 den 27. Februar Abends 7 Min. vor $^1/_2$ 12 Uhr; 1830 den 30. December 5 Min. nach $^3/_4$ auf 11 Uhr Morgens; 1872 den 27. Mai $^1/_4$ Stunde vor 10 Uhr 52 Minuten Nachts? (A. 1828 J. 2 M. 2 T. — 1828 J. 3 M. 10 T. 4 St. — 1828 J. 6 M. 2 T. 22 St. 30 Min. — 1562 J. 1 M. 27 T. 6 St. 45 M. — 1689 J. 1 M. 26 T. 23 St. 23 M. — 1829 J. 11 M. 29 T. 10 St. 50 M. — 1871 J. 4 M. 26 T. 22 St. 37 Min.)
5) Wie viel Zeit seit Christi Geburt war verflossen:
   a. als Benjamin Franklin den 17. April 1790 starb? (A. 1789 J. 3 M. 16 T.)
   b. als Friedrich I. 1701 den 18. Januar sich zum Könige von Preußen machte? (A. 1700 J. 17 T.)
   c. als der dreißigjährige Krieg 1618 den 23. Mai seinen Anfang nahm? (A. 1617 J. 4 M. 22 T.)
   d. als der westphälische Friede 1648 den 24. Oktober geschlossen wurde? (A. 1647 J. 9 M. 23 T.)
   e. bis zur Schlacht von Leipzig den 18. Oktober 1813? (A. 1812 J. 9 M. 17 T.)
   f. bis zur Schlacht von Belle-Alliance den 18. Juni 1815? (A. 1814 J. 5 M. 17 T.)
6) Welches Datum schrieb man:
   a. 1773 J. 3 Monate nach Christi Geburt? (A. 1774, 1. April.)
   b. 1643 J. 7 M. 3 T. nach Christi Geburt? (A. 1644, 4. August.)
   c. 1773 J. 11 M. 5 T. 4 St. nach Christi Geburt? (A. 1774, 6. December Morgens 4 Uhr.)
   d. 1823 J. 1 M. 29 T. 15 St. nach Christi Geburt? (A. 1824, 1. März Nachmittags 3 Uhr.)
   e. 1827 J. 9 M. 24 T. 23 St. nach Christi Geburt? (A. 1828, 25. Okt. Nachts 11 Uhr).

f. 1825 J. 7 M. 13 T. 13 St. 15 Minuten nach Christi Geburt? (A. 1826, 14. August Nachmittags 1 Uhr 15 Min.)
g. 1826 J. 8 M. 27 T. 21 St. 24 Min. nach Christi Geburt? (A. 1827, 28. Sept. 9 Uhr 24 Min. Abends.)

7) Wie groß ist der Unterschied der Zeit, oder wie viel Zeit verfloß:
a. zwischen dem Tode Jesu 33 J. n. C. und der Geburt Muhameb's 570 J. n. C.? (A. 537 J.)
b. zwischen dem Tode Raphael's 1520 und dem Tode Ruben's 1640? (A. 120 J.)
c. zwischen dem 24. Januar 1820 und dem 11. März desselben Jahres? (A. 46 T.)
d. zwischen dem 30. April 1823 und dem 11. Juli 1826? (A. 3 J. 72 T.)
e. zwischen dem 18. Juni 1813 und dem 18. Oktober 1815? (A. 2 J. 4 Mon.)
f. zwischen dem 13. December 1790 und dem 1. Mai 1804? (A. 13 J. 4 M. 18 T.)
g. zwischen der Geburt Luther's den 10. November 1483 und seinem Tode den 18. Februar 1546? (A. 62 J. 3 M. 8 T.)
h. zwischen der Geburt des Königs von Rom 1811 den 20. März und dem Tode Napoleon's 1821 den 6. Mai? (A. 10 J. 1 M. 16 T.)

8) In welchem Jahre
a. wurden die Repetiruhren erfunden, da sie 176 Jahre später als die Taschenuhren, welche man 1500 erfand, erfunden wurden? (A. 1676.)
b. wurde Friedrich der Große geboren, da er 1786 starb und 74 J. alt war? (A. 1712.)
c. starb Karl, da er 24 J. 7 M. alt wurde und 1804 den 12. November geboren war? (A. 1829, 12. Juni.)
d. wurde A geboren, da er 1822 den 28. December in einem Alter von 33 J. 10 M. starb? (A. 1789, 28. Febr.)

9) Jemand wurde 1804 den 12. Mai geboren, und er starb 1812 den 16. Oktober; wie alt ist er geworden? (A. 8 J. 5 M. 4 T.)

10) 1801 den 22. Dec. wurde ein Haus gebaut; es brannte 1826 den 4. Juni ab; wie lange hat es gestanden? (A. 24 J. 5 M. 13 T.)

11) Jemand ist geboren 1784 den 17. Aug. und alt geworden 23 J. 9 M. 4 T.; wann ist er gestorben? (A. 1808, den 21. Mai.)

12) Gellert wurde 1715 den 4. Juli geboren, und er erreichte ein Alter von 54 J. 5 M. 9 T.; wann starb er? (A. 1769 den 13. December.)

Anmerkung 1. Aufgaben zur schriftlichen Uebung über die Zeitrechnung so wie über diesen ganzen Abschnitt siehe pract. Rechenbuch I. Abschn. X.

Anmerkung 2. Die Kalendereinrichtung, welche wir in Deutschland und in den meisten Ländern finden, stammt zunächst von dem Papste Gregorius XIII., welcher um's Jahr 1582 n. C. G. lebte, her. Bis auf diesen Papst rechnete man nach der sogenannten Julianischen Zeitrechnung, welche von Julius Cäsar, welcher 44 Jahre vor C. G. starb, herrührte. Diese Julianische Zeitrechnung hatte die Zeit des Umlaufes der Erde um die Sonne nicht ganz richtig angegeben. Daher kam es, daß die Julianische Zeitrechnung bis zum Jahre 1582 n. C. G. um 10 Tage von dem wahren Sonnenjahre abwich, in-

dem der Frühlingsanfang, welcher um den 21. März eintritt, auf den 11. März gesetzt war. Gregorius verbesserte diesen Fehler dadurch, daß er befahl, in diesem Jahre 1582 jene 10 Tage in der Zählung zu überspringen, und gleich nach dem 4. Oktober den 15. (statt den 5.) zu schreiben. Diese verbesserte Zeitrechnung nennt man die Gregorianische, zum Unterschiede von der Julianischen; jene befindet sich in dem sogenannten verbesserten, diese in dem Kalender nach alter Art; jene nennt man auch den neuen, diese den alten Styl. Es geht daraus hervor, daß seit Gregorius zwischen dem alten und neuen Style ein Unterschied statt findet. Derselbe betrug, von 1582 bis 1700, 10 Tage. Da das Jahr 1700 nach dem alten Style ein Schaltjahr, nach dem neuen aber ein gemeines Jahr war, so wuchs der Unterschied im Jahre 1700 um einen Tag, er betrug daher von 1700 bis 1800 11 Tage. Aus gleichem Grunde beträgt dieser Unterschied von 1800 bis 1900 12 Tage, von 1900 — 2000 13 Tage. Die Russen rechnen noch nach dem Julianischen Kalender oder nach dem alten Style. Folglich trifft die Art, das Datum des Monates anzugeben, bei den Russen und den übrigen europäischen Nationen nicht mit einander überein, sondern die Russen sind gegenwärtig gegen uns in der Zeitrechnung um 12 Tage zurück. An dem Tage z. B., an welchem wir den 20. Mai schreiben, schreiben die Russen den 8. Mai: und wenn ein Brief von Petersburg nach Düsseldorf kommt, welcher am 27. April alten Styles geschrieben ist, so ist er nach dem in Düsseldorf geltenden Kalender 12 Tage später, d. h. den 9. Mai geschrieben worden. Deßhalb pflegt man, wenn von Begebenheiten in Rußland die Rede ist, jedesmal beizufügen, ob die Zeitrechnung des alten oder des neuen Styles zu Grunde gelegt ist. Wir fügen darüber noch einige Fragen bei.

a. Was für ein Datum war:
der 18. November 1582 alten Styles nach dem neuen Style? (A. 1582, 28. November.)
der 7. Juni 1599, 1653, 1789, 1824 a. St. nach dem neuen Style? (A. 1599 und 1653, 17. Juni. — 1789, 18 Juni. — 1824, 19. Juni.)
der 18. Februar 1607, 1709, 1827 a. St. nach dem neuen Style? (A. 1607 28. Februar — 1709, 1. März — 1827, 2. März.)

b. Was für ein Datum war:
der 12. Decbr. 1584 n. St. nach dem alten Style? (A. 1584, 2. Decbr.)
der 13. August 1612, 1783, 1823 n. St. nach dem alten Style? (A. 1612, 3. August — 1783, 2. August — 1823, 1. Aug.)
der 26. April 1573, 1603, 1701, 1814 n. St. nach dem alten Style? (A. 1573, 16. April — 1603, 16 April — 1701, 15. April — 1814, 14. April.)

c. Folgende Monatstage a. St. verwandle in Monatstage neuen Styles!
Der 12. Januar 1648. Der 12. December 1699. Der 27. Decbr. 1733. Der 19. Februar 1624. Der 18 October 1813. Der 25. December 1528. (A. 1648, 22. Jan. — 1699, 22. Decbr. — 1734, 7. Jan. — 1624, 29. Febr. — 1813, 30. Octbr. — 1829, 6. Jan.)

d. Folgende Monatstage n. St. verwandle in Monatstage alten Styles!
Der 2. Januar 1589. Der 10. Januar 1612. Der 5. October 1699. Der 3 August 1700. Der 24. Febr. 1794. Der 28. Decbr. 1800. Der 11. April 1829. (A. 1588, 23. Decbr. — 1611, 31. Decbr. — 1699, 25. Sept. — 1700, 23. Juli. — 1794, 13. Febr. — 1800, 16. Decbr. — 1829, 30. März.)

Anmerkung 3. Der Lehrer glaube nicht, daß die ganze Zeitrechnung in dem Bisherigen abgehandelt sei. Wir haben davon nur das gewöhnlichste Practische, welches im gemeinen Leben vorzukommen pflegt, aufgenommen. Wer sich über die ganze Zeitrechnung und über die gesammte Einrichtung unsers Kalenders gehörig unterrichten will — Gegenstände, welche etwas speculative Köpfe sehr zu reizen pflegen, weil die Zeitrechnung den Scharfsinn in Anspruch nimmt — der kaufe sich das über das Kalenderwesen von Dr. Th. Friedleben herausgegebene interessante Werkchen: „Lehrbuch der Chronologie, oder Zeitrechnung und Kalenderwesen, Frankfurt 1827."

Hier und da erregt der Kalender noch abergläubische Meinungen. Wo dieses der Fall ist, da ist es doppelt nöthig, daß der Lehrer über die Römerzinszahl, den Sonntags-Buchstaben, den Regenten des Jahres, über glückliche und unglückliche Tage u. s. w. Bescheid zu geben wisse.

Achte Stufe.

Vervielfachen und Theilen in benannten ganzen Zahlen.

Erste Uebung.

Das Vervielfachen in benannten ganzen Zahlen.

Vorbemerkung. 3 Sgr. können mit 4 vervielfacht, mit 4 multiplicirt, 4 mal genommen werden; aber 3 Sgr. können nicht mit 4 Sgr., eben so wenig 3 Sgr. mit 4 Loth, oder 4 Loth mit 2 Loth multiplicirt werden. 3 Sgr. × 4 Sgr., 4 Loth × 2 Loth hat gar keinen Sinn. Diesen Satz drückt man allgemein so aus: bei der Vervielfachung benannter Größen kann der Multiplicator nicht selbst eine benannte Zahl sein, sondern dieselbe ist jederzeit eine unbenannte oder reine Zahl.

I. Mündlich.

§. 78. Das Verfahren bei dem mündlichen Vervielfachen.

1) Die zu vervielfachende Zahl hat eine einfache Benennung.

Beispiel 1. 24 Sgr. 3mal genommen, wie viel? (A. 2 Thlr. 12 Sgr.)

Auflösung. 24 Sgr. × 3 = 3mal 24 Sgr. = 72 Sgr.; 30 Sgr. = 1 Thlr.; so oft 30 Sgr. in 72 Sgr. enthalten sind, so oft habe ich 1 Thlr.; 30 Sgr. sind in 72 Sgr. 2mal enthalten mit dem Reste von 12 Sgr.; also ist 24 Sgr. × 3 = 2 Thlr. 12 Sgr.
Besser (für's Kopfrechnen — ein für alle Mal): 72 Sgr. = 2 × 30 + 12 Sgr. = 2 Thlr. 12 Sgr.

Beispiel 2. Wie viel Pfund und Loth gibt es, wenn man 29 Loth 7mal nimmt? (Ant. 6 Pfund 11 Loth.)

Auflösung. 7 × 29 L. = 7 × 20 + 7 × 9 L. = 140 + 63 L. = 203 L.; 32 L. = 1 Pfd.; so oft daher 32 L. in 203 L. enthalten sind; so viel Pfd. sind es; 32 L. sind in 203 L. 6mal enthalten mit dem Reste von 11 Loth; denn 6 × 32 L. = 192 L.; 203 L. — 192 L. = 11 L.; also sind 7 × 29 L. = 6 Pfd. 11 L.

Beispiel 3. 11 Zoll (zwölfth. M.) 20mal genommen, wie viel Fuß und Zoll? (A. 18 F. 4 Z.)

Auflösung. 20 × 11 Z. = 220 Z.; 12 Zoll = 1 Fuß; 12 Z. sind in 220 Z. 18mal enthalten mit dem Reste von 4 Zoll; also sind 20 × 11 Zoll = 18 Fuß 4 Zoll.

Regel: Ist eine einfach benannte Zahl zu multipliciren, so vervielfacht man diese Zahl so, als wenn sie eine reine Zahl wäre, und theilt nachher das Product mit der betreffenden Reductionszahl, wenn das Product dieselbe erreicht oder übersteigt.

2) Die zu vervielfachende Zahl hat eine mehrfache Benennung.

Beispiel 1. 3 Thlr. 8 Sgr. 4mal genommen, gibt wie viel? (A. 13 Thlr. 2 Sgr.)

Auflösung 1. 4 × 3 Thlr. = 12 Thlr.; 4 × 8 Sgr. = 32 Sgr. = 1 Thlr. 2 Sgr.; 12 Thlr. + 1 Thlr 2 Sgr. = 13 Thlr. 2 Sgr.; u. s. w.

Auflösung 2. 4 × 8 Sgr. = 32 Sgr. = 1 Thlr. 2 Sgr.; 4 × 3 Thlr. = 12 Thlr.; 1 Thlr. 2 Sgr. + 12 Thlr. = 13 Thlr. 2 Sgr.; folglich u. s. w.

Beispiel 2. Was erhält man, wenn man 10 Pfd. 12 Loth 8mal nimmt? (A. 83 Pfd.)

Auflösung. 8 × 10 Pfd. = 80 Pfd.; 8 × 12 L. = 96 L. = 3 Pfd.; 80 Pfd. + 3 Pfd. = 83 Pfd.; folglich u. s. w.

Beispiel 3. 12 Thlr. 22 Sgr. 3 Pf. 7mal genommen, gibt wie viel? (A. 89 Thlr. 5 Sgr. 9 Pf.)

Auflösung. 7 × 3 Pf. = 21 Pf. = 1 Sgr. 9 Pf.; 7 × 22 Sgr. = 154 Sgr. = 5 Thlr. 4 Sgr.; 1 Sgr. 9 Pf. + 5 Thlr. 4 Sgr. = 5 Thlr. 5 Sgr. 9 Pf.; 7 × 12 Thlr. = 84 Thlr.; 84 Thlr. + 5 Thlr. = 89 Thlr.; also ist 7 × (12 Thlr. 22 Sgr. 3 Pf.) = 89 Thlr. 5 Sg. 9 Pf.

Beispiel 4. 8 Pfd. 4 L. 3 Qt., 20mal, wie viel? (A. 1 Ctr. 52 Pfd. 31 Loth.)

Auflösung. 20 × 8 Pfd. = 160 Pfd.; 20 × 4 L. = 80 L. = 2 Pfd. 16 L.; 160 Pfd. + 2 Pfd. 16 L. = 162 Pfd. 16 L.; 20 × 3 Qt. = 60 Qt. = 15 L.; 16 L. + 15 L. 31 L.; also ist 20 × (8 Pfd. 4 L. 3 Qt.) = 162 Pfd. 31 L. = 1 Ctr. 52 Pfd. 31 L.

Regel: Wenn eine mehrfach benannte Zahl zu multipliciren ist, so vervielfacht man eine jede einzelne Sorte mit dem Multiplicator, indem man entweder mit der höchsten oder mit der niedrigsten Sorte anfängt; übersteigt ein Product die betreffende Reductionszahl, so verwandelt man dasselbe durch Division mit der Reductionszahl in die höhere Sorte und fügt es dem Producte der höheren Sorte bei.

Anmerkung. Wenn die Schüler nur einige Uebung im mündlichen Rechnen besitzen, so werden sie selbst auf mancherlei Abkürzungen stoßen, welche bei dem Vervielfachen der benannten Zahlen anzubringen sind, und die einzelnen Schüler werden diese Aufgaben auf verschiedene Weise rechnen. Dies ist eine vom Lehrer mit Beifall aufzunehmende, zu begünstigende Erscheinung. Man erhält hierin einen Maßstab zur Beurtheilung des Werthes des ertheilten Rechenunterrichts. Halten sich alle Schüler an dieselbe Form, so ist der Unterricht einseitig und wenig bildend gewesen; auf je mannigfaltigere Weise die Schüler dieselbe Aufgabe behandeln, desto vielseitiger und bildender ist die Rechenstunde. Daher hört man in Schulen, welche in dieser Hinsicht ihre Schuldigkeit thun, die Schüler, wenn eine Aufgabe von einem einzelnen Schüler auf seine Weise aufgelöset ist, rufen: „ich kann es anders." Der Lehrer begünstige auf alle Weise diese freie Geistesbewegung. Wir wollen ihn hier auf einige Abkürzungen, welche in manchen Fällen anzuwenden sind, aufmerksam machen.

a. Beispiel 1. 30 × 4 Sgr., wie viel Thlr.?

Auflösung. Ob ich 30 × 4 Sgr. oder 4 × 30 Sgr. nehme, ist einerlei; denn 30 × 4 = 4 × 30. Nun sind 30 Sgr = 1 Thlr; also sind 4 × 30 Sgr. = 4 Thlr.

Beispiel 2. 12 × 27 Pf., wie viel Sgr.?

Auflösung. Da 12 Pf. = 1 Sgr. so kehre ich die Ordnung der Factoren um; 27 × 12 Pf. = 27 × 1 Sgr. = 27 Sgr.

Beispiel 3. 32 × 29 Loth, wie viel Pfd.?

Auflösung. 32 L. = 1 ℔; also 29 × 32 L. = 29 × 1 ℔ = 29 ℔.

Regel: Wenn der Multiplicator der Reductionszahl der niederen Sorte in die höhere gleich ist, so kehrt man die Ordnung der Factoren um. Alsdann gibt die Zahl der Sorte, welche vervielfacht werden sollte, unmittelbar die Anzahl der höheren Sorte.

12 × 9 Zoll zwölfth.	=	9 × 12 Z. = 9 × 1 F. = 9 F.
12 × 19 Pfen.	=	19 Sgr.
30 × 31 Sgr.	=	31 Thlr.
30 × 100 Sgr.	=	100 Thlr.
20 × 27 Buch	=	27 Ries.
24 × 11 Bogen	=	11 Buch.
24 × 33 Stunden	=	33 Tage.
30 × 66 Tage	=	66 Monate (im Durchschn.) u. s. w.

b. Beispiel 1. 36 × 7 Pf., wie viel Sgr.?

Auflösung. 36 Pf. = 3 Sgr.; 7 × 3 Sgr. = 21 Sgr.; also sind 36 × 7 Pf. = 21 Sgr.

Beispiel 2. 90 × 45 Sgr., wie viel?

Auflösung. 90 Sgr. = 3 Thlr.; 45 × 3 Thlr. = 135 Thlr.; also u. s. w.

Beispiel 3. 93 × 22 Sgr., wie viel? (A. 68 Thlr. 6 Sgr.)

Auflösung. 93 Sgr. = 3 Thlr. 3 Sgr.; 22 × 3 Thlr. = 64 Thlr.; 22 × 3 Sgr. = 66 Sgr. = 2 Thlr. 6 Sgr.; 66 Thlr. + 2 Thlr. 6 Sgr. = 68 Thlr. 6 Sgr.; also sind 93 × 22 Sgr. = 68 Thlr. 6 Sgr.

Beispiel 4. 66 × 27 Loth, wie viel Pfd.? (A. 55 Pfd. 22 L.)

Auflösung. 66 L. = 2 × 32 + 2 L. = 2 Pfd. 2 Loth; 27 × 2 Pfd. = 54 Pfd.; 27 × 2 Loth = 54 Loth = 1 Pfd. 22 L.; 54 Pfd. + 1 Pfd. 22 L. = 55 Pfd. 22 L.; also u. s. w.

Regel: Wenn die Zahl, mit welcher eine Sorte vervielfacht werden soll, sich bequem in die Sorte, welche höher ist als die zu multiplicirende Sorte, verwandeln läßt, so thut man dies, und multiplicirt dieselbe alsdann mit derjenigen Zahl, welche eigentlich multiplicirt werden sollte.

c. Beispiel 1. 4mal 9 Sgr. 10 Pf.; (A. 39 Sgr. 4 Pf.)

Auflösung. Statt 9 Sgr. 10 Pf. nehme ich 10 Sgr., also 2 Pf. zu viel; nun multiplicire ich 10 Sgr. mit 4, und ziehe vom Producte wieder 4 × 2 Pf., welche zu viel genommen worden sind, ab. Alsdann habe ich das verlangte Product.

4 × 10 Sgr. = 40 Sgr.; 4 × 2 Pf. = 8 Pf.; 40 Sgr. — 8 Pf. = 39 Sgr. 4 Pf.

Beispiel 2. 13 × 8 Thlr. 27 Sgr., wie viel? (A. 115 Thlr. 21 Sgr.)

Auflösung. Statt 8 Thlr. 27 Sgr. nehme ich 9 Thlr., und ziehe vom Producte 13 × 3 Sgr. ab.

13 × 9 Thlr. = 117 Thlr.; 13 × 3 Sgr. = 39 Sgr. = 1 Thlr. 9 Sgr.; 117 Thlr. — 1 Thlr. 9 Sgr. = 115 Thlr. 21 Sgr.

Beispiel 3. 54mal 16 Sgr. 7 Pf., wie viel? (A. 29 Thlr. 25 Sgr. 6 Pf.)

Auflösung 16 Sgr. = ½ Thlr. + 1 Sgr.; 7 Pf. = ½ Sgr. + 1 Pf.; also nehme ich 54 × ½ Thlr. = 27 Thlr.; 54 × 1 Sgr. = 54 Sgr. = 1 Thlr. 24 Sgr.; 27 Thlr. + 1 Thlr.

24 Sgr. = 28 Thlr. 24 Sgr.; 54 × ½ Sgr. = 27 Sgr.; 54 × 1 Pf. = 54 Pf. = 4 Sgr. 6 Pf.; 27 Sgr. + 4 Sgr. 6 Pf. = 31 Sgr. 6 Pf.; 28 Thlr. 24 Sgr. + 31 Sgr. 6 Pf. = 29 Thlr. 25 Sgr. 6 Pf.

Regel: Wenn sich die zu vervielfachende Zahl durch Hinzufügen oder Hinwegnehmen in eine zur Ausrechnung bequemere Zahl verwandeln läßt, so thut man dies, multiplicirt diese bequemere Zahl, und zieht vom Producte das Erforderliche ab, oder fügt es hinzu.

d. Beispiel 1. 19 × 8 Thlr. 11 Sgr., wie viel? (A. 158 Thlr. 29 Sgr.)

Auflösung. Statt 19 nehme ich die Zahl 20, also 20 × 8 Thlr. 11 Sgr.; vom Producte ziehe ich 1 × 8 Thlr. 11 Sgr. ab, alsdann habe ich das verlangte Product.

20 × 8 Thlr. = 160 Thlr.; 20 × 11 Sgr. = 220 Sgr. = 7 Thlr. 10 Sgr.; 160 Thlr. + 7 Thlr. 10 Sgr. = 167 Thlr. 10 Sgr.; 167 Thlr. 10 Sgr. — 8 Thlr. 11 Sgr. = 158 Thlr. 29 Sgr.

Beispiel 2. 31 × 7 Pfd. 20 L., wie viel? (A. 236 Pfd. 12 L.)

Auflösung. 31 = 30 + 1; also 30 × 7 Pfd. 20 L. + 1 × 7 Pfd. 20 L.; 30 × 7 Pfd. = 210 Pfd.; 30 × 20 L. = 600 L. = 18 Pfd. 24 L.; 210 Pfd. + 18 Pfd. 24 L. = 228 Pfd. 24 L.; 228 Pfd. 24 L. + 7 Pf. 20 L. = 236 Pfd. 12 L.

Regel: Läßt sich der Multiplicator durch Hinzufügen oder Hinwegnehmen in eine bequemere Zahl verwandeln, so thut man dies, multiplicirt mit derselben, und zieht nachher das, was zu viel oder zu wenig genommen ist, wieder ab.

II. Schriftlich.

§. 79. Das Verfahren bei dem schriftlichen Vervielfachen.

Beispiel 1. 52 Pfd. 12 mal genommen, wie viel Ctr? (A. 5 Ctr. 74 Pfd.)

Auflösung. Die Aufgabe selbst sagt unmittelbar, was geschehen soll. 52 Pfd. sollen mit 12 vervielfacht werden. Also ist 52 Pfd. der Multiplicand, 12 der Multiplicator. Man setzt daher beide, wie bei der Multiplication, unter einander, und multiplicirt. Das Product hat die Benennung Pfund. Dieselben verwandelt man durch Division mit 110 in Ctr.

Berechnung. 52 Pfd.

```
        12
       ----
       104
       52
       ----
110 |  624 | 5 Ctr. 74 Pfd.
    |  550 |
       ----
        74
```

Beispiel 2. 24 Pfund 27 Loth 3 Quentchen sollen 24 mal genommen werden. (A. 5 Ctr. 46 Pfd. 26 Loth.)

Auflösung. Hier sind zwei Auflösungsarten am gebräuchlichsten.

1) Man multiplicirt die Pfd., Loth, Quentchen mit 24, mit der kleinsten Sorte, hier also mit den Quentchen, anfangend, und verwandelt nun dieses Product in Loth. Hierauf multiplicirt man die Loth mit 24, addirt zum Producte die Anzahl Loth, welche bei der Reduction der Quentchen gefunden wurde, und reducirt die Loth auf Pfund. Dann multiplicirt man die Pfd. mit 24, addirt zum Producte die Pfd., welche bei der Reduction der Loth herauskamen, und reducirt die Pfd. auf Ctr.

```
     3 Quent.           27 L.                  24 Pfd.
    24                  24                     24
  -------             ------                 ------
4 | 72 | 18 Loth       108                     96
  |  4 |                54                     48
  -------             ------                 ------
    32                 648                    576
    32              +   18                 +   20
  ------              ------                 ------
    ..         32 |  666 | 20 ℔ 26 L.  110 | 596 | 5 Ctr.
                  |   64 |                 | 550 |
                    ------                 ------
                      26                     46
```

Product: 5 Ctr. 46 Pfd. 26 Loth.

2) Oder man verwandelt die höheren Sorten in die niedrigste; man bringt also in unserem Beispiele alles auf Quentchen, multiplicirt die gefundene Zahl Quentchen mit 24, und reducirt nun dieses Product auf Loth, Pfd. und Ctr.

Berechn. 24 Pfd. 27 Loth 3 Quentchen.

```
     32
   -----
     48
     72
   -----
    768
  +  27
   -----
    795
      4
   -----
   3180
  +   3
   -----
   3183 Quentchen
     24
   -----
  12732
  6366          32              110
  ---------
4 | 76392 Qt. | 19098 Loth | 596 Pfd. | 5 Ctr. 46 Pfd. 26 L.
  |  4        |  160       | 550      |
  | ------    | ------     | ------   |
  |  36       |   309      |  46 Pfd. |
  |  36       |   288      |
   ------       ------
     39           218
     36           192
   ------       ------
     32            26 Loth
     32
   ------
     ..
```

Es leuchtet ein, daß letzteres Verfahren das weitläuftigere, weniger zu empfehlende ist. — Wir setzen noch die Berechnung eines Beispieles nach beiden Verfahrungsweisen her.

Beispiel 3. Jemand kauft eine Anzahl Waaren für 29 Thlr. 16 Sgr. 9 Pf. Er bestellt das 30fache dieser Waaren. Wie viel muß er zahlen? (A. 886 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.)

Berechnung a.

```
 29 Thlr.              16 Sgr.               9 Pf.
 30                    30                    30
 ----                  ----                  -----
 870                   480              12 | 270 | 22 Sgr.
 16                    22                  | 24  |
 ----                  ----                  -----
 886 Thlr         30 | 502 | 16 Thlr.        30
                     | 30  |                 24
                     -------                 ----
                       202                    6 Pf.
                       180
                       ----
                       22 Sgr.
```

Product: 886 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.

Berechnung b.

```
 29 Thlr. 16 Sgr. 9 Pf.
 30
 ----
 870
 16                                  30
 ----
 886 Sgr.     12 | 319230 Pf.      | 26602 Sgr.  | 886 Thlr.
 12              | 24              | 24
 -----             -----             -----
 1772               79                26
 886                72                24
 -----             -----             -----
 10632              72                20
 9                  72                18
 -----             -----             -----
 10641 Pf.          30                22 Sgr.
 30                 24
 ------            -----
 319230 Pf.          6 Pf.
```

Allgemeine Regel. Sollen mehrfach benannte Zahlen vervielfacht werden, so schreibt man den Multiplicator unter die mehrfach benannten Zahlen, welche den Multiplicanden bilden, und fängt die Multiplication mit der geringsten Sorte an. Uebersteigt das Product die Reductionszahl für die nächst höhere Sorte, so reducirt man dasselbe auf diese nächst höhere Sorte. Hierauf multiplicirt man den zweiten Theil des Multiplicanden, und addirt zum Producte die durch die Reduction der niedrigsten Sorte gefundene Zahl. Uebersteigt diese Summe die Reductionszahl für die nächst höhere Sorte, so reducirt man abermals u. s. w.

Oder: Man verwandelt die höheren Sorten in die niedrigste, multiplicirt die gefundene Zahl mit dem Multiplicator, und reducirt dieses Product auf die höheren Sorten.

(Siehe pract. Rechenbuch I. Abschn. XI.)

Zweite Uebung.

Das Theilen in benannten ganzen Zahlen.

I. Mündlich.

§. 80. Das Verfahren bei dem mündlichen Theilen.

Beispiel 1. Wie groß ist der vierte Theil von 2 Thlr. pr. Cr.?

Auflösung 1. Der vierte Theil von 1 Thlr. ist $\frac{1}{4}$ Thlr., der vierte Theil von 2 Thlr. ist $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Thlr. = 15 Sgr.; also u. s. w.

Auflösung 2. 2 Thlr. = 60 Sgr., der vierte Theil von 60 Sgr. = 15 Sgr.

Beispiel 2. Wie oft sind 4 Sgr. in 2 Thlr. enthalten?

Auflösung. Hier verwandelt man 2 Thlr. in Sgr.; 2 Thlr. = 60 Sgr.; 4 Sgr. sind in 60 Sgr. 15mal enthalten.

Wir haben oben das Verhältniß des Theilens und Enthaltenseins betrachtet. Die beiden vorhergehenden Beispiele zeigen, daß dieses hier in Anwendung kommt. Bei dem eigentlichen Theilen einer benannten Zahl ist der Theiler eine unbenannte Zahl. Das erste Beispiel und die noch folgenden zeigen das einzuschlagende Verfahren anschaulich. Von dem Enthaltensein einer benannten Zahl in einer andern benannten Zahl kann nur die Rede sein, wenn beide nicht nur gleichartig, sondern auch gleichnamig sind, oder wenigstens gleichnamig gemacht werden können. Ist jenes nicht der Fall, so hat die Aufgabe gar keinen Sinn. (Was sollte man sich bei der Frage denken: Wie oft sind 3 Loth in 2 Thlr. enthalten? — Unsinn! —) Ist dieses nicht der Fall, so müssen die Zahlen erst gleichnamig gemacht werden. Alsdann theilt man mit dem Divisor in den Dividenden. Der Quotient ist eine reine Zahl. Wir behandeln das Theilen und Enthaltensein benannter Zahlen in einigen Beispielen. Der Lehrer gibt nach diesen Mustern so viele Beispiele, als nöthig sind.

A. Das Theilen benannter Zahlen.

Die benannten Zahlen sind entweder einfach oder mehrfach benannt. Wir wählen Beispiele.

Beispiel 1. Wie groß ist der 6te Theil von 8 Thlr. pr. C.? (Antw. 1 Thlr. 10 Sgr.)

Auflösung. 8 Thlr. sind = 6 Thlr. + 2 Thlr.; der 6te Theil von 6 Thlr. ist 1 Thlr.; der 6te Theil von 1 Thlr. = $\frac{1}{6}$ Thlr.; der 6te Theil von 2 Thlr. = $\frac{2}{6}$ Thlr. = $\frac{1}{3}$ Thlr. = 10 Sgr. — Oder: der 6te Theil von 1 Thlr. = $\frac{1}{6}$ Thlr. = 5 Sgr.; der 6te Theil von 8 Thlr. (= $\frac{8}{6}$ Thlr. $1\frac{2}{6}$ Thlr. = $1\frac{1}{3}$ Thlr.) = 8 × 5 Sgr. = 40 Sgr. = 1 Thlr. 10 Sgr. — Oder: 8 Thlr. = 8 × 30 Sgr. = 240 Sgr.; der 6te Theil von 240 Sgr. = 40 Sgr. = 1 Thlr. 10 Sgr.

Beispiel 2. Wie groß ist der 10te Theil von 24 Thlr. 12 Sgr.? Antw. 2 Thlr. $13\frac{1}{5}$ Sgr.)

Auflösung. Hier nehme ich entweder zuerst den 10ten Theil von 24 Thlrn., verwandle den Rest der Thlr. in Sgr., füge

dieselben zu den Sgr., und nehme von dieser Summe auch den 10ten Theil. — Oder ich verwandle die Thlr. in Sgr., füge die 12 Sgr. hinzu, nehme von dieser Summe auch den 10ten Theil und reducire auf Thlr.

Also: Der 10te Theil von 24 Thlr. = 2 Thlr.; es bleiben noch 4 Thlr. zu theilen übrig; 4 Thlr. = 4 × 30 = 120 Sgr.; 120 Sgr. + 12 Sgr. = 132 Sgr.; der 10te Theil von 132 Sgr. ist $13\frac{2}{10}$ = $13\frac{1}{5}$ Sgr.; also ist der 10te Theil von 24 Thlr. 12 Sgr. = 2 Thlr. $13\frac{1}{5}$ Sgr.

Oder: 24 Thlr. = 24 × 30 Sgr. = 720 Sgr.; 720 Sgr. + 12 Sgr. = 732 Sgr.; der 10te Theil von 732 Sgr. = $73\frac{2}{10}$ Sgr. = 2 Thlr. $13\frac{1}{5}$ Sgr.

Beispiel 3. Wie groß ist der 7te Theil von 28 Thlr. 21 Sgr. 7 Pf.? (Antw. 4 Thlr. 3 Sgr. 1 Pf.)

Auflösung. $\frac{1}{7}$ von 28 Thlr. = 4 Thlr.; $\frac{1}{7}$ von 21 Sgr. = 3 Sgr.; $\frac{1}{7}$ von 7 Pf. = 1 Pf.; also ist $\frac{1}{7}$ von 28 Thlr. 21 Sgr. 7 Pf. = 4 Thlr. 3 Sgr. 1 Pf.

Beispiel 4. Wie groß ist der 3te Theil von 10 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf.? (Antw. 3 Thlr. 15 Sgr. 3 Pf.)

Auflösung. $\frac{1}{3}$ von 10 Thlr. = 3 Thlr.; Rest 1 Thlr.; 1 Thlr. = 30 Sgr.; 30 Sgr. + 15 Sgr. = 45 Sgr.; $\frac{1}{3}$ von 45 Sgr. = 15 Sgr.; $\frac{1}{3}$ von 9 Pf. = 3 Pf.; also $\frac{1}{3}$ von 10 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf. = 3 Thlr. 15 Sgr. 3 Pf.

Beispiel 5. Wie groß ist der 8te Theil von 27 Pfd. 13 Loth 2 Qt.? (Antw. 3 Pfd. 13 L. $2\frac{3}{4}$ Qt.)

Auflösung. $\frac{1}{8}$ von 27 Pfd. = 3 Pfd.; Rest 3 Pfd.; 3 Pfd. = 3 × 32 = 96 L.; 96 L. + 13 L. = 109 L.; $\frac{1}{8}$ von 109 L. = 13 L.; Rest 5 L.; 5 L = 5 × 4 = 20 Qt.; 20 Qt. + 2 Qt. = 22 Qt.; $\frac{1}{8}$ von 22 Qt. = $2\frac{6}{8}$ Qt. = $2\frac{3}{4}$ Qt.; also ist $\frac{1}{8}$ von 27 Pfd. 13 L. 2 Qt. = 3 Pfd. 13 L. $2\frac{3}{4}$ Qt.

Beispiel 6. Wie groß ist $\frac{1}{9}$ von 4 Pfd. 12 L. 3 Qt.? (Antw. 15 L. $2\frac{5}{9}$ Qt.)

Auflösung. 4 Pfd. lassen sich durch 9 nicht ohne Rest theilen; ich verwandle daher die 4 Pfd. in Loth; 4 Pfd. = 4 × 32 = 128 L.; 128 L. + 12 L. = 140 L.; $\frac{1}{9}$ von 140 L. = 15 L.; Rest 5 L.; 5 L. = 5 × 4 = 20 Qt.; 20 Qt. + 3 Qt = 23 Qt.; $\frac{1}{9}$ von 23 Qt. = $2\frac{5}{9}$ Qt.; also ist $\frac{1}{9}$ von 4 Pfd. 12 L. 3 Qt. = 15 L. $2\frac{5}{9}$ Qt.

Beispiel 7. Wie groß ist der 20ste Theil von 11 Gl. 2 Kr.? (Antw. $33\frac{1}{10}$ Kreuzer.)

Auflösung. 11 Gl. = 11 × 60 Kr. = 660 Kr.; 660 Kr. + 2 Kr. = 662 Kr.; der 20ste Theil von 662 Kr. ist = 33 Kr. mit dem Reste von 2 Kr.; der 20ste Theil von 2 Kr. = $\frac{2}{20}$ = $\frac{1}{10}$ Kr.; also ist $\frac{1}{20}$ von 11 Gl. 2 Kr. = $33\frac{1}{10}$ Kr.

Oder: 11 Gl. = 10 Gl. + 1 Gl.; der 20ste Theil von 10 Gl. ist = $\frac{1}{2}$ Gl. = 30 Kr.; 1 Gl. = 60 Kr.; der 20. Theil von 60 Kr. = 3 Kr.; 30 Kr. + 3 K. = 33 Kr.; der 20ste Theil von 2 Kr. = $\frac{2}{20}$ = $\frac{1}{10}$ Kr.; also u. s. w.

Regel: Um mehrfach benannte Zahlen zu theilen, verfährt man so: Entweder: Man dividirt zuerst die höchste Sorte, verwandelt den Rest in die niedrigste Sorte, zählt die gleichnamige Zahl hinzu, theilt diese Summe wieder, verwandelt den etwaigen Rest in die darauf folgende niedrigere Sorte, zählt die gleichnamige Zahl hinzu, theilt abermals u. s. w., bis man in alle Sorten getheilt hat. Oder: Man verwandelt alle Sorten in die niedrigste Sorte, theilt dieselbe und reducirt nun den gefundenen Quotienten auf die höheren Sorten.

B. Das Enthaltensein benannter Zahlen in einander.

Beispiel 1. Wie oft sind 10 Pf. in 5 Sgr. enthalten? A. 6 mal.)

Auflösung. 5 Sgr. = 5 × 12 = 60 Pf.; 10 Pf sind in 60 Pf. 6 mal enthalten; folglich sind auch 10 Pf. in 5 Sgr. 6 mal enthalten.

Beispiel 2. Wie oft muß man 2 Sgr. 3 Pf. nehmen, um 18 Sgr. zu erhalten? (Antw. 8 mal.)

Auflösung. 2 Sgr. 3 Pf. = 2 × 12 + 3 = 27 Pf.; 18 Sgr. = 18 × 12 Pf. = 18 × 10 + 18 × 2 = 180 + 36 = 216 Pf.; 27 Pf. sind in 216 Pf. 8 mal enthalten; also muß man 2 Sgr. 3 Pf. 8 mal nehmen, um 18 Sgr. zu erhalten.

Beispiel 3. Wie oft sind 3 Thlr. 10 Sgr. in 20 Thlr. 20 Sgr. enthalten? (Antw. $6\frac{1}{5}$ mal.)

Auflösung. 3 Thlr. 10 Sgr. = 100 Sgr.; 20 Thlr. = 20 × 30 = 600 Sgr.; 600 + 20 Sgr. = 620 Sgr.; 100 Sgr. sind in 620 Sgr. $6\frac{20}{100} = 6\frac{1}{5}$ mal enthalten; folglich u. s. w.

Beispiel 4. Wie oft sind 1 Pfd. 8 L. in 8 Pfd. 24 L. enthalten? (Antw. 7 mal.)

Auflösung. 1 Pfd. 8 L. = 32 L. + 8 L. = 40 L.; 8 Pfd. = 8 × 32 = 256 L.; 256 L. + 24 L. = 280 L.; 40 L. sind in 280 L. 7 mal enthalten; also u. s. w.

Regel: Um zu finden, wie oft eine benannte Zahl in einer andern benannten, ihr gleichartigen Zahl enthalten ist, macht man zuerst, wenn's nöthig ist, die gleichartigen Zahlen gleichnamig, und theilt alsdann mit der einen Zahl in die andre (nämlich mit derjenigen, von welcher angegeben werden soll, wie oft sie in der andern enthalten ist.)

II. Schriftlich.

§. 81. Das Verfahren bei dem schriftlichen Theilen.

Die Gründe des schriftlichen Verfahrens sind natürlich ganz dieselben, wie die des mündlichen Verfahrens. Man bedient sich der Ziffern, wenn die Zahlen zu groß werden, als daß sie bequem im Kopfe behandelt werden könnten. Auch hier kommt das eigentliche Theilen benannter Zahlen durch unbenannte Zahlen und das Enthaltensein benannter Zahlen in einander vor. Beides bedarf zur Erläuterung nur weniger Beispiele.

A. Das schriftliche Theilen benannter Zahlen.

Beispiel 1. Welches ist der 37ste Theil von 810 Thlr pr. C.? (Antw. 23 Thlr. 7 Sgr. $3\frac{21}{37}$ Pf.)

Auflösung. Wir theilen 860 Thlr. durch 37; geht die Division auf, so ist die Operation zu Ende; geht sie nicht auf, so verwandeln wir die noch übrig bleibenden Thlr. in Sgr. und theilen diese durch 37; geht nun diese Division auf, so ist die Sache zu Ende; bleibt aber wieder ein Rest, so verwandeln wir die übrig bleibenden Sgr. in Pf. und theilen nochmals u. s. w.

Berechnung: 37 | 860 Thlr. | 23 Thlr.
74
120
111
Rest 9 Thlr.
× 30
37 | 270 Sgr. | 7 Sgr.
259
Rest 11 Sgr.
× 12
22
11
37 | 132 Pf. | 3 Pf.
111
21

Quotient: 23 Thlr. 7 Sgr. 3 Pf., mit einem Reste von 21 Pf.

Diese 21 Pf. müssen eigentlich auch noch durch 37 getheilt werden. Die Lehrer wissen, daß dieses einen Bruch gibt. Aber die Brüche werden erst in der Folge behandelt? Doch das thut nichts. Auch haben wir bisher schon manchmal bei Theilungen Brüche erhalten. Und wenn auch erst später die ganze Behandlung der Brüche gelehrt werden kann, so vermeide man es doch nicht, wie es auch bisher schon geschehen und als geschehen vorausgesetzt wird, die Schüler anschaulich mit der Theilung kleinerer Zahlen durch größere bekannt zu machen. In der Wissenschaft mag das ein arger Schnitzer sein; aber für das Leben ist dieses ein Gewinn. Und darum gehört solches Vorausnehmen in den Unterricht. Diese Bemerkung stehe hier noch ein für alle Mal! — Wir theilen daher auch den Rest von 21 Pf. noch durch 37. Der 37ste Theil von 1 Pf. ist $= \frac{1}{37}$ Pf.; der 37ste Theil von 21 Pf. ist $= \frac{21}{37}$ Pf. Der ganze Quotient heißt also: 23 Thlr. 7 Sgr. $3\frac{21}{37}$ Pf.

Beispiel 2. Welches ist der 16te Theil von 37 Thlr. 26 Sgr.? (Antw. 2 Thlr. 11 Sgr.)

Berechnung a. 16 | 37 Thlr. | 2 Thlr.
32
Rest 5 Thlr.
× 30
150
\+ 26
16 | 176 Sgr. | 11 Sgr.
16
16
16
\- -

Quotient: 2 Thlr. 11 Sgr.

Berechnung b. 37 Thlr. 26 Sgr.

× 30
1110
+ 26
16 | 1136 Sgr. | 30 71 Sgr. | 2 Thlr.
112 | 60
16 | 11 Sgr.
16
= =

Quotient: 2 Thlr. 11 Sgr.

In a. wurden die 37 Thlr. zuerst durch 16 getheilt, der Rest in Sgr. verwandelt und die 26 Sgr. hinzugezählt; dann abermals durch 16 getheilt.

In b. wurden die Thlr. in Sgr. verwandelt, die 16 Sgr. hinzugezählt, nun getheilt, dann reducirt.

Beispiel 3. Wie groß ist der 26ste Theil von 12 Ct. 92 Pfd. 18 Loth? (A. 54 Pfd. 10 L. $2\frac{4}{26}$ Qt.)

Berechnung.

12 Ctr. 92 Pfd. 18 L.
× 110
120
12
1320
+ 92
26 | 1412 Pfd. | 54 Pfd.
130
112
104
Rest 8 Pfd.
× 32
256
+ 18
26 | 274 Loth | 10 L.
26
Rest 14
× 4
26 | 56 Qt. | $2\frac{4}{26}$ Qt.
52
4

Quot.: 24 Pfd. 10 L. $2\frac{4}{26}$ Qt.

Oder: 12 Ct. 92 Pfd. 18 L.
× 110
120
12
1320
+ 92
1412 Pf.
× 32
2824
4236
45184
+ 18
26 | 45202 L. | 32 1738 L. | 54 Pfd.
26 | 160
192 | 138
182 | 128
100 | 10 L.
78
222
208
$\frac{14}{26}$ L.

Quotient: 54 Pf. $10\frac{14}{26}$ L.

Der zweite Quotient ist dem ersten gleich. Denn $\frac{14}{26}$ Loth = $\frac{14}{26} \times 4$ Qt. = $\frac{56}{26}$ Qt. = $2\frac{4}{26}$ Qt.

Diese Beispiele reichen hin, das Verfahren bei dem schriftlichen Theilen zu veranschaulichen.

B. Das schriftliche Verfahren bei der Untersuchung, wie oft eine benannte Zahl in einer andern benannten enthalten ist.

Beispiel 1. Wie oft sind 27 Sgr. in 33 Thlr. 9 Sgr. enthalten? (Antw. 37 Mal.)

Auflösung. Hier ist 27 Sgr. der Divisor, 33 Thlr. 9 Sgr. der Dividend. Da beide gleichnamige Größen sein müssen, so verwandelt man die 32 Thlr. 9 Sgr. in Sgr., und dividirt nun mit dem Divisor in den Dividenden. Der Quotient ist eine reine Zahl und gibt an, wie oft 27 Sgr. in 33 Thlr. 9 Sgr. enthalten sind.

Berechnung. 33 Thlr. 9 Sgr.
× 30
990
+ 9
27 Sgr. | 999 Sgr. | 37 Mal.
81
189
189
= = =

Beispiel 2. Wie oft sind 7 Thlr. 3 Sgr. in 58 Thlr. 15 Sgr. enthalten? (Antw. $8\frac{51}{213}$ Mal.)

Berechnung. 7 Thlr. 3 Sgr. — 58 Thlr. 15 Sgr.
× 30 — × 30
210 — 1740
+ 3 — + 15
213 Sgr. — 1755 Sgr.
213 | 1755 | $8\frac{51}{213}$ Mal.
1704
51

Beispiel. 3. Wie oft muß man 2 Pfd. 3 L. 2 Qt. nehmen, um 24 Pfd. 8 L. 1 Qt. zu bekommen? (Antw. $11\frac{1}{2}$ mal.)

Berechnung. 2 Pfd. 3 L. 2 Qt. — 24 Pfd. 8 L. 1 Qt.
× 32 — × 32
64 — 48
+ 3 — 72
67 L. — 768
× 4 — + 8
268 — 776
+ 2 — × 4
270 Qt. — 3104
+ 1
3105 Qt.

```
270 | 3105 | 11 135/270 = 11 1/2 Mal.
    | 270  |
    ------
      405
      270
    ------
      135
```

(Siehe prakt. Rechenbuch I. Abschn. XII.)

Dritte Uebung.

Anwendung der beiden vorhergehenden Uebungen auf die sogenannte Multiplications und Divisions-Regel-de-Tri.

Vorbemerkung. Die Regel-de-Tri (oder die Lehre vom Dreisatze) gründet sich nach der gewöhnlichen (althergebrachten) Ansicht bekanntlich auf die Lehre von den Verhältnissen und Verhältnißgleichungen, und wenn man sie allseitig gründlich abhandeln will, so pflegt man ihrer Behandlung die angegebenen Lehren vorauszuschicken. Allein das practische Leben bekümmert sich nicht um diese wissenschaftlichen Absonderungen und Eintheilungen; sondern es führt dem Menschen die Aufgaben, von aller wissenschaftlichen Form entkleidet, vor. Gewöhnlich reicht ein einigermaßen gebildeter Verstand, verbunden mit den erforderlichen wenigen Geschäfts- und Lebenskenntnissen, dazu hin, diese Aufgaben des Lebens richtig zu beurtheilen und zu lösen. Ueberdies ist es unleugbar gewiß, daß sich die wissenschaftlichen Regeln aus den Operationen des Verstandes, wie sie im practischen Leben vorkommen, aber nicht umgekehrt die Anwendungen im Leben sich aus der zuerst aufgestellten wissenschaftlichen Bearbeitung hervorgearbeitet haben. Aus diesen Gründen ist es pädagogisch ganz richtig, wenn man es nicht ausschließlich mit wissenschaftlicher, sondern mit practischer Bildung fürs Leben zu thun hat, manche Gegenstände aus der wissenschaftlichen Ordnung heraus zu nehmen und dem Verstande der Schüler alsdann vorzurücken, sobald derselbe zu ihrer Behandlung die gehörige Vorbereitung erhalten hat. Also wird es nun auch hier mit denjenigen Aufgaben des practischen Lebens geschehen, welche sich auf Vervielfachung und Theilung gründen. Doch aber nehmen wir nur die leichteren Fälle vor. Das gewöhnliche practische Leben führt dem Menschen in der Regel nur ganz einfache Aufgaben vor. Wenn daher ein Schüler in dem Rechenunterricht nicht weiter kommt, als bis zu dieser Stufe; so wird er in den gewöhnlichen Verhältnissen des Lebens sich leicht zurecht zu finden wissen. Die Kenntniß der Proportions-Lehre wird zur vollständigen Durchschauung und bildenden Behandlung der hieher gehörigen Aufgaben gar nicht erfordert, ja diese Lehre kann füglich ohne allen Nachtheil aus dem Kreise des Rechenunterrichtes in Elementarschulen ausgeschlossen bleiben. Wir werden daher die nachfolgenden Aufgaben ganz ohne sie behandeln, gewiß zum Vortheil aller Schulen, sowohl derer, welche mit ihnen ihren Rechencursus beschließen, als auch derjenigen, welche späterhin die Proportionslehre kennen lernen. — Außerdem führt die Behandlung derselben Sache zu verschiedenen Zeiten und auf verschiedene Weise noch eigenthümliche Vortheile herbei. Eine zweite, nach Unterbrechung durch andere Gegenstände vorgenommene Behandlung *einer* Sache (der Regel-de-Tri, z. B.) bringt dem Schüler die früheren Kenntnisse wieder zu klarem Bewußtsein, frischt sie auf und erweitert sie. Ein solches Verfahren ist der Natur der Entwickelung des menschlichen Geistes gemäß. Es bringt in den Unterricht den nöthigen Reiz. Wer dieses übersieht, wird über die Anlage eines *Schulbuchs* nothwendig ein schiefes Urtheil fällen; besonders dann, wenn er den Werth desselben aus dem Standpunkte der *Wissenschaft* mißt.

Vorstehende Bemerkungen unterschreibe ich jetzt (bei der Erscheinung der vierten Auflage) nicht nur, sondern ich steigere sie. Die auf die Lehre von den Proportionen gegründete Rechnungsweise ist in gewöhnlichen Elementarschulen nicht nur unnöthig und überflüssig, sondern schädlich. Jenes, weil alle Zwecke des Rechenunterrichts, die formalen wie die materialen, ohne die Proportionslehre erreicht werden können, und zwar auf dem einfachsten Wege; dieses: 1) weil die Lehre von den Proportionen zu abstract ist; 2) weil ihre Anwendung den meisten Schülern nicht deutlich wird; 3) weil sich ihnen dadurch die frühere Klarheit wieder verdunkelt. — Bei der Behandlung der Proportionslehre muß daher der Lehrer die Schüler entweder schrauben, oder mechanisches Verfahren erlauben. Darum überlasse man sie höheren Schulen! Diese Beschränkung wird zwar manchen Lehrern (besonders jungen strebenden) schwer; aber sie wird von der pädagogischen Einsicht dictirt. —

I. Mündlich.

§. 82. Das Verfahren mit den Gründen.

Beispiel 1. 1 Pfd. kostet 7 Sgr.; was kosten 13 Pfd.? (Antw. 3 Thlr. 1 Sgr.)

Auflösung. Wenn 1 Pfd. 7 Sgr. kostet, so kosten 2 Pfd. 2 × 7 Sgr., 3 Pfd. 3 × 7 Sgr., 13 Pfd. 13 × 7 Sgr. = 91 Sgr. = 3 Thlr 1 Sgr.; also kosten 13 Pfd. 3 Thlr. 1 Sgr.

Beispiel 2. Wenn 6 Pfd. 1 Thlr. 24 Sgr. kosten; was kostet 1 Pfd.? (Antw. 9 Sgr.)

Auflösung. Wenn 6 Pfd. 1 Thlr. 24 Sgr. kosten, so kostet die Hälfte von 6 Pfd. auch die Hälfte von 1 Thlr. 24 Sgr., der dritte Theil von 6 Pfd. auch den dritten Theil von 1 Thlr. 24 Sgr. u. s. w.; 1 Pfd. ist der sechste Theil von 6 Pfd.; folglich kostet 1 Pfd. auch den sechsten Theil von 1 Thlr. 24 Sgr. = 54 Sgr.; der sechste Theil von 54 Sgr. = 9 Sgr.; also kostet 1 Pfd. 9 Sgr.

Beispiel 3. Für 1 Sgr. erhält man 2 Pfd. Kirschen; wie viel Pfd. für 12 Sgr.? (Antw. 24 Pfd.)

Auflösung. Wenn man für 1 Sgr. 2 Pfd. erhält, so erhält man für 2 × 1 Sgr. auch 2 × 2 Pfd.; für 3 × 1 Sgr. 3 × 2 Pfd.; so oft man einen Sgr. anwendet, so oft erhält man 2 Pfd.; man wendet 12 × 1 Sgr. an; also erhält man für 12 Sgr. 12 × 2 Pfd. = 24 Pfd.

Beispiel 4. Wenn man für 5 Sgr. 2 Ellen kauft; wie viel kauft man alsdann für 40 Sgr.? (Antw. 16 Ellen.)

Auflösung. Wie oft ich 5 Sgr. ausgebe, so oft erhalte ich 2 Ellen; wie oft daher 5 Sgr. in 40 enthalten sind, so oft erhalte ich 2 Ellen; 5 Sgr. sind in 40 Sgr. 8 mal enthalten: also erhält man für 40 Sgr. 8 × 2 = 16 Ellen. Oder: 40 Sgr. = 8 × 5 Sgr.; also 8 × 2 Ellen = 16 Ellen.

Wenn wir zusehen, nach welchen Gründen und Schlüssen diese 4 einfachen Aufgaben aufgelöset worden sind, so finden wir folgende Sätze:

Waaren und Geld stehen in einem bestimmten Wechselverhältniß.

Je mehr Waare ich kaufe, desto mehr Geld muß ich zahlen.
— weniger — — — weniger — — —
Die doppelte Menge Waare erheischt die doppelte Menge Geldes.
— dreifache — — — — dreifache — —
— vierfache — — — — vierfache — —

die halbe Menge Waare erheischt die halbe Menge Geldes.
das Drittel — — — das Drittel — —
— Viertel — — — — Viertel — —

So viel mal eine gewisse Menge Waare gekauft wird, so viel mal muß der Preis der einfachen Wenge Waare bezahlt werden. Der so vielste Theil einer gewissen Menge Waare gekauft wird, der eben so vielste Theil des Preises der einfachen Waarenmenge wird bezahlt. —

Je mehr Geld man anwendet, desto mehr Waare erhält man.
— weniger — — — — weniger — — —
Für die doppelte Menge des Geldes erhält man die doppelte Waarenmenge;
— — dreifache — — — — — — dreifache —
— — vierfache — — — — — — vierfache —
— — Hälfte — — — — — — Hälfte —
— das Drittel — — — — — das Drittel —

So viel mal eine gewisse Summe ausgegeben wird, so viel mal erhält man die Waarenmenge, welche für die einfache Summe gekauft wird. Der so vielste Theil einer gewissen Summe ausgegeben wird, den eben so vielsten Theil der Waarenmenge erhält man.

Waaren und ihre Preise stehen also in einem solchen Verhältnisse zu einander, daß sie in gleichem Grade wachsen und abnehmen.

In ähnlichem Wechselverhältnisse stehen noch andere Gegenstände des Lebens, z. B. Anzahl der Arbeiter und Menge des Lohnes, Zeit der Arbeit und Größe des Lohnes, Schwere der Fracht und Größe des Frachtlohnes, Weite des Weges und Größe des Fuhrlohns.

Je mehr Arbeiter, desto mehr Arbeitslohn;
doppelte Anzahl der Arbeiter, doppelter Arbeitslohn;
halbe — — — halber — u. s. w.
Je länger die Zeit der Arbeit, desto größer der Lohn;
doppelte — — — doppelter —
halbe — — — halber — u. s. w.
Je schwerer die Fracht, desto größer der Frachtlohn;
— leichter — — — kleiner — — u. s. w.
halbe — halber —
doppelte — doppelter — u s. w.
Je weiter der Weg, desto größer der Lohn;
— kürzer — — — kleiner — —
halber — halber —
doppelter — doppelter — u. s. w.

Anmerkung. Macht der Schüler bei der Vergleichung von Fracht und Frachtlohn, Weg und Lohn die Bemerkung, daß es im practischen Leben doch nicht ganz so sei, wie oben angegeben worden, so ist darauf einzugehen.

In den aufgelöseten 4 Beispielen waren 3 Größen gegeben (bekannt), aus welchen eine 4te Größe gefunden werden sollte; z. B. für 2 Sgr. erhält man 7 Pfd., wie viel Pfd. für 10 Sgr.? In allen diesen Aufgaben sind 3 Größen gegeben, welche zur Auffindung einer 4ten Veranlassung werden sollen. Daher nennt man die Rechnungsart, zu welcher diese Aufgaben gehören, die Rechnungsart von drei Größen = Regel-de-Tri = Regel vom Dreisatze. Von diesen

3 gegebenen Größen sind 2 jederzeit gleichartige Größen; in dem angezogenen Beispiele 2 Sgr. und 10 Sgr. Nun ist ferner angegeben, wie viel Pfd. man für eine gewisse Menge Sgr., hier für 2 Sgr., erhält, und es wird gefragt, wie viel Pfd. man für die andre Menge Sgr., hier für 10 Sgr., erhält. Den 2 Sgr. entsprechen 7 Pfd.; man will wissen, wie viel Pfd. den 10 Sgr. entsprechen. Jene beiden Größen, 2 Sgr. und 7 Pfd., bilden die Bedingung, die beiden andern Größen, 10 Sgr. und die gesuchte Anzahl Pfd., bilden die Frage. Beantwortet wird dieselbe, indem ich die Mengen der Sgr., 2 Sgr. und 10 Sgr. mit einander vergleiche, und aus ihrem Verhältnisse auf die Menge der Pfd. schließe, welche den 10 Sgr. entsprechen; 10 Sgr. sind 5×2 Sgr.; folglich erhält man für 10 Sgr. auch 5 mal so viel Pfd., als man für 2 Sgr. erhalten hat, d. h. 5×7 Pfd. $= 35$ Pfd. Wie nun den 2 Sgr. 7 Pfd. entsprechen, so entsprechen den 10 Sgr. 35 Pfd. — 2 Sgr. sind in 10 Sgr. 5 mal enthalten; deßgleichen sind 7 Pfd. in 35 Pfd. 5 mal enthalten. — Aehnliche Betrachtungen finden bei den übrigen Aufgaben, welche hierher gehören, statt. — Sollen die Fälle unterschieden werden, welche hier vorkommen können, so sind es folgende:

a. Entweder soll aus dem Werthe einer Einheit eines Gegenstandes der Werth einer bestimmten Menge desselben oder eines gleichartigen Gegenstandes berechnet werden; 1 Loth kostet 3 Sgr.; wie viel kosten 10 Loth oder 10 Pfd? Diese Aufgabe wird durch Multiplication aufgelöset; 10 Loth kosten 10 mal 3 Sgr. Daher gehören diese Aufgaben zur sogenannten Multiplications-Regel-de-Tri.

b. Oder man soll aus dem Werthe einer bestimmten Anzahl von Gegenständen den Werth der Einheit eines gleichartigen Gegenstandes bestimmen; z. B. 10 Pfd. kosten 1 Thlr., wie viel kostet 1 Pfd.? Diese Aufgabe wird durch Division aufgelöset; 1 Pfd. kostet den 10ten Theil von 1 Thlr. oder 30 Sgr. $= {}^{30}/_{10}$ $= 3$ Sgr. Daher gehören diese Aufgaben zur sogenannten Divisions-Regel-de-Tri.

c. Oder der Werth einer gewissen Anzahl von Gegenständen ist bestimmt, und man soll den Werth einer gewissen andern Anzahl gleichartiger Gegenstände bestimmen; z. B. 3 Pfd. kosten 12 Sgr., wie viel kosten 9 Pfd.? Diese Aufgabe wird durch Division und Multiplication aufgelöset; 1 Pfd. kostet den dritten Theil von 12 Sgr. $= {}^{12}/_{3} = 4$ Sgr.; also 9 Pfd. 9 mal 4 Sgr. $= 36$ Sgr.; oder: so oft 3 Pfd. in 9 Pfd. enthalten sind, so oft kosten 9 Pfd. 12 Sgr.; 3 Pfd. sind in 9 Pfd. 3 mal enthalten, also kosten 9 Pfd. $3 \times 12 = 36$ Sgr. Diese Aufgaben bilden eine Verbindung der Multiplications- und Divisions-Regel-de-Tri.

Beispiel 5. Das Gras einer Wiese wird von 4 Arbeitern in 12 Stunden abgemäht; in wie viel Stunden wird dieses Gras von 1 Arbeiter abgemäht? (Antw. in 48 Stunden.)

Auflösung. 4 Arbeiter brauchen 12 Stunden Zeit zum Abmähen des Grases; 1 Arbeiter braucht natürlich längere Zeit, und zwar,

da er in derselben Zeit nur den vierten Theil der Arbeit vollendet, welche 4 Arbeiter in dieser Zeit vollenden, 4 mal so viel Zeit, als die 4 Arbeiter, also $4 \times 12 = 48$ Stunden.

Beispiel 6. Wie viel Pfd. Brod erhält man für 1 Kr., wenn das Malter Roggen 4 Gl. kostet, da man für 1 Kr. 2 Pfd. erhält, wenn das Malter Roggen 8 Gl. kostet? (Antw. 4 Pfd.)

Auflösung. Je theurer der Roggen ist, desto weniger Pfd. Brod erhält man für 1 Kr.; je wohlfeiler der Roggen, desto mehr Pfd. erhält man für 1 Kr.; wenn der Roggen 3 mal so theuer wird, so erhält man für 1 Kr. nicht 3 mal so viel, sondern nur den dritten Theil der Pfd. Brod. In unserm Beispiele erhält man für 1 Kr. 2 Pfd., wenn das Malter Roggen 8 Gl. kostet; nun kostet aber das Malter nur 4 Gl., also nur halb so viel; folglich erhält man nun für 1 Kr. 2 mal so viel Pfd. Brod, d. h. 2×2 Pfd. $= 4$ Pfd.

Diese 2 Beispiele stellen eine andere Art der Wechselwirkung ungleichartiger Größen auf; im ersten Beispiele nahm mit der Zahl der Arbeiter die Zahl der Stunden nicht ab, sondern zu, und zwar in gleichem Grade; in dem Grade, in welchem die Zahl der Arbeiter abnimmt, in demselben Grade nimmt die Zahl der Stunden zu; im zweiten Beispiele nimmt die Menge der Pfd. Brod in demselben Maße zu, in welchem der Preis des Malters Roggen abnimmt. Um dieselbe Arbeit zu vollenden, gehören

zu der halben Anzahl der Arbeiter			2 mal so viel	Stunden.
— dem dritten Theile	—	—	3 — — —	—
— — vierten	—	—	4 — — —	—
— der doppelten	—	—	die Hälfte der	—
— — dreifachen	—	—	das Drittel —	—

Dem halben Preise des Roggens entspricht bei derselben Geldsumme die doppelte Menge der Pfd. Brod;

dem dritten Theile des Preises	—	—	dreifache
— vierten — — —	—	—	vierfache
— doppelten Preise	—	—	halbe
— dreifachen —	—	—	das Drittel
— vierfachen —	—	—	das Viertel

In demselben Maße oder Grade, in welchem das eine Verhältniß steigt, nimmt das andre Verhältniß ab; in demselben Grade, in welchem das eine Verhältniß abnimmt, nimmt das andre Verhältniß zu.

Andre Beispiele dieser Art der Wechselwirkung:

Je schwerer die Fracht, desto weniger weit wird sie gefahren für dasselbe Geld; doppelte Fracht, halbe Weite des Weges; dreifache Fracht, Drittel des Weges; u. s. w. *)

---

*) Man muß die Schüler darauf aufmerksam machen, daß Obiges, namentlich das Beispiel mit dem Frachtlohn, in der Praxis nur zum Theil gilt, also nicht ganz richtig ist. Wenn z. B. ein Fuhrmann für 10 Thlr. 12 Ctr. 6 Meilen weit fährt, so wird er 1 Ctr. nicht 12 mal $6 = 72$ Meilen weit fahren. Practische Lebensverhältnisse beschränken hier die Theorie. Deshalb wähle man auch solche Beispiele, gegen welche sich nichts erinnern läßt!

Je leichter die Fracht ist, desto weiter wird sie gefahren für dasselbe Geld; Hälfte der Fracht, doppelte Weite des Weges u. s. w.

Je breiter ein Zeug ist, aus welchem ein bestimmtes Kleid verfertigt werden soll, desto weniger lang braucht es zu sein; doppelte Breite des Zeuges, halbe Länge; zehnfache Breite, Zehntel der Länge. Je weniger breit ein solches Zeug ist, desto größer muß die Länge genommen werden für dasselbe Kleid; halbe Breite, doppelte Länge; Zehntel der Breite, zehnfache Länge; u. s. w.

Auch in diesen Fällen sind immer drei Größen gegeben, aus welchen eine 4te gefunden werden soll; 2 gleichartige und eine der einen dieser gleichartigen entsprechende andere Art von Größen; man soll die dieser letztern Art von Größen gleichartige finden, welche der andern der beiden gegebenen gleichartigen Größen entspricht. Auch hier werden die Aufgaben entweder durch die Multiplications-, oder durch die Divisions-Regel-de-Tri, oder durch beide zugleich aufgelöset. — Wir trennen diese verschiedenen Arten nicht von einander, und nicht von den Aufgaben nach früherer Art, sondern führen vermischte Beispiele auf, deren Auflösung jedesmal aus einer leichten Beurtheilung der Verhältnisse folgt.

Beispiel 7. 8 Pfd. Zucker kosten 3 Thlr. 6 Sgr.; wie viel kosten 15 Pfd.? (Antw. 6 Thlr.)

Auflösung. 8 Pfd. kosten 3 Thlr. 6 Sgr., folglich 1 Pfd. den 8ten Theil von 3 Thlr. 6 Sgr.; 3 Thlr. 6 Sgr. sind 96 Sgr.; der 8te Theil von 96 Sgr. = 12 Sgr.; also kostet 1 Pfd. 12 Sgr.; folglich 15 Pfd. 15 × 12 = 180 Sgr. oder 6 Thlr.

Beispiel 8. Wie viel kosten 22 Pfd., wenn 1 Pfd. 3 Sgr. 4 Pf. kostet? (Antw. 2 Thlr. 13 Sgr. 4 Pf.)

Auflösung. 1 Pfd. kostet 3 Sgr. 4 Pf., also 22 Pfd. 22 mal 3 Sgr. und 22 mal 4 Pf.; 22 × 3 Sgr. = 66 Sgr. = 2 Thlr. 6 Sgr.; 22 mal 4 Pf. = 88 Pf. = 7 Sgr. 4 Pf.; 2 Thlr. 6 Sgr. + 7 Sgr. 4 Pf. = 2 Thlr. 13 Sgr. 4 Pf.; also kosten 22 Pfd. 2 Thlr. 13 Sgr. 4 Pf.

Beispiel 9. 2 Pfd. einer Waare kosten 5 Thlr. 18 Sgr. 8 Pf.; wie viel kosten 30 Pfd.? (Antw. 84 Thlr. 10 Sgr.)

Auflösung. 1 Pfd. kostet die Hälfte dessen, was 2 Pfd. kosten, also in vorliegendem Falle die Hälfte von 5 Thlr. 18 Sgr. 8 Pf.; die Hälfte von 5 Thlr. ist 2 Thlr. 15 Sgr.; die Hälfte von 18 Sgr. 8 Pf. ist 9 Sgr. 4 Pf.; 2 Thlr. 15 Sgr. + 9 Sgr. 4 Pf. = 2 Thlr. 24 Sgr. 4 Pf.; folglich 30 Pfd. 30 mal so viel; 30 × 2 Thlr. = 60 Thlr.; 30 × 24 Sgr. = 720 Sgr. = 24 Thlr.; 60 + 24 = 84 Thlr.; 30 × 4 Pf. = 120 Pf. = 10 Sgr.; also kosten 30 Pfd. 84 Thlr. 10 Sgr.

Beispiel 10. Wie viel kostet 1 Loth einer Waare, wenn 1 Pfd. dieser Waare 4 Thlr. 8 Sgr. kostet? (Antw. 4 Sgr.)

Auflösung. 1 Loth ist der 32ste Theil eines Pfd., also kostet 1 Loth den 32sten Theil von 4 Thlr. 8 Sgr. oder von 128 Sgr., d. h. 4 Sgr.

Beispiel 11. Ein Fuhrmann fährt eine Waarenmenge 12 Meilen weit für 36 Thlr.; wie weit wird er den dritten Theil der Waare für dasselbe Geld fahren? (Antw. 36 Meilen.)

Auflösung. Je weniger Waare ein Fuhrmann aufladet, desto weiter fährt er dieselbe für den Frachtlohn; die Hälfte der Waare fährt er doppelt so weit, das Drittel der Waarenmenge 3 mal so weit, also in unserm Beispiele 3 mal 12 = 36 Meilen, (nach der Theorie, nicht nach der Praxis.)

Beispiel 12. Eine Wiese wird von 10 Mähern in 14 Stunden abgemäht; wie lange haben 2 Mäher damit zu thun? (Antw. 70 Stunden.)

Auflösung. 2 Mäher sind der 5te Theil von 10 Mähern; also arbeiten 2 Mäher an demselben Werke 5 mal so lange als 10 Mäher, d. h. 5 mal 14 = 70 Stunden.

Beispiel 13. 40 Maurer führen eine Mauer in 12 Tagen auf; in wie viel Tagen werden 24 Maurer mit derselben Arbeit fertig? (Antw. In 20 Tagen.)

Auflösung. Wenn 140 Maurer 12 Tage nöthig haben, so braucht 1 Maurer 40 × 12 Tage = 480 Tage; 24 Maurer also den 24sten Theil von 480 Tagen, d. h. 20 Tage.

Beispiel 14. Für 3 Sgr. erhält man 20 Loth Weißbrod, wenn das Malter Roggen 8 Thlr. kostet; wie viel Loth Weißbrod würde man für 3 Sgr. erhalten, wenn das Malter Roggen 40 Thlr. kostete? (Antw. 4 Loth.)

Auflösung. Je theurer das Korn, desto leichter das Brod für dasselbe Geld; doppelter Preis des Korns, halbe Schwere des Brodes; dreifacher Preis des Korns, Drittel der Schwere des Brodes. 40 Thlr. sind 5 × 8 Thlr.; also ist das Korn 5 Mal so theuer geworden; folglich erhält man jetzt für 3 Sgr. nur den 5ten Theil von 20 Loth, d. h. 4 Loth.

Beispiel 15. 16 Pferde weiden in 7 Tagen eine Wiese ab; wie bald werden 4 Pferde damit fertig? (Antw. In 28 Tagen.)

Auflösung. 1 Pferd findet auf dieser Wiese 16 × 7 Tage = 112 Tage Futter; 4 Pferde also nur den 4ten Theil von 112 Tagen, d. h. 28 Tage.

Oder: 4 Pferde sind der 4te Theil von 16 Pferden; also kommen sie mit demselben Futter 4 mal so lange aus, als 16 Pferde, d. h. 4 × 7 = 28 Tage.

Beispiel 16. Ein Weber erhält für das Weben von 13 Ellen Zeug 8 Thlr. 7 Sgr.; wie viel wird er für 27 Ellen erhalten? (Antw. 17 Thlr. 3 Sgr.)

Auflösung. Wenn er für 13 Ellen 8 Thlr. 7 Sgr. erhält, so erhält er für eine Elle den 13ten Theil dieses Geldes, d. h. von 8 × 30 + 7 = 247 Sgr., welches 19 Sgr. sind; also erhält er für 27 Ellen 27 × 19 Sgr. = 513 Sgr. = 17 Thlr. 3 Sgr.

Beispiel 17. Jemand braucht täglich auf einer Reise 3 Thlr. 4 Sgr. 2 Pf.; wie viel in 1 Monat von 30 Tagen? (A. 94 Thlr. 5 Sgr.)

Beispiel 18. Wie theuer ist ein Morgen (= 160 □Ruthen)

Land, wenn die Quadratruthe 2 Thlr. 5 Sgr. kostet? (Antw. 346 Thlr. 20 Sgr.)

Beispiel 19. Jemand bezahlt täglich 4 Sgr. 10 Pf. für Kost; wie viel in 60 Tagen? (Antw. 9 Thlr. 20 Sgr.)

Beispiel 20. Wie viel Scheffel Hafer fressen 24 Pferde in derselben Zeit, in welcher 3 Pferde 63 Scheffel fressen? (Antw. 504 Scheffel.)

Beispiel 21. Wie lange reichen 48 Menschen mit einem gewissen Vorrathe aus, wenn 8 Menschen mit demselben 20 Tage ausreichen würden? (Antw. $3\frac{1}{3}$ Tage.)

Beispiel 22. Jemand gebraucht täglich 2 Thlr. 2 Sgr.; wie lange wird er mit 20 Thlr. 20 Sgr. ausreichen? (Antw. 10 Tage.)

Beispiel 23. Wie viel verdient derjenige, welcher monatlich 18 Thlr. 4 Pf. verdient, in 4 Jahren? (Antw. 864 Thlr. 16 Sgr.)

Beispiel 24. Ein Tischler hat 12 Pulte gemacht; er erhält für jedes Pult 1 Thlr. 25 Sgr. 9 Pf.; wie viel überhaupt? (Antw. 22 Thlr. 9 Sgr.)

Viele solcher Aufgaben, aufgegeben von dem Lehrer und von den Schülern! Diese werden noch Auflösungsweisen finden, welche von den vorher angegebenen abweichen.

II. Schriftlich.

§. 83. Das schriftliche Verfahren.

Die Gründe sind hier dieselben, wie bei dem mündlichen Rechnen. Man pflegt nur diejenigen Aufgaben schriftlich zu berechnen, welche zu große Zahlen enthalten, um sie mündlich leicht, sicher und schnell behandeln zu können. Einige Beispiele werden das Verfahren in's gehörige Licht stellen.

Beispiel 1. Wie viel kosten 93 Ctr. Seife, wenn 1 Ctr. 16 Thlr. 12 Sgr. kostet? (Antw. 1525 Thlr. 6 Sgr.

Ansatz und Ausrechnung:

```
93 × (16 Thlr.   12 Sgr.)      Oder: 93 × (16 Thlr 12 Sgr.)
      93           93                          × 30
------------------------------                 ----
      48           36                          492 Sgr.
    144    |      108                          × 93
    -----  |  ----------                       ----
    1488Th.| 30|1116|37 Thlr.                  1476
      37   |  -| 9 -|                          4428
    -----      -----                           ----
    1525         21                      30 | 45756 | 1525 Th. 6 Sg.
                 21                       — | 3    — |
               -----                        -----
                  6                          15
                                             15
Also: 1525 Thlr. 6 Sgr.                      ----
                                               7
                                               6
                                              ----
                                               15
                                               15
                                              ----
                                                6 Sgr.
```

Erläuterung: Man vervielfacht 12 Sgr. und 16 Thlr. mit 93, verwandelt die Sgr. in Thlr. und zieht sie zu den gefundenen Thlr. hinzu. Oder man verwandelt 16 Thlr. 12 Sgr. in Sgr., vervielfacht dieselben mit 93 und reducirt die gefundenen Sgr. auf Thlr.

Anmerkung. Zu dem Producte 30 × 16 wurden zugleich 12 Sgr. hinzugezählt, der Kürze wegen. Man mache die Schüler darauf aufmerksam!

Beispiel 2. Ein Gast bezahlt einem Wirthe täglich 4 Thlr. 20 Sgr. 5 Pf.; wie groß ist die Rechnung des Gastes in 24 Tagen? (Antw. 112 Thlr. 10 Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung.

a. 4 Thlr. 20 Sgr. 5 Pf. × 24
112 Thlr. 10 Sgr.

b. 4 Thlr. 20 Sgr. 5 Pf. × 6 × 4
28 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. (6
112 Thlr. 10 Sgr. = Pf. (4

c. Oder: 4 Thlr. 20 Sgr. 5 Pf. × 24
× 30
140 (nach voriger Anmerkung)
× 12
285 (desg
140
1685
× 24
6740
3370
12 | 40440 Pf. | 30 | 3370 Sgr. | 112 Thlr. 10 Sgr.
36 | 3
44 | 3
36 | 3
84 | 7
84 | 6
0 | 10

Erläuterung: In a. wurden alle einzelnen Theile des Multiplicanden mit 24 multiplicirt, zuerst die niedrigste Sorte, und das Product in Sgr. verwandelt; hierauf die Sgr. multiplicirt und die vorher gefundenen Sgr. hinzugezählt, dann die Thlr. herausgezogen; nun die Thlr. multiplicirt und die vorher gefundenen Thlr. hinzugezählt.

In b. wurde 24 in seine Factoren 6 und 4 zerlegt und mit jedem einzeln die Multiplication vorgenommen, zuerst mit 6, dann das herauskommende Product mit 4. Man hätte 24 auch in 12 × 2 oder 8 × 3 zerlegen können. Diese Auflösungsweise ist in vielen Fällen sehr bequem.

In c. wurde die ganze Summe in Pfennige aufgelöset und nun mit 24 multiplicirt, das gefundene Product dann auf Sgr. und Thlr. reducirt.

Beispiel 3. Wenn 5 Quentchen einer Waare 12 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf. kosten, wie viel kosten dann 16 Pfd. 4 Loth 1 Quentchen derselben Waare? (Antw. 5242 Thlr. 24 Sgr. 2 Pf.)

Hier sucht man entweder zuerst, wie viel 1 Quentchen kostet, und vervielfacht den Werth desselben mit der Anzahl aller Quentchen; oder man sucht, wie oft 5 Quentchen gekauft werden und multiplicirt mit diesem Quotienten den Werth von 5 Quentchen. Die anzubringenden Abkürzungen wird die Ausrechnung zeigen und eigenes Nachdenken noch andere ermitteln.

Ansatz und Ausrechnung:

1) a. 5 : 12 Thlr. = 2 Thlr. 12 Sgr.
: 20 Sgr. = — 4 „
: 10 Pf. = — — „ 2 Pf.

2 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf.

Oder: 5 : 12 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf.
× 30
380 (!)
× 12
770 (!)
38
5 | 4570 Pf. | 914 Sgr. | 76 | 2 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf.
45 | 84 | 60
7 | 74 | 16 Sgr.
5 | 72
20 | 2 Pf.
20
„ „

b. 16 Pfd. 4 L. 1 Q.
× 32
36 (!)
48
516
× 4
2065 Qt.

2065
2 Pf.
12 | 4130 Pf. | 344 Sgr.
36
53
48
50
48
2 Pf.

2065 Thlr.
2
4130 Thlr.

c. 2 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf. × 2065
2065
16 Sgr.
12390
2065
33040 Sgr.
+ 344
30 | 33384 | 1112 Thlr.
3
3
3
3
3
8
6
24 Sgr.

Product von 2 Thlr. 16 Sgr. 2 Pf. in 2065:
4130 Thlr.
1112 " 24 Sgr. 2 Pf.

Facit: 5242 Thlr. 24 Sgr. 2 Pf.

2) 16 Pfd. 4 L. 1 Qt. = 2065 Qt.
5 Qt. : 2065 Qt. = 413 Mal.
12 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf. × 413

413
10 Pf.
12 | 4130 Pf. | 344 Sgr.
36
53
48
50
48
2 Pf.

413
20 Sgr.
8260 Sgr.
+ 344
30 | 8604 Sgr. | 286 Th.
6
26
24
20
18
24 Sgr. Also: 5242 Th. 24 Sg. 2 Pf.

413
12 Thlr.
826
413
4956 Thlr.
+ 286 —
5242 Thlr.

Erläuterung: In der ersten Ausrechnung gibt a. den Preis eines Quentchens (auf 2 verschiedene Arten); b. die Größe der gekauften Waare in Quentchen; c. die Multiplication aller Quentchen in den Preis des einen Quentchens, also die gesuchte Zahl. In letzterer Ausführung waren 3 einzelne Producte zu suchen und dieselben in eine Summe zu bringen.

In der zweiten Ausrechnung wurde zuerst gesucht, wie oft 5 Quentchen gekauft werden, 413 Mal, welche Zahl dann, mit dem Preise der 5 Quentchen multiplicirt, den Preis aller zusammen hervorbrachte.

Beispiel 4. 60 Soldaten erbeuten eine Summe von 2700 Thlr. 24 Sgr. 6 Pf.; wie groß ist der Antheil eines jeden an dieser Beute? (Antw. 45 Thlr. 5 Pf. beinahe.)

Auch diese Aufgabe kann auf mehrfache Weise ausgerechnet werden; wir wollen hier dieselbe durch Zerlegung des Divisors in Factoren ausrechnen, wenn die Division durch dieselbe aufgeht, oder sich wenigstens mit den bisher vorgetragenen Hülfsmitteln bewerkstelligen läßt.

Divisor — Dividend
60
2 × 3 × 10 | 2) 2700 Thlr. 24 Sgr. 6 Pf.
3) 1350 Thlr. 12 Sgr. 3 Pf. 1r Quotient;
10) 450 Thlr. 4 Sgr. 1 Pf. 2r Quotient;
45 Thlr. $4\frac{1}{10}$ (=5) Pf. Haupt-Quotient.

Anmerkung. Diese Beispiele werden zur Anleitung in der Behandlung dieser Aufgaben hinreichen. Sollte der Lehrer der Meinung sein, daß es besser sei, das über die sogenannte Multiplications- und Divisions-Regel-de-Tri Vorgetragene erst später, z. B. nach der Lehre von den Brüchen, vorzunehmen, so kann dieses ohne Umstände und Nachtheile geschehen. Uebrigens aber wird er nach dem Muster der mitgetheilten Beispiele leicht das Brauchbare für seine Schüler auszuwählen und anzufertigen im Stande sein.

(Siehe das erste Uebungsbuch von D. u. H., Abschn. XI. und XII. 15te Aufl.)

Neunte Stufe.

Das Rechnen mit Brüchen.

Vorbemerkung. In den bisherigen Uebungen sind wir schon bei mancher Gelegenheit auf Einheiten gestoßen, welche getheilt werden sollten und auch theilweise getheilt wurden. Der Schüler hat daher schon an vielen Stellen mit getheilten Einheiten, d. h. mit Brüchen, gerechnet, gewissermaßen, ohne es zu wissen. So ist es naturgemäß; denn das Rechnen mit Brüchen ist gar nicht in dem Grade von dem Rechnen mit ganzen Zahlen verschieden, als viele Lehrer es bis auf den heutigen Tag meinen. Auch findet ein in dem Zahlunterrichte gut geführtes Kind die Behandlung einfacher Brüche gar nicht schwer. Deßhalb haben wir überall, wo darauf gerechnet werden durfte, daß die Anschauungskraft und der Verstand der Schüler groß genug seien, die Theilung der Einheiten und diese getheilten Einheiten zu begreifen, solche Theilungen vorgenommen und herkömmlich benannt. Das Kind kann also eigentlich schon mit Brüchen rechnen, bevor es an die eigentliche Lehre von den Brüchen kommt. Diese Verfahrungsweise möchte nun für eine sehr unmethodische und oberflächliche Behandlung der Zahlenlehre angesehen werden; allein nach meiner Ansicht ist Alles das methodisch und gründlich, was der Schüler auf die gehörige, der Natur des Gegenstandes gemäße, Art sich aneignen, in rationellen Dingen also, was er begreifen kann. Ueberdies kommt im Leben die Trennung zwischen ganzen Zahlen und Brüchen gar nicht vor, und darum stelle die Schule auch da keine Kluft hin, wo im Leben keine zu finden ist. In den alten Schulen überfiel manchen Schüler eine große Angst, wenn er an die Brüche sollte, und zeitlebens dachte er an die Marter, welche die Bruchrechnung ihm verursacht hatte. Die Ansicht von der großen Schwierigkeit der Rechnung mit Brüchen ist sogar öffentliche Meinung geworden, wie wir aus den Sprüchwörtern: „er ist in die Brüche gerathen" — „das geht in die Brüche" u. s. w. erkennen können: da man also von Menschen und von Dingen spricht, deren Verhältnisse schwierig und verwickelt sind. Solche Schwierigkeit hat die Bruchrechnung aber bei ordentlicher Behandlung gar nicht, und schon in tausend Schulen rechnen die Kinder mit gleicher Freudigkeit mit ganzen Zahlen und mit Brüchen. Sonst sprach man im eigentlichen und im uneigentlichen Sinne mit wichtiger Miene und einer Art Grauen: „ja, das ist ein Bruch; das geht in die Brüche;" jetzt ist der Uebergang zwischen ganzen Zahlen und Brüchen geebnet.*) Deßwegen durften wir bei Gelegenheit schon Einiges aus der eigentlichen Bruchrechnung vorwegnehmen. Indessen macht die eigentliche Rechnung mit Brüchen, wenn auch gerade nicht als eigene Rechnungsart, die mit den vier Species in ganzen Zahlen keine Gemeinschaft hätte, doch in ihrem Zusammenhange, als Ganzes betrach-

---

*) Aus diesem einen Umstande kann man auf den großen Unterschied der alten und neuen Schulen schließen. Noch vor 40 Jahren habe ich als Schüler eine Schule nach der Einrichtung des allerältesten Alten durchgemacht. Und es gibt solcher noch. Aber wir trösten uns mit der Gewißheit, daß ihre Anzahl in einer geometrischen Progression abnimmt.

Leider, muß man beifügen, gibt es heut zu Tage auch Neuerungen, die kaum für etwas Besseres zu erachten sind, als das schlechteste Alte. So habe ich Schulen kennen gelernt, in welchen der eine und einheitliche Unterricht in der Zahlenlehre in drei von einander getrennte, auch zum Theil von verschiedenen Lehrern besorgte Zweige zerspalten war: a) Kopfrechnen; b) Tafelrechnen; c) Theorie. Unter diesem Namen figurirten die Theile auf dem Stundenplane. Das heißt Zurückkrebsen! (Siehe die Abhandlung über den Unterricht in der Zahlenlehre, Wegweiser, 2. Theil.)

tet, eine eigenthümliche Auseinandersetzung und Behandlung nothwendig, und es ist nunmehr an der Zeit, daß wir dazu übergehen. — Wir haben übrigens durch das so eben besprochene Verfahren den großen Vortheil erlangt, daß ein Schüler, welcher, nach diesem Buche unterrichtet, nicht bis zur neunten Stufe kommt, dennoch sich im Leben in Betreff der ihm vorkommenden Bruchrechnungs-Aufgaben zu helfen wissen wird. Sollte aber ein Lehrer der Ansicht sein, daß es überhaupt oder für ihn in seiner Schule oder für einzelne Schüler gerathen sei, die Zahlgesetze mit getheilten Einheiten früher vorzunehmen, als es in dieser Anleitung geschieht, so kann dieses ohne Schwierigkeit geschehen. Es folge daher in diesem wie in andern Stücken, Jeder seiner eigenen Ueberzeugung, wenn sie sich nur auf vernünftige Gründe, also auf mehr denn auf Schlendrian, stützt. Denn: „Männer handeln nach (vernünftigen) Gründen." (Schiller.)

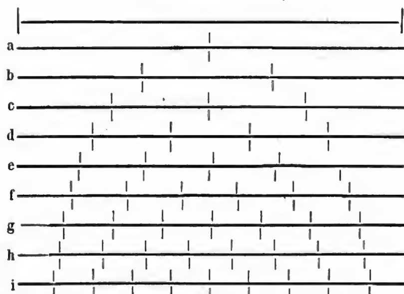
Erste Uebung.

Wesen und Behandlungsart der Brüche im Allgemeinen.

I. Mündlich.

§. 84. Entstehung und Begriff des Bruchs.

Jedes Ding für sich betrachtet ist eins, und es heißt als solches im Gegensatze gegen die außer oder in ihm befindliche Mannigfaltigkeit, eine Einheit. Ist es vollständig vorhanden, so daß kein Theil fehlt, so heißt es das Ganze. Irgend ein Ganzes braucht aber nicht eine einfache Einheit zu sein, sondern auch jede Vielheit kann als Einheit und als Ganzes angesehen werden. Nicht nur 1 = ein mal eins ist eine Einheit oder ein Ganzes, sondern auch 2, 3, 4, 20, überhaupt jede Zahl, jede Größe, sie mag benannt oder unbenannt sein, z. B. ein Haus, eine Stadt, ein Land, die Erde, das Sonnensystem, das Weltall selbst, der Inbegriff alles außer uns Vorhandenen, kann als einheitliches Ganzes angesehen werden. Jedes Ganze kann nun in Theile getheilt werden, oder in Theile getheilt gedacht werden; in 2, 3, 4 u. s. w., überhaupt in so viele, als man will. Begreiflicher Weise können diese Theile unter einander gleich oder ungleich sein. Im gemeinen Leben und in der Rechenkunst sind diejenigen Fälle am häufigsten, wo irgend ein Ganzes in eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird. Irgend ein oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen heißen ein Bruch. Ein dünnes Stück Holz (ein Stück Brod rc.) kann durch Brechen in Theile getheilt werden. Jeder dieser Theile war durch einen Bruch entstanden. Daher mochte man wohl die durch den Bruch (im eigentlichen Sinne des Wortes) entstandenen Theile selbst Brüche nennen. Die Entstehung dergleichen Theile, in welche ein Ganzes durch Theilen und Brechen getheilt werden kann, machen wir an Strichen anschaulich:



Der oberste Strich stellt das ungetheilte Ganze dar. Dasselbe ist hierauf in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 gleiche Theile getheilt worden. Jeder dieser Theile ist kleiner als das Ganze; auch mehrere dieser Theile zusammen sind kleiner als das Ganze; alle diese Theile zusammen sind dem Ganzen gleich. Jeder dieser Theile und mehrere Theile zusammen bilden in Vergleich mit dem Ganzen einen Bruch.

Einer der Theile von a. ist die Hälfte ($\frac{1}{2}$) des Ganzen;
= = = = b. = ein Drittel ($\frac{1}{3}$) = =
= = = = c. = ein Viertel ($\frac{1}{4}$) = =
= = = = d. = ein Fünftel ($\frac{1}{5}$) = =
| | | |
= = = = i. = ein Zehntel ($\frac{1}{10}$) = =

2 Theile von a. sind das Ganze selbst;
2 = = b. = 2 Drittel ($\frac{2}{3}$) des Ganzen
3 = = b. = 3 = ($\frac{3}{3}$) = dem =
2 = = c. = 2 Viertel ($\frac{2}{4}$) des =
3 = = c. = 3 = ($\frac{3}{4}$) = =
4 = = c. = 4 = ($\frac{4}{4}$) = dem =
2 = = d. = 2 Fünftel ($\frac{2}{5}$) des =
3 = = d. = 3 = ($\frac{3}{5}$) = = u. s. w.

Jedes Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich, = 2 Zweitel = 3 Drittel = 4 Viertel = 8 Achtel = 100 Hundertstel.

Was nun so eben an Strichen gezeigt worden ist, gilt von irgend einem beliebigen Ganzen. Soll ein Bruch entstehen, so muß die Theilung eines Ganzen in mehrere gleiche Theile vorgenommen werden. Natürlicher Weise können auch mehrere Ganze zugleich in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt werden; man kann die Zahlen 2, 3, 4, 10 u. s. w., ebenso 2, 3, 4, 10, 20 Thlr., oder andere unbenannte und benannte Größen in 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30 u. s. w. gleiche Theile theilen. Nimmt man einen oder mehrere

dieser gleichen Theile, so hat man jedesmal einen Bruch. Immer aber, man mag nun einen oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen oder mehrerer Ganzen genommen haben, bezieht man den Werth des Bruches auf eins dieser Ganzen als die Einheit, und nur durch diese Beziehung auf das einfache bekannte Ganze verstehen wir die Bedeutung und die Größe eines Bruches. Daher müssen wir uns gleich von vorn herein an diese Beziehung jedes Bruches auf das einfache Ganze gewöhnen. Wenn wir z. B. den 10ten Theil von 7 Ganzen nehmen sollen, so ist uns die Größe dieses Zehntels von 7 Ganzen erst dann anschaulich verständlich, wenn wir zusehen, wie viel dieses von einem Ganzen ist. *) Nun ist das Zehntel von eins = 1 Zehntel, das Zehntel von 2 = 2mal 1 Zehntel von 1; das Zehntel von 3 = 3mal 1 Zehntel von 1; das Zehntel von 7 = 7mal 1 Zehntel von 1.

Auf gleiche Weise erhellet, daß

$^{1}/_{3}$	von	2	=	$^{2}/_{3}$	von eins	
$^{1}/_{4}$	—	2	=	$^{2}/_{4}$	— —	
$^{1}/_{4}$	—	3	=	$^{3}/_{4}$	— —	
$^{1}/_{5}$	—	2	=	$^{2}/_{5}$	— —	
$^{1}/_{5}$	—	3	=	$^{3}/_{5}$	— —	
$^{1}/_{12}$	—	4	=	$^{4}/_{12}$	— —	
$^{1}/_{12}$	—	11	=	$^{11}/_{12}$	— —	u. s. w.

Diese Uebertragung des Werthes der Brüche von allen mehrfachen Ganzen auf das einfache Ganze muß festgehalten werden; denn sie ist natürlich und allgemein üblich. Deßwegen pflegt man bei der Nennung eines Bruches seine Beziehung zum einfachen Ganzen, zur Eins, nicht besonders namhaft zu machen. Zwei Drittel ($^{2}/_{3}$) heißt: zwei Drittel von eins; vier Fünftel heißt: vier Fünftel von eins ꝛc., oder von einer (in jedem einzelnen Falle) anzugebenden Einheit.

Sollten aber 2 Drittel oder 4 Fünftel eines mehrfachen Ganzen genommen werden, so muß man dieses besonders angeben. Ohne Angabe bezieht sich der Werth jedes Bruches auf das einfache Ganze. Es wird nach dem Gesagten klar sein, daß man jeden Bruch, der mehr als einen der gleichen Theile eines ganzen nennt, aus einem zwiefachen Gesichtspunkte ansehen kann: als mehrere Theile eines Ganzen oder als ein Theil eines mehrfachen Ganzen. Fünf Sechstel ($^{5}/_{6}$) sind sowohl fünf mal 1 Sechstel (nämlich von 1), als auch 1 Sechstel von fünf mal eins.

Neun Zwölftel ($^{9}/_{12}$) sind =	9	mal	1	Zwölftel	von	1;
=	1	—	1	—	—	9;
$^{5}/_{14}$ =	5	—	1	Vierzehntel	—	1;
=	1	—	1	—	—	5.**)

*) Ein neuer Beweis von der Richtigkeit des oben ausgesprochenen Grundsatzes, daß die Anschaulichkeit der Zahlen in der Beziehung auf die Einheit liege. Mehr darüber und über entgegengesetzte Ansichten im „Wegweiser", Abhandlung: Zahlenlehre.

**) Es ist nicht nur richtig, sondern (wegen mancher einfachen Auflösungsweise) sogar nothwendig, $^{5}/_{8}$ z. B. in dem doppelten Sinne zu verstehen und zu denken: 5 mal der 8te Theil eines Ganzen und 1 mal der 8te

Leicht einzusehen ist es auch, daß jeder Bruch als eine benannte ganze Zahl angesehen werden kann, deren Benennung das Wort angibt, welches anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt ist, z. B. die Wörter Zweitel, Drittel, Viertel ꝛc. So ist

2 Drittel ($^2/_3$)	=	2	mal	ein	Drittel;
4 Fünftel	=	4	—	—	Fünftel;
6 Siebentel	=	6	—	—	Siebentel;
11 Zwölftel	=	11	—	—	Zwölftel u. s. w.

so wie 11 Aepfel = 11 mal ein Apfel, 20 Groschen = 20 mal ein Groschen sind.

Endlich ist es leicht zu begreifen, daß jedes Ganze als Theil irgend eines größern Ganzen angesehen werden kann. So ist z. B. ein Pfund für sich ein Ganzes, aber ein Theil von 2, 3, 4, 5 Pfunden; 4 Groschen sind 4 mal 1 Groschen, also 4 mal ein Ganzes, aber von 8, 12, 16, 20 Groschen sind sie ein Theil, also ein Bruch.

Der Unterschied von gebrochenen und ganzen Zahlen ist also der: daß bei jenen die Einheiten (3 Viertel = drei mal ein Viertel) als Theile einer andern Einheit, bei diesen die Einheiten (3 = 3 mal eins) nicht als Theile einer andern Einheit angesehen werden. Je nach der verschiedenen Einheit, auf welche eine Zahl bezogen wird, ist sie ein Bruch oder eine ganze Zahl.

8 Pf. = 8 mal 1 Pf. ist eine ganze Zahl;
= 8 mal $^1/_{12}$ Sgr. = $^8/_{12}$ Sgr. oder
= 8 mal $^1/_{360}$ Thlr. ist ein Bruch.

Anmerkung über die Zahlwörter. Nachdem der Lehrer den Inhalt des vorstehenden §. entwickelnd oder dialogisch-sokratisch behandelt hat, die Schüler diese Wahrheiten auf dem Wege des Speciell-Anschaulichen, und von da zum allgemeinen Begriff forschreitend, aufgefunden und folglich eingesehen und begriffen haben, so gibt ihnen der Lehrer die üblichen Wörter und Worte für die gefundenen Vorstellungen, nämlich die üblichen Zahlwörter. Da der Sachunterricht überall zugleich auch Sprachunterricht sein soll, und ein guter Sachunterricht stets auch ein guter, practischer Sprachunterricht ist, so halte der Lehrer nicht nur auf eine vollkommen richtige Darstellung in Wort und Ausdruck, mündlich und schriftlich, sondern er benutze auch die sich darbietenden Gelegenheiten, die Einsicht der Schüler in Entstehung und Bedeutung der Wörter zu erhöhen, damit wirklich jeder Unterricht nicht nur Sprech-, sondern auch im eigentlichen Sinne des Wortes Sprachunterricht sei. Hier haben wir es nun mit den Zahlwörtern zu thun, und es gehört hieher, daß der Lehrer, wenn es nicht schon früher geschehen sein sollte, den Schüler auf die einfache, merkwürdige, scharfsinnige Art, in welcher wir durch wenige Wörter alle Zahlen (das unendliche Meer der Zahlen) bezeichnen, aufmerksam mache. Namentlich gehört hieher die Bildung des Ordnungszahlwortes und des Bruchzahlwortes. Aus unsern 12 einfachen Grundzahlwörtern (eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn = zig, hundert, tausend) und den ursprünglich fremden Wörtern Million, Billion ꝛc., und den aus ihnen zusammengesetzten Wörtern bilden wir die Ordnungszahlen durch Anhängung der Endsilben — te und ste. Durch Anhängung der Silbe — te entstehen alle Ordnungszahlwörter von zwei bis neunzehn, z. B.

Theil von 5 Ganzen; aber man verschone den Anfänger mit Erklärungen wie diese: „ein Bruch ist eine angezeigte Division.“ Sie verwirren. Eine Mehrheit von Ansichten und Erklärungen gehört nicht für die erste Stufe.

aus zwei: der, die, das Zweite;
— drei: — — — Dritte (statt Dreite);
— vier: — — — Vierte;
— neunzehn — — — Neunzehnte.

Durch Anhängung der Silbe — ste entstehen alle übrigen Ordnungszahlwörter; z. B.

aus zwanzig: der Zwanzigste;
— achtundvierzig: — Achtundvierzigste;
— hundert: — Hundertste;
— Million: — Millionste.

Auf gleiche Weise werden auch diejenigen Wörter gebildet, welche gleiche Theile eines Ganzen anzeigen, d. h. die Bruchzahlwörter. So heißt:

einer der 2 gleichen Theile eines Ganzen ein zweiter Theil = Zweittheil u. abgeschliffen: Zweitel;
— 3 — — — — dritter Theil = Dritttheil u. abgeschliffen: Drittel;
— 4 — — — — vierter Theil = Viertheil u. abgeschliffen: Viertel;
— 20 — — — — zwanzigster Th. = Zwanzigsttheil u. abgeschliffen: Zwanzigstel;
— 100 — — — — Hundertstel;
— 1000 — — — — Tausendstel, u. s. w.

Da die Theilung in zwei gleiche Theile, also das Zweitel, im Leben am häufigsten vorkommt, so hat man dem Theilen in 2 gleiche Theile und dem Zweitel besondere Namen gegeben. In zwei gleiche Theile theilen, heißt halbiren oder hälften, und das Zweitel: die Hälfte des Ganzen; statt 1 Zweitel des Ganzen sagt man daher auch die Hälfte oder ein Halb (es) des Ganzen; z. B. ein Zweitel von 3 = die Hälfte von 3 = ein Halb ($\frac{1}{2}$) von 3 ($\frac{1}{2}$ mal 3).

§. 85. Die Benennung und Bezeichnung der Theile des Bruches.

Der Bruch entsteht dadurch, daß irgend ein Ganzes in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und daß ein Theil oder mehrere dieser Theile genommen werden. Zu jedem Bruche gehören also zwei Vorstellungen: die Vorstellung, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, und wie viele dieser gleichen Theile zu nehmen sind. Jene Vorstellung gibt an, welchen Namen die Theile führen, daher heißt dieselbe auch der Nenner; diese zählt die Anzahl der Theile, daher heißt sie der Zähler des Bruches. Die beiden Glieder eines Bruches heißen daher Nenner und Zähler. Der Nenner zeigt an, in wie viele gleiche Theile das Ganze, von welchem die Rede ist, getheilt worden, und der Zähler, wie viele dieser Theile zu nehmen sind. In dem Bruche drei Viertel ist die Zahl drei der Zähler, vier der Nenner; vier gibt an, welcher Art die drei Theile sind; sie gibt der Zahl drei den Namen. Sechs Achtel eines Ganzen bedeutet daher, daß dies Ganze in acht gleiche Theile getheilt sei und dieser Theile sechs genommen seien.

Es ist einleuchtend, daß man bei Entstehung des Bruches zuerst daran denkt, in wie viele gleiche Theile ein Ganzes getheilt sei, und dann erst, wie viele dieser Theile zu nehmen seien; d. h. mit andern Worten: bei Entstehung eines Bruches oder bei Auffassung desselben wird zuerst die Vorstellung gedacht, welche wir den Nenner

nennen, und dann der Zähler. Beim Aussprechen des Bruches hat man die umgekehrte Ordnung gewählt: man spricht zuerst den Zähler, dann den Nenner aus. Aber man denkt zuerst den Nenner, dann den Zähler. Z. B. sieben Achtel. Dieses ist die hörbare Bezeichnung des Bruches.

Nun ist noch übrig, die schriftliche Bezeichnungsweise anzugeben, welche schon früher, vornehmlich um der kürzeren Darstellung willen, häufig gebraucht worden ist. Man trennt die Ziffern, welche Zähler und Nenner darstellen, durch einen Strich von einander, indem man den Zähler über, den Nenner unter diesen Strich setzt; z. B. $^5/_6$. Hier ist 6 der Nenner, 5 der Zähler.

Anmerkung. Aus diesem willkürlichen Gebrauche hat ein großer Arithmeticus folgende Definition des Bruches gebildet: „Der Zähler ist diejenige Zahl, welche oben, der Nenner diejenige, welche unten steht." (oben.) Das nenne ich Bestimmtheit, Kürze und Sacherklärung.

$^5/_6$ heißt nach früheren Erklärungen: die Einheit ist in 6 gleiche Theile getheilt und dieser Theile sind 5 genommen; oder: der sechste Theil von 5. Aus letzterer Erklärung folgt, daß jeder Bruch als der Quotient einer Division angesehen werden kann, deren Dividend der Zähler und deren Divisor der Nenner ist. Z. B. 5 soll in 6 gleiche Theile getheilt oder durch 6 dividirt werden. Dieses gibt den Quotienten $^5/_6$; hier ist 5 der Dividend, 6 der Divisor. — Welches ist der 8te Theil von 7? Antw. $^7/_8$ (von eins). Wie oft ist 5 in 4 enthalten? Antw. $^4/_5$ mal.

§. 86. Die Eintheilung und die Arten der Brüche.

Man kann die Brüche von verschiedenen Seiten ansehen, und deßwegen nach verschiedenen Merkmalen eintheilen. Es gibt daher verschiedene Arten der Brüche. Wir führen folgende auf:

a. Stammbrüche und Zweigbrüche.

Ein Bruch bezeichnet entweder einen oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen; z. B. $^1/_5$ und $^4/_5$. Letztere kann man aus jenem entstanden denken, wie der Zweig dem Stamme entwächst. Daher nennt man diejenigen Brüche, welche einen der gleichen Theile eines Ganzen bezeichnen, Stammbrüche, und diejenigen, welche mehrere der gleichen Theile eines Ganzen bezeichnen, Zweigbrüche.

$^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$ Pfd., $^1/_7$ Gr., $^1/_{10}$ Elle ꝛc. sind Stammbrüche; $^2/_3$, $^4/_5$, $^6/_7$ Pfd., $^3/_{10}$ Gr., $^4/_{10}$ Elle ꝛc. sind Zweigbrüche, auch abgeleitete Brüche genannt.

b. Eigentliche und uneigentliche Brüche.

Wenn eine Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt wird und diese Theile alle zusammen genommen werden, so hat man die ganze Einheit genommen. Darum ist $^4/_4 = 1$, $^5/_5 = 1$, $^6/_6 = 1$ ꝛc.; oder $1 = {}^1/_1 = {}^2/_2 = {}^3/_3 = {}^4/_4$ ꝛc. $= {}^{10}/_{10} = {}^{24}/_{24} = {}^{100}/_{100}$ u. s. w,; d. h. in Worten: die Einheit ist jedem Bruche gleich, dessen Nenner und Zähler gleich sind; oder wenn Zähler und Nenner eines Bruches einander gleich sind, so ist der Werth des Bruches gleich der Einheit oder dem Ganzen selbst. Daher sind

$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6}$ u. s. w.
$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6}$ u. s. w.

Diese Beispiele lehren, daß jede ganze Zahl in der Form eines Bruches dargestellt werden kann. Da aber der Werth eines solchen Bruches irgend einem Ganzen vollkommen gleich ist, so ist derselbe eigentlich kein Bruch, und solche Brüche heißen daher auch mit Recht uneigentliche Brüche. Uneigentliche Brüche sind daher solche, welche irgend einem oder mehreren Ganzen vollkommen gleich, also nur der Form nach Brüche sind. Es ist dieses jedesmal der Fall, wenn die Division des Nenners in den Zähler aufgeht, was auch als charakterisirendes Merkmal der sogenannten uneigentlichen Brüche angesehen werden kann. Die erste Erklärung ist die bessere, weil sie das Wesen der uneigentlichen Brüche angibt (Sacherklärung). Eigentliche Brüche sind solche, welche nicht irgend ein oder mehrere Ganze vollkommen darstellen, deren Nenner daher in dem Zähler nicht aufgeht.

c. Aechte und unächte Brüche.*)

Ein Bruch sei, hieß es oben, ein oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen. Nun kann man einige oder alle, oder noch mehr dieser gleichen Theile genommen denken, z. B. $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{11}{9}$. $\frac{5}{9}$ ist weniger als das Ganze, $\frac{9}{9}$ ist das Ganze selbst, $\frac{11}{9}$ ist mehr als das Ganze. Ein Bruch, oder eine Zahlgröße, welche die Bruchform hat, ist daher kleiner oder größer als das Ganze, oder dem Ganzen gleich. Im ersten Falle heißt der Bruch ein ächter, im zweiten ein unächter, im dritten Falle ist er, wie bereits gezeigt, ein uneigentlicher Bruch. Ein ächter Bruch ist also ein solcher, welcher kleiner ist als 1 (< 1), ein unächter ist ein solcher, welcher größer ist als 1 (> 1).

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{18}{19}$ sind ächte Brüche;
$\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{19}{18}$ — unächte —

Aus diesen Beispielen folgt, daß ein ächter Bruch, wenn Zähler und Nenner ihre Stelle mit einander wechseln, zu einem unächten wird, und umgekehrt.

Die Brüche zerfallen also in eigentliche und uneigentliche, jene wieder in ächte und unächte.

d. Einfache und zusammengesetzte Brüche.

Es sind Brüche denkbar, deren Zähler oder Nenner, oder deren Zähler und Nenner abermals aus Brüchen bestehen. Z. B.

$$\frac{\frac{1}{2}}{3}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{4}, \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}.$$

Bei diesen Brüchen denkt man entweder den ursprünglichen Begriff eines Bruches, z. B. bei dem ersten $\frac{\frac{1}{2}}{3}$, daß eine Einheit in

*) Manche Rechenlehrer nehmen die Wörter: unächte und uneigentliche Brüche als Synonyma. Das Gegentheil ist besser, weil der Bedeutung der Wörter mehr entsprechend.

drei gleiche Theile getheilt und von einem dieser Theile die Hälfte genommen sei; oder man sieht solche Brüche als Quotienten einer Division an, deren Dividend der Zähler und deren Nenner der Divisor darstellt; $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ sei der dritte Theil von $\frac{1}{2}$, oder gebe an, wie oft 3 in $\frac{1}{2}$ enthalten sei. Solche Brüche deren Zähler oder Nenner, oder deren Zähler und Nenner wieder Brüche sind, heißen Doppelbrüche oder zusammengesetzte Brüche. Alle andern Brüche heißen einfache.

$\frac{2}{3}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{12}{6}$ sind einfache,

$\frac{\frac{4}{5}}{6}$, $\frac{\frac{6}{3}}{4}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$ sind zusammengesetzte Brüche.

Zahlen, welche aus ganzen Zahlen und Brüchen bestehen, heißen gemischte Zahlen; z. B. $4\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{5}$, $8\frac{5}{9}$. Zähler und Nenner der Doppelbrüche können auch gemischte Zahlen sein:

$$\frac{3\frac{1}{2}}{4},\quad \frac{6}{5\frac{2}{3}},\quad \frac{3\frac{1}{3}}{5\frac{3}{8}}.$$

e. Gleichnamige und ungleichnamige Brüche.

Brüche haben entweder gleiche oder ungleiche Nenner. In jenem Falle sind sie gleich benannt, und sie heißen gleichnamig; in diesem Falle sind sie ungleichbenannt, und sie heißen ungleichnamig:

$\frac{2}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{12}{11}$ sind gleichnamige,
$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ sind ungleichnamige Brüche.

Dieses sind die gewöhnlichsten Eintheilungen der Brüche und die bekanntesten Arten. Die Eintheilung der Brüche in Stamm- und abgeleitete Brüche geht aus der Betrachtung der Entstehung des einen aus dem andern hervor; die Eintheilung in eigentliche und uneigentliche, in ächte und unächte vergleicht den Werth der Brüche mit einem oder mehreren Ganzen; die Eintheilung in einfache und zusammengesetzte beruht auf dem Unterschiede der ganzen Zahlen und Brüche; die Eintheilung der Brüche in gleich- und ungleichnamige geht aus der Vergleichung der Nenner zweier Brüche hervor. Diese Eintheilungen schließen nicht sämmtlich einander aus. Daher kann ein Bruch zu mehreren dieser Abtheilungen gehören:

z. B. $\frac{3}{4}$ ist ein eigentlicher, ein ächter, ein einfacher Bruch;
$\frac{8}{4}$ ist ein uneigentlicher, ein einfacher Bruch;
$\frac{\frac{1}{2}}{4}$ ist ein eigentlicher, ein ächter, ein zusammengesetzter Bruch;
$\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ sind gleichnamige,
$\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ sind ungleichnamige Brüche.

Der Größe nach kann ein Bruch sein:

= einem in mehrere gleiche Theile getheilten Ganzen z. B. $\frac{1}{7}$ = Stammbruch.
= mehreren in mehrere gleiche Theile getheilten Ganzen, z. B. $\frac{3}{7}$ = Zweigbruch.
= dem Ganzen oder mehreren Ganzen, z. B.

$^{7}/_{7}$ = uneigentlicher Bruch.

< als das Ganze oder mehrere Ganze, z. B.

$^{6}/_{7}$ ächter Bruch.

> als das Ganze oder mehrere Ganze, z. B.

$^{8}/_{7}$ = unächter Bruch.

= $1^{1}/_{7}$ = gemischte Zahl.

= einem oder mehreren gleichen Theilen eines oder mehrerer Theile eines in gleiche Theile getheilten Ganzen, z. B.

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$ = Doppelbruch.

Anmerkung. Der Lehrer übe den Schülern diese Unterschiede an vielen Beispielen ein. Dann lasse er jeden Schüler eigentliche, unächte u. s. w. Brüche nennen. Oder er schreibe eine Anzahl verschiedener Brüche an die Tafel, und veranlasse die Schüler, jeden Bruch nach den angegebenen Merkmalen zu bestimmen, die zusammengehörigen zusammenzustellen u. s. w. Bei schwachen Schülern bleibt man beim Nothwendigsten stehen.

§. 87. Verwandlung ganzer Zahlen in uneigentliche Brüche von beliebigen Nennern.

Es ist bereits gezeigt worden, daß $1 = {}^{1}/_{1} = {}^{2}/_{2} = {}^{3}/_{3} = {}^{4}/_{4}$ u. s. w.
Daraus folgt, daß $2 = 2 \times {}^{2}/_{2} = {}^{4}/_{2}$
$= 2 \times {}^{3}/_{3} = {}^{6}/_{3}$
$= 2 \times {}^{4}/_{4} = {}^{8}/_{4}$ u. s. w.
$3 = 3 \times {}^{2}/_{2} = {}^{6}/_{2}$
$= 3 \times {}^{3}/_{3} = {}^{9}/_{3}$
$= 3 \times {}^{4}/_{4} = {}^{12}/_{4}$ u. s. w. ist.
Ebenso ist z. B. $6 = 6 \times {}^{5}/_{5} = {}^{30}/_{5}$
$8 = 8 \times {}^{7}/_{7} = {}^{56}/_{7}$
$10 = 10 \times {}^{12}/_{12} = {}^{120}/_{12}$ u. s. w.

Man kann daher jede ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch von gegebenem Nenner verwandeln. Es geschieht dies, indem man die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner vervielfacht und diesem Producte, als Zähler, den gegebenen Nenner zum Nenner gibt. Z. B. 16 soll in Viertel getheilt werden.

Auflösung. $16 = \frac{16 \times 4}{4} = \frac{64}{4}$

Beweis. $1 = {}^{4}/_{4}$; 16×1; also $= 16 \times {}^{4}/_{4} = {}^{64}/_{4}$.

§. 88. Gemischte Zahlen in Brüche zu verwandeln, deren Nenner der Nenner des angehängten Bruches ist.

Z. B. $5^{3}/_{4}$. Auflösung. $5 = 5 \times {}^{4}/_{4} = {}^{20}/_{4}$; ${}^{20}/_{4} + {}^{3}/_{4} = {}^{23}/_{4}$; also ist $5^{3}/_{4} = {}^{23}/_{4}$.

Regel: Um gemischte Zahlen in Brüche zu verwandeln, deren Nenner dem Nenner des angehängten Bruches gleich ist, oder wie man sich ausdrückt, gemischte Zahlen einzurichten, multiplicirt man die ganze Zahl mit dem Nenner des gegebenen Bruches, fügt zu diesem Producte den Zähler des gegebenen Bruches als Summand hinzu, und gibt der dadurch entstehenden Summe den gegebenen Nenner zum Nenner.

Beispiel. $7\frac{3}{5}$ in Fünftel. Auflösung. $7 \times 5 = 35$; $35 + 3 = 38$; also ist $7\frac{3}{5} = \frac{38}{5}$.

Aufgaben.

1) 3 ℔ — wie viel Halbe-, Drittel-, Viertel-, Fünftel-, Sechstel ℔?
2) 15 Thlr. — — » » » » » Thlr.?
3) 24 Ctnr. — — » » » » » Ctnr.?
4) Verwandle 21 Loth in Sechstel-, Siebentel- u. s. w. bis Zwölftel-Loth!
5) $29\frac{1}{3}$ Pfund — wie viel Drittel-Pfund?
6) $12\frac{2}{5}$ Ctnr. — wie viel Fünftel-Centner?
7) $18\frac{5}{12}$ Sgr. — wie viel Zwölftel-Sgr. oder wie viel Pfennige?
8) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 25, 31, 36 u. s. w. Pfennige, wie viel Sgr.?
9) 1, 2, 3, 4 u. s. w. Sgr., wie viel Thlr.?
10) 1, 2, 3, 4 u. s. w. Loth, wie viel Pfd.?
11) 1, 2, 3, 4 u. s. w. Pfd., wie viel Ctnr.?
12) 1, 2, 3, 4 u. s. w. Quentchen, wie viel Loth?

Um die Aufgaben 8 bis 12 aufzulösen, muß man die Reductionszahl kennen. Diese ist bekanntlich für Pfennige in Sgr. 12, für Sgr. in Thlr. 30, für Loth in Pfd. 32 u. s. w. 1 Pf. = $\frac{1}{12}$ Sgr.; 2 Pf. = $\frac{2}{12}$ Sgr. u. s. w.; 1 Sgr. = $\frac{1}{30}$ Thlr.; 2 Sgr. = $\frac{2}{30}$ Thlr. u. s. w.; 1 Loth = $\frac{1}{32}$ Pfd., 2 Loth = $\frac{2}{32}$ Pfd. u. s. w., 1 Pfd. = $\frac{1}{110}$ Ctnr., 2 Pfd. = $\frac{2}{110}$ Ctnr. u. s. w. 1 Quentchen = $\frac{1}{4}$ Loth, 2 Qt. = $\frac{2}{4}$ Loth u. s. w.

Dieser Aufgaben gebe man viele!

§. 89. Verwandlung uneigentlicher und unächter Brüche in ganze oder gemischte Zahlen.

Uneigentliche und unächte Brüche sind solche, deren Werth dem Ganzen gleich, oder größer ist als dasselbe. Man kann daher uneigentliche und unächte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen verwandeln.

Beispiel. $\frac{15}{5}$. Aufl. $\frac{5}{5}$ ist ein Ganzes; so oft also $\frac{5}{5}$ vorhanden sind, so oft habe ich 1; $\frac{15}{5}$ ist $3 \times \frac{5}{5}$; also ist $\frac{15}{5} = 3 \times 1$.

$\frac{20}{6}$, wie viel Ganze?

Auflösung. $\frac{20}{6}$ ist $\frac{18}{6}$ und $\frac{2}{6}$; $\frac{18}{6} = 3$; also ist $\frac{20}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3\frac{2}{6}$.

$\frac{39}{7}$, wie viel Ganze?

Auflösung. So oft $\frac{7}{7}$ da sind, so oft ist ein Ganzes da. $\frac{7}{7}$ ist in $\frac{39}{7}$ 5 mal enthalten, mit dem Reste $\frac{4}{7}$. Also ist $\frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$.

Oder: $\frac{39}{7} = \frac{35}{7} + \frac{4}{7} = 5 \times \frac{7}{7} + \frac{4}{7} = 5 \times 1 + \frac{4}{7} = 5\frac{4}{7}$.

Regel: Um eigentliche und unächte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln, untersucht man, wie oft der Nenner des unächten Bruches in dem Zähler enthalten ist; der Quotient gibt die Anzahl des Ganzen, und der Rest ist der Zäh-

ler des anzuhängenden Bruches, dessen Nenner dem Nenner des uneigentlichen oder unächten Bruches gleich ist.

Beispiel. $^{60}/_{9}$! 9 ist in 60 | 6mal enthalten, mit dem Reste 6; also ist $^{60}/_{9} = 6^{6}/_{9}$. Oder: wie vorher.

Aufgaben.

1) $^{6}/_{5}$, $^{7}/_{4}$, $^{8}/_{4}$, $^{9}/_{4}$ Thlr. u. s. w. — wie viel Thlr.?
2) $^{20}/_{3}$, $^{30}/_{3}$, $^{40}/_{3}$, $^{50}/_{3}$ u. s. w. Pfd. — wie viel Pfd.?
3) $^{100}/_{20}$, $^{200}/_{20}$, $^{300}/_{20}$, $^{400}/_{20}$ u. s. w. Ctnr. — wie viel Centner?
4) Wie oft ist 1 in $^{32}/_{8}$, $^{40}/_{10}$, $^{49}/_{8}$, $^{100}/_{10}$ enthalten?
5) Carl besaß $^{29}/_{3}$ Thlr. und Friedrich $^{60}/_{6}$ Thlr. — wer besaß am meisten?
6) 32 Pfd. Kaffee sind gebraucht worden, jedesmal $^{1}/_{8}$ Pfd.; wie oft hat man davon genossen?
7) In einer Haushaltung werden in einer gewissen Zeit 320 Thlr. gebraucht, täglich $^{1}/_{3}$ Thlr; wie lange kommt man mit jenem Geld aus?
8) Die Heizung eines Ofens erfordert wöchentlich $2^{1}/_{2}$ Gang Kohlen; wie viel Wochen kann man mit 60 Gang heizen?
9) Wie oft ist $^{1}/_{11}$ in 11, 12, 13, 14, 15 enthalten?
10) Wie oft ist $^{1}/_{20}$ in 10, 20, 30, 40 enthalten?

Mehr solcher Aufgaben!

§. 90. Vergleichung des Werthes der Brüche mit der Einheit und unter sich, bei gleichen Zählern oder Nennern, und bei dem Wachsthum des einen oder andern.

Beispiel 1. Um wie viel ist $^{2}/_{3}$ von 1 verschieden?
Antw. $1 = {}^{3}/_{3}$; $^{2}/_{3}$ ist um $^{1}/_{3}$ kleiner als $^{3}/_{3}$; also ist $^{2}/_{3}$ um $^{1}/_{3}$ kleiner als 1.

Regel: Um zu finden, um wie viel Theile ein ächter Bruch kleiner ist als die Einheit, zieht man den Zähler vom Nenner ab, und gibt dem Reste als Zähler, den Nenner des Bruches zum Nenner, so hat man den Unterschied des gegebenen Bruches von der Einheit.

3. B. $^{7}/_{11}$! $11 - 7 = 4$; also ist $^{7}/_{11}$ um $^{4}/_{11}$ kleiner als 1. Denn: $1 = {}^{11}/_{11}$; $^{11}/_{11} - {}^{7}/_{11} = {}^{4}/_{11}$; also $1 - {}^{7}/_{11} = {}^{4}/_{11}$.

Beispiel 2. $^{9}/_{5}$ ist um wie viel größer als 1? Antw. $1 = {}^{5}/_{5}$; $^{9}/_{5} - {}^{5}/_{5} = {}^{4}/_{5}$; also ist $^{9}/_{5}$ um $^{4}/_{5}$ größer als 1.

Regel: Um zu finden, um wie viel Theile ein unächter Bruch größer ist als 1, zieht man den Nenner des Bruches vom Zähler ab, und gibt dem Reste den Nenner des Bruches zum Nenner; dieser letzte Bruch ist alsdann der Ueberschuß des unächten Bruches über die Einheit.

Beispiel 3. Vergleichet die Werthe folgender Brüche:
$^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{6}$ u. s. w. mit einander!
Die Nenner dieser Brüche zeigen an, daß die Einheit in 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. gleiche Theile getheilt und daß jedesmal einer

dieser Theile genommen ist. In je mehr Theile dasselbe Ganze getheilt wird, um je kleiner wird jeder einzelne Theil. Also ist $\frac{1}{2}$ größer als $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ ist größer als $\frac{1}{4}$ u. s. w.

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ u. s. w.
$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7}$ u. s. w.
$\frac{2}{4} > \frac{2}{5} > \frac{2}{6} > \frac{2}{7}$ u. s. w.
$\frac{5}{8} > \frac{5}{9} > \frac{5}{10} > \frac{5}{11}$ u. s. w.

Allgemeiner Satz: Wenn mehrere Brüche gleiche Zähler, aber ungleiche Nenner haben, so hat derjenige Bruch den größern Werth, welcher den kleineren Nenner hat.

Folgerung. Wächst daher der Nenner eines Bruches bei gleichbleibendem Zähler, so vermindert sich sein Werth; nimmt aber der Nenner ab bei gleichbleibendem Zähler, so wächst der Werth des Bruches. Bei gleichbleibendem Zähler wächst also des Bruches Werth mit der Abnahme des Nenners, und derselbe nimmt ab mit der Zunahme des Nenners. Bei gleichbleibendem Zähler ist also mit einander verbunden: Vergrößerung des Nenners und Verkleinerung des Werthes des Bruchs — Verkleinerung des Nenners und Vergrößerung des Werthes des Bruchs.

Beispiel 4. Vergleichet die Werthe folgender Brüche:

$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ u. s. w.

In jedem dieser Fälle ist die Einheit in sechs gleiche Theile getheilt; dieser Theile sind genommen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. Je mehr ich derselben Theile nehme, desto mehr habe ich vom Werth des Ganzen.

Also ist $\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6}$ u. s. w.
$\frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6}$ u. s. w.

Allgemeiner Satz: Wenn mehrere Brüche gleiche (einerlei) Nenner haben, so hat derjenige Bruch den größeren Werth, welcher den größeren Zähler hat.

Folgerung. Bei gleichbleibendem Nenner ist also mit dem Wachsthum des Zählers Wachsthum des Werthes des Bruches, mit der Abnahme des Zählers Abnahme des Werthes des Bruches verbunden.

Zusammenstellung. Stellen wir die beiden vorhergehenden Folgerungen zusammen, so erhalten wir folgende Sätze: Je größer der Nenner, bei gleichen Zählern, desto kleiner der Bruch (besser der Werth des Bruches); je kleiner der Nenner, bei gleichen Zählern, desto größer der Werth des Bruchs. Je größer der Zähler, bei gleichen Nennern, desto größer der Werth des Bruchs; je kleiner der Zähler, bei gleichen Nennern, desto kleiner der Werth des Bruchs.

Anmerkung. Gewöhnliche (= leichtfertige) Schüler schließen nach dem Bisherigen: Wenn Zähler und Nenner eines Bruches um gleichviel (gleich viel Einheiten) wachsen, oder um gleichviel abnehmen, so ändert sich der Werth des Bruches nicht. Denn das Wachsthum des Zählers bringt Wachsthum des Bruchwerthes, Wachsthum des Nenners Abnahme des Bruchwerthes hervor. Wenn (da) nun das Wachsthum des Zählers dem Wachsthum des Nenners gleich ist (?), so wird das Wachsthum des Bruchwerthes, durch das Erste bewirkt, durch die Abnahme des Bruchwerthes, durch das Zweite hervorgebracht, aufgehoben.

Man prüfe die Köpfe der Schüler durch Vorlegung dieser Frage, und berichtige, wenn sie diesen falschen Schluß machen, ihre Meinung durch Beispiele. Z. B.: Man lasse Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{4}$ um 3 Einheiten wachsen, so erhält man den Bruch $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{4}$ ist aber nicht $= \frac{4}{7}$.

Oder man ziehe vom Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{4}{8}$ 2 Einheiten ab, so erhält man den Bruch $\frac{2}{6}$; $\frac{4}{8}$ ist aber nicht $= \frac{2}{6}$.

Schluß: Läßt man Zähler und Nenner eines Bruchs um gleichviel Einheiten wachsen oder abnehmen, so bleibt der Werth des Bruches nicht ungeändert. Dieses ist bloß der Fall, wenn Zähler und Nenner eines Bruches einander gleich sind; z. B. bei $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$.

Zusatz. Multiplication und Division bewirken bekanntlich Vergrößerung und Verkleinerung.

Multiplicirt man daher allein den Zähler eines Bruches, so wird sein Werth vergrößert; multiplicirt man den Nenner eines Bruches allein, so wird sein Werth verkleinert; dividirt man den Zähler eines Bruches, so wird sein Werth verkleinert; dividirt man den Nenner eines Bruches, so wird sein Werth vergrößert.

Vergrößerung des Werthes eines Bruches wird also bewirkt: durch Vergrößerung des Zählers desselben durch Addition oder Multiplication, und durch Verkleinerung des Nenners durch Subtraction und Division. Verkleinerung des Werthes eines Bruches wird bewirkt: durch Verkleinerung des Zählers durch Subtraction und Division, und durch Vergrößerung des Nenners durch Addition und Multiplication.

Anmerkung. Durch welche Operationen, an Zähler und Nenner eines Bruches zugleich vorgenommen, der Werth desselben ungeändert bleibt, ist in den vorstehenden Sätzen zwar größtentheils schon enthalten, wird aber hier noch nicht weiter entwickelt. Es bleibt dies einstweilen unbestimmt, oder dem Errathen des einzelnen Schülers überlassen. Eine solche Unterweisungsweise verlangt der bildende (erziehende oder entwickelnde) Unterricht. In demselben steht der Lehrer als der Wissende den Nichtwissenden oder Halbwissenden gegenüber, auf jeder Stufe so viel Einsicht und Wahrheit entwickelnd, als der Kraft des Schülers und dem Zwecke des ganzen Unterrichts (allmähliche, stufenweise Entwickelung der Geisteskraft und Erweiterung des Gesichts- oder Lebenskreises) angemessen ist. Auch ist es pädagogisch ganz richtig, die folgende Wahrheit vorher ahnen oder fühlen zu lassen. Dadurch wird der Schüler innerlich durstig nach Wahrheit. Er liebt nun den Unterricht und den wahrheit-entwickelnden Lehrer, und sein Verlangen nach derselben gewährt ihm endlich durch Auffindung der ganzen Wahrheit und durch den Gewinn des klaren Bewußtseins, daß seine geistige Fähigkeit zugenommen habe, eine rein geistige Freude, worin der größte und edelste Sporn zu rastlosem Weiterschreiten liegt, welcher Zustand mit sittlichen Verhältnissen auf das Engste verschwistert ist.

Aufgaben. Der Lehrer schreibe nun eine Menge Brüche an die Tafel, theils von gleichen Zählern, theils von gleichen Nennern, und lasse die Schüler den Unterschied derselben von der Einheit, und ihr gegenseitiges Größenverhältniß nach den bisher entwickelten Sätzen beurtheilen, und die gefällten Urtheile mit Gründen belegen. Wo es nöthig erscheint, bediene er sich der Veranschaulichung durch Striche oder anderer Versinnlichungsmittel, zu deren Auffindung auch die Schüler anzuleiten sind.

§. 91. Verwandlung der Form (der Größe des Zählers und des Nenners) der Brüche mit Beibehaltung ihres Werthes.

Vorbemerkung. Für manche Vorstellungen haben wir mancherlei Mittel, sie zu bezeichnen. In diesem Falle findet bei Einheit des Inhaltes Vielheit der Form statt. Oft aber bezeichnen wir auch auf dieselbe Weise oder mit denselben Zeichen mehrere unter sich verschiedene Vorstellungen. Alsdann findet Einheit der Form und Vielheit des Inhaltes statt. Jenes ist namentlich in der Mathematik, dieses in der Sprache der Fall. In der Mathematik sind

wir gewöhnlich im Stande, dieselbe Vorstellung auf mehrfache Weise zu bezeichnen; aber unsere Sprache ist bei allem Ueberflusse doch nicht reich genug, jeder Vorstellung ein eigenes Kleid anzuziehen. Mathematik und Sprache sind einander in dieser, wie in anderer Hinsicht, entgegengesetzt. Der größere Reichthum der Gedanken liegt in den nicht-mathematischen Gebieten des Geistes; aber wir besitzen für mathematische Vorstellungen die reichlichsten, vielfachsten Mittel zu ihrer Bezeichnung. Die Klarheit und Bestimmtheit der menschlichen Vorstellungen ist zum Theil von der Genauigkeit abhängig, mit welcher wir sie hörbar oder sichtbar bezeichnen. Darum muß die Sprache der Mathematik in Betreff der Deutlichkeit und Bestimmtheit der Vorstellungen, so wie in Bezug auf den Reichthum an Bezeichnungsmitteln (ihres natürlich beschränkten Vorstellungskreises), unbedingt den Vorzug einräumen. Das Zeichensystem der Mathematik ist (unübertrefflich) vollkommen.

Der Werth jedes Bruches kann auf unendlich vielfache Weise dargestellt werden, was jetzt gezeigt werden soll.

Zu jedem Bruche gehören zwei Vorstellungen: Größe der einzelnen Theile des Ganzen, dargestellt durch den Nenner, und Anzahl dieser Theile, hörbar bezeichnet durch den Zähler; oder: Menge der Theile, in welche die Einheit getheilt ist, und Menge der Theile, welche davon genommen sind. Wenn sich nun jene Menge vermehrt, womit die Abnahme der Größe der Theile verbunden ist, so muß sich die Menge der Theile, welche zu nehmen sind, vermehren, wenn die Größe oder der Werth des Bruchs ungeändert bleiben soll; und umgekehrt, wenn sich die Menge der Theile, in welche die Einheit getheilt ist, vermindert, womit das Wachsthum der Größe der einzelnen Theile verbunden ist, so muß sich die Menge der Theile, welche zu nehmen sind, vermindern, wenn die Größe oder der Werth des Bruchs ungeändert bleiben soll.

Auf welche Art diese zusammengehörigen Größenveränderungen des Nenners und Zählers, mit Beibehaltung des Werthes des Bruches, bewerkstelligt werden müssen, kann auf mancherlei Weise gefunden werden, auf anschauliche Weise und in Begriffen. Jene Weise eignet sich für die Mehrzahl der Schüler, diese für die reiferen. Da wir bisher auf dem anschaulichen Wege zu Begriffen fortschritten, so wollen wir jetzt einmal — in der im Anfang dieses §. begonnenen Weise — mit Begriffen fortfahren, und diese durch Anschauungsmittel erläutern. Es bleibt dem Ermessen der Lehrer überlassen, diesen Gang beizubehalten, oder umzukehren.

a. Wird die Anzahl der Theile der Einheit (der Nenner) 2, 3, 4, 5 mal so groß, als sie anfangs war, so wird jeder einzelne dieser Theile 2, 3, 4, 5 mal so klein (besser: jeder einzelne dieser Theile wird der 2te, 3te, 4te, 5te Theil des früheren Werthes,) der Werth des Bruches also bei ungeändertem Zähler 2, 3, 4, 5 mal so klein, als anfangs (der 2te, 3te, 4te, 5te Theil des Anfangswerthes). Wird die Menge der Theile, welche genommen sind, (der Zähler) 2, 3, 4, 5 mal so groß, so wird, bei ungeändertem Nenner, der Werth des Bruches 2, 3, 4, 5 mal so groß. Werden nun beide Operationen zugleich bewerkstelligt: Vervielfachung des Nenners und Vervielfachung des Zählers mit derselben Zahl, so wird durch dieses

eine eben so große Vervielfachung, als durch jenes, Theilung hervorgebracht. Beide heben sich daher in ihrer Wirkung gegenseitig auf, und der Werth des Bruches ist unverändert geblieben. In wenig Worten heißt dieser Satz: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl vervielfacht, so bleibt der Werth desselben ungeändert. Die Zahlen, durch welche dieser Werth ausgedrückt wird, haben sich zwar verändert, nicht aber der Werth selbst. Da nun die Anzahl der Zahlen, mit welcher Zähler und Nenner vervielfacht werden kann, unendlich groß ist, so ist dadurch die Möglichkeit gegeben, den Werth jedes Bruchs auf unendlich vielfache Weise auszudrücken.

Z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14}$ u. s. w.
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21}$ u. s. w.
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} =$ u. s. w.
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \frac{12}{30} =$ u. s. w.
$\frac{3}{7} = \frac{3.2}{7.2} = \frac{3.3}{7.3} = \frac{3.4}{7.4} = \frac{3.5}{7.5}$ u. s. w.

In letzterem Beispiele ist ursprünglich die Einheit in 7 gleiche Theile getheilt, und dieser Theile sind 3 genommen. Theile ich nun dieselbe Einheit in 14, also in doppelt so viele Theile, so bleibt jeder Theil nur halb so groß. Nehme ich aber nun der Theile zweimal so viel als Anfangs, nämlich $3.2 = 6$, so wird durch diese Vermehrung der Theile jene Verminderung ihrer Größe aufgehoben; also $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ u. s. w.

Anschaulich: |—ˌ—|—ˌ—|—ˌ—|—ˌ—|—ˌ—|—ˌ—|—ˌ—|

Dieser Strich ist durch die längeren Theilstriche in 7 gleiche Theile getheilt, und jeder dieser Theile abermals durch kürzere Theilstriche in zwei gleiche Theile, das Ganze also in 2 mal so viel Theile getheilt. Hier ist es anschaulich klar, daß jedes Siebentel 2 Vierzehntel enthält. Also ist
$\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$; $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$; $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$; $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ u. s. w.

b. Wird die Anzahl der Theile, in welche die Einheit getheilt ist (der Nenner), 2, 3, 4, 5 mal so klein, so wird jeder einzelne dieser Theile 2, 3, 4, 5 mal so groß, der Werth der Bruchs also bei unverändertem Zähler 2, 3, 4, 5 mal so groß. Wird die Menge der Theile, welche genommen sind (der Zähler), 2, 3, 4, 5 mal so klein, so wird der Werth des Bruches, bei unverändertem Nenner, 2, 3, 4, 5 mal so klein. Nimmt man daher beide Operationen zugleich vor, so hebt diese Verkleinerung jene Vergrößerung auf, und der Werth des Bruchs bleibt ungeändert. Dieser Satz heißt kurz: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl theilt, so bleibt der Werth des Bruches ungeändert. Zwar ändern sich die Zahlen, durch welche Zähler und Nenner ausgedrückt sind, nicht aber die Größe des Werthes des Bruches. Derselbe hat also nur eine andere Form erhalten. Da nun die Anzahl der Zahlen, mit welchen Zähler und Nenner (freilich nicht immer ohne Rest)

getheilt werden können, unendlich groß ist, so kann man auch auf diese Weise den Werth jedes Bruches auf unendlich vielfache Weise darstellen.

Z. B. $^{12}/_{24} = {}^{6}/_{12} = {}^{3}/_{6} = {}^{1}/_{2}$;
$^{10}/_{20} = {}^{5}/_{10} = {}^{1}/_{2}$;
$^{20}/_{24} = {}^{10}/_{12} = {}^{5}/_{6}$;
$^{20}/_{30} = \frac{20:2}{30:2} = \frac{20:3}{30:3} = \frac{20:4}{30:4} = \frac{20:5}{30:5}$ u. s. w.*)

Letzteres, so wie die Sache überhaupt, wird durch den vorher getheilten Strich anschaulich klar.

Wir haben also zwei Mittel in der Hand, die Form jedes Bruches, mit Beibehaltung seines Werthes, zu verändern: Vervielfachung und Theilung des Zählers und Nenners desselben mit derselben Zahl.

Durch alleinige Vervielfachung des Zählers (mit Beibehaltung des Nenners) wird auch der Werth des Bruches mit der vervielfachenden Zahl vervielfacht.

Z. B. Wenn der Zähler des Bruchs $^{1}/_{2}$ mit den Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. w. vervielfacht wird, wodurch die Brüche $^{2}/_{2}$, $^{3}/_{2}$, $^{4}/_{2}$, $^{5}/_{2}$ u. s. w. entstehen, so ist der Werth des Bruchs $^{1}/_{2}$ 2, 3, 4, 5 mal so groß geworden.

Durch alleinige Vervielfachung des Nenners wird der Werth des Bruches durch die vervielfachende Zahl getheilt.

Z. B. Wenn der Nenner des Bruchs $^{1}/_{2}$ mit den Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. w. vervielfacht wird, so ist der Werth des Bruchs $^{1}/_{2}$ 2, 3, 4, 5 mal so klein geworden. $^{1}/_{4}$ ist die Hälfte von $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{6}$ ist ein Drittel von $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{8}$ ist ein Viertel von $^{1}/_{2}$ u. s. w.

Durch alleinige Theilung des Zählers wird der Werth des Bruchs auch durch die theilende Zahl getheilt.

Z. B. Wenn der Zähler des Bruchs $^{12}/_{16}$ durch die Zahlen 2, 3, 4 getheilt wird, wodurch die Brüche $^{6}/_{16}$, $^{4}/_{16}$, $^{3}/_{16}$ entstehen, so ist der Werth des Bruchs 2, 3, 4 mal so klein geworden (besser: der 2te, 3te, 4te Theil des vorigen Werthes geworden).

Durch alleinige Theilung des Nenners wird der Werth des Bruches durch die theilende Zahl vervielfacht.

Z. B. Wenn der Nenner des Bruchs $^{3}/_{16}$ durch die Zahlen 2, 4, 8 getheilt wird, wodurch die Brüche $^{3}/_{8}$, $^{3}/_{4}$, $^{3}/_{2}$ entstehen, so ist der Werth des Bruches 2, 4, 8 mal so groß geworden.

Bemerkungen und Aufgaben.

1) Alle diese Sätze mache der Lehrer durch Striche rc. anschaulich, nicht eher weiter schreitend, bis alle Sätze genau gefaßt und die Schüler im Stande sind, die Gründe genau zu entwickeln. Die Formveränderung des Bruchs $^{2}/_{3}$ wird z. B. durch folgende Strichtheilung veranschaulicht.

*) : bedeutet oben: durch, dividirt durch u. s. w.

$1/3$

$2/6$

$3/9$

$4/12$

$5/15$

$6/18$

Diese Strichtheilung zeigt auch umgekehrt die Formenveränderung der Brüche $6/18$, $5/15$, $4/12$, $3/9$, $2/6$ anschaulich.

2) Den Werth gegebener Brüche, z. B. $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$ u. s. w., $2/3$, $2/4$, $2/5$, $2/6$ u. s. w., $3/4$, $4/4$, $5/4$, $6/4$ u. s. w. durch Vervielfachung des Zählers und Nenners in andern Zahlen auszudrücken!

Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl vervielfachen, nennt man auch: den Bruch erweitern.

3) Den Werth gegebener Brüche, z. B. $2/4$, $2/6$, $2/8$, $2/10$, $2/12$ u. s. w., $3/6$, $3/9$, $3/12$, $3/15$ u. s. w., $4/8$, $4/12$, $4/16$, $4/20$ u. s. w., $10/20$, $20/10$, $30/10$, $90/10$ u. s. w. durch Theilung des Zählers und Nenners mit derselben Zahl in andern Zahlen auszudrücken!

Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl theilen; nennt man auch: den Bruch aufheben, kürzen, verkleinern. Man bemerke, daß der gebräuchliche Ausdruck „den Bruch verkleinern" nicht eine Verkleinerung seines Werthes, sondern eine Verkleinerung der Zahlen, durch welche sein Werth ausgedrückt wird, bezeichnet. Deßhalb ist der Ausdruck „aufheben" besser, als das Wort „verkleinern."

4) Nennet diejenige Brüche, welche sich (ohne daß ein Rest entsteht, oder ohne daß wieder Brüche im Zähler und Nenner entstehen) durch 2 aufheben lassen!

Antw. $2/4$, $4/6$, $6/8$ u. s. w., kurz alle, deren Zähler und Nenner gerade Zahlen sind.

5) Nennet diejenigen Brüche, welche sich, wenn man ihre Zähler und Nenner durch 3, 4, 5, 6 u. s. w. theilt, aufheben lassen, oder kürzer, welche sich durch 3, 4, 5, 6 u. s. w. aufheben lassen!

6) Man gebe viele Aufgaben über die Erweiterung der Brüche, wenn die Erweiterungszahl angegeben ist. Z. B. $5/6$ soll in 30stel verwandelt werden.

Hier muß man zuerst zusehen, wie viel 30stel $1/6$ ist. Dieses findet man, wenn man zusieht, wie oft 6 in 30 enthalten ist, nämlich 5 mal. Also ist $1/6 = 5/30$; folglich $5/6 = \frac{5.5}{6.5} = 25/30$; 2c.

Der Grund dieses Verfahrens ist dieser: Wenn Sechstel in Dreißigstel ausgedrückt werden sollen, so wird der Nenner 5 mal so groß, also der Werth von $1/6$ 5 mal so klein. Um diese Veränderung wieder aufzuheben, muß der Zähler 1 mit 5 multiplicirt werden; also ist $1/6 = 5/30$ u. s. w.

$1/3$ wie viel Sechstel, Neuntel, Zwölftel, Fünfzehntel 2c.
$2/3$ — — — — —
$3/3$ — — — — —
$1/5$ — Zehntel, Fünfzehntel, Zwanzigstel u. s. w.
$2/5$ — — — — —
$3/5$ — — — — —

Andere Aufgaben!

7) Man gebe viele Aufgaben über die Aufhebung der Brüche, wenn die Aufhebungszahl gegeben ist. Z. B. 20/24 soll in 6tel verwandelt werden.

Hier muß man zusehen, wie oft 6 in 24 enthalten ist, nämlich 4 mal. Also wird durch Verwandlung des Nenners 24 in 6, der Nenner des Bruchs 20/24 durch 4 getheilt. Soll nun der Werth des Bruches unverändert bleiben, so muß man auch den Zähler durch 4 theilen; also ist 20/24 = 5/6.

20/30 soll in Fünftel und Zehntel verwandelt werden. 30/36 soll in Sechstel u. s. w.

8) Begreiflicher Weise ist man in Betreff der Aufgaben über die Erweiterung und Aufhebung der Brüche, wenn die Erweiterungs- und Aufhebungszahl gegeben werden soll, beschränkt, wenn nicht Doppelbrüche entstehen sollen. Darnach muß man die Aufhebungs- und Erweiterungszahl wählen. Man leite den Schüler durch Aufgaben dazu an, schnell solche Erweiterungs- und Theilungszahlen aufzufinden.

a. Wie heißen die Zähler und Nenner derjenigen Brüche, die sich durch 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w., ohne daß Doppelbrüche entstehen, aufheben lassen:
Antw. Mit 3, wenn Zähler und Nenner Vielfache von 3 sind;
— 4 — — — — — — 4 —
— 5 — — — — — — 5 —
— 6 — — — — — — 6 —
— 7 — — — — — — 7 —
— 8 — — — — — — 8 —

b. Durch welche Zahlen lassen sich folgende Brüche aufheben: 2/4, 4/6, 3/6, 3/15, 10/15, 30/40, 12/15, 12/20, 18/20, 24/75, 30/64, 36/60, 60/240, 36/360, 90/360 u. s. w.?

c. Mit welchen Zahlen ist der Bruch 2/5 erweitert worden, wenn aus ihm die Brüche: 4/10, 6/15, 10/25, 16/40, 20/50 u. s. w. geworden sind?

d. Jemand besitzt 1 1/3, 5 2/3, 9 2/3, 20 1/3 Thlr., er will sie jedesmal in 6tel, 9tel, 12tel verwandeln, wie viel hat er jedesmal?

e. 6 3/5 sind wie viel Fünftel, Zehntel, Fünfzehntel?

f. Durch welche Zahlen ist der Bruch 60/360 jedesmal aufgehoben worden, wenn aus ihm die Brüche 1/6, 2/12, 4/24, 5/30, 6/36, 10/60, 12/72, 15/90, 30/180 geworden sind?

g. Welche Brüche von 1/16, 2/16 u. s. w. bis 16/16 lassen sich aufheben?

h. Hebet folgende Brüche auf: 10/12 Sgr., 8/12 Sgr., 4/6 Thlr., 9/15 Thlr., 20/24 Thlr. 12/20 Pfd., 24/32 Pfd., 55/110 Ctnr., 22/110 Ctnr. u. s. w.

i. Halbe in Drittel, Viertel, Fünftel ꝛc. zu verwandeln.

Z. B. $\frac{1}{2} = \frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{2}{4} = \frac{2\frac{1}{2}}{5} = \frac{3}{6} = \frac{3\frac{1}{2}}{7} = \frac{4}{8}$ ꝛc.

k. Drittel in Viertel, Fünftel, Sechstel ꝛc. zu verwandeln.

Z. B. $\frac{1}{3} = \frac{1\frac{1}{3}}{4} = \frac{1\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{6}$ — — — — $\frac{3\frac{1}{3}}{10}$ ꝛc.

$\frac{2}{3} = \frac{2\frac{2}{3}}{4} = \frac{3\frac{1}{3}}{5} =$ — — — — — — $\frac{6\frac{2}{3}}{10}$ ꝛc.

Ebenso Viertel in Fünftel, Sechstel ꝛc., Fünftel in Sechstel, Siebentel ꝛc. zu verwandeln.

9) Leicht wird es nun auch den Schülern werden, einfache (leichte) Doppelbrüche in einfache Brüche zu verwandeln. Dazu leiten z. B. folgende Aufgaben an:

a. Nennet die Hälften von 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 u. s. w.

Antw. Die Hälfte von 1/2 ist 1/4 oder $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

— — — 1/3 ist 1/6 oder $\frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$

— — — 1/4 ist 1/8 oder $\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$

— — — 1/5 ist 1/10 oder $\frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}$ u. s. w.

b. Gebet die Hälften von $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$ u. s. w. an.

Antw. Die Hälfte von $\frac{2}{2}$ ist $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

— — — $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ oder $\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

— — — $\frac{2}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ oder $\frac{\frac{2}{4}}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; u. s. w.

c. Nennet die Drittel von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w.

Antw. Ein Drittel von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{6}$ oder $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$;

— — — $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{9}$ oder $\frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$;

— — — $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{12}$ oder $\frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$; u. s. w.

d. Nennet die Drittel von $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$ u. s. w.

Antw. Ein Drittel von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2}{9}$ oder $\frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}$;

— — — $\frac{2}{4}$ ist $\frac{2}{12}$ oder $\frac{\frac{2}{4}}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; u. s. w.

e. Gebet die Hälften von 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$ u. s. w. an.

Antw. Die Hälfte von 1 ist $\frac{1}{2}$;
— — — $1\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;
— — — 2 ist 1;
— — — $2\frac{1}{2}$ ist $1\frac{1}{4}$ u. s. w.

f. Gebet die Drittel von $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 u. s. w. an.

Antw. Das Drittel von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{6}$;
— — — 1 ist $\frac{1}{3}$;
— — — $1\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ u. s. w.

Man gebe noch mehr solcher Aufgaben und Reihenfolgen!

§. 92. Verwandlung ungleichnamiger Brüche in gleichnamige.

Begreiflicher Weise erfordern viele Rechnungen, verschiedene Brüche zu einander zu addiren, abzuziehen und ihren gegenseitigen Werth schnell zu übersehen. Alles dieses ist nur dann möglich, wenn die Brüche einerlei Nenner haben, oder gleichnamig sind. Denn nur gleichnamige Größen können in eine Summe gebracht, nur wenn sie gleichnamig sind, kann ihr gegenseitiger Werth unmittelbar abgeschätzt werden. Es entsteht daraus die Aufgabe, ungleichnamige Brüche gleichnamig zu machen. Dieses muß jeder Zeit, da sie Theile der Einheit sind, und der Werth jedes Bruches auf unendlich vielfache Art dargestellt werden kann, möglich sein. Man braucht den Werth ungleichnamiger Brüche, d. h. solcher, welche verschiedene Nenner haben, nur in solche zu verwandeln, welche gleiche Nenner haben. Da nun die Verwandlung der Brüche, wenn nicht im Zähler oder Nenner möglicher Weise Brüche entstehen sollen, durch die Multiplication des Zählers und Nenners geschieht, so hat man, um diejenige Zahl zu finden, welche den gemeinschaftlichen Nenner der gegebenen ungleichnamigen Brüche darstellt, nur eine Zahl zu suchen, in welcher die Nenner dieser Brüche aufgehen. Diese Zahl stellt dann gewissermaßen die höhere (allgemeinere) Einheit dar, unter welcher die Nenner der gegebenen Brüche enthalten (ihr untergeordnet) sind. Was, wenn mehrere Vorstellungen als gleichartige angesehen werden sollen,

die allgemeinere Vorstellung ist, welcher dieselben untergeordnet sind, das ist für die Nenner der Brüche die größere Zahl, in welcher dieselben ohne Rest enthalten sind. Diese Bemerkungen werden durch ein Beispiel vollkommen klar werden.

Es seien z. B. die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ gleichnamig zu machen, d. h. sie seien in zwei (ihnen) gleichwerthige Brüche zu verwandeln, welche einerlei Nenner haben. Nothwendig ist die Auflösung dieser Aufgabe, wenn die genannten Brüche zusammengezählt, oder von einander abgezogen werden sollen, oder wenn man ihren gegenseitigen Werth klar auffassen will. Wir drücken daher den Werth beider Brüche in anderen (größeren) Zahlen aus, welche durch Multiplication gefunden werden.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \qquad \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$$

Hier haben wir schon 2 Brüche gefunden, welche den gegebenen gleich sind, und welche einerlei Nenner haben; $\frac{1}{3}$ ist $= \frac{4}{12}$, und $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, die gesuchten Brüche heißen also $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, deren gegenseitiger Werth jedem in die Augen springt, was bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ nicht der Fall war. Vergleichen wir den neuen Nenner 12 mit den beiden Nennern 3 und 4, so sehen wir, daß 12 das Product aus beiden Nennern ist. In diesem Producte sind 3 und 4 ohne Rest enthalten; also verwandelt man beide Brüche in 12tel. Der Nenner des Bruchs $\frac{1}{3}$ wird also mit 4, der Nenner des Bruchs $\frac{1}{4}$ mit 3 multiplicirt; folglich muß auch der Zähler des Bruchs $\frac{1}{3}$ mit 4, und der Zähler des Bruchs $\frac{1}{4}$ mit 3 multiplicirt werden. 4 ist aber der Nenner des Bruchs $\frac{1}{4}$ und 3 der Nenner des Bruchs $\frac{1}{3}$, also wird, um die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ gleichnamig zu machen, Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche mit dem Nenner des andern multiplicirt.

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} \qquad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

Daß die Nenner der neuen Brüche dieselben sein müssen, folgt daraus, daß die Größe eines Products nicht von der Ordnung der Factoren desselben abhängt: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

Wir wählen noch ein zweites Beispiel: $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{6}$. Wir drücken den Werth beider in größeren Zahlen aus.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} \qquad \frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30}$$

Hieraus folgt, daß die Nenner der beiden Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{6}$ in dem Nenner 30 zusammenkommen, welcher das Product der beiden Nenner 5 und 6 ist. Man braucht daher, um Brüche gleichnamig zu machen, nur diejenige Zahl zu suchen, in welcher die Nenner der gegebenen Brüche zusammen kommen, in welcher die Nenner ohne

Rest enthalten sind. Diese Zahl ist jedesmal das Product der beiden Nenner. Man hat daher nur Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Nenner des andern zu multipliciren.

$^3/_5$ und $^5/_6$

$^3/_5 = \frac{6\ .\ 3}{6\ .\ 5} = {}^{18}/_{30}$ $\qquad$ $^5/_6 = \frac{5\ .\ 5}{5\ .\ 6} = {}^{25}/_{30}$

Der gemeinschaftliche Nenner zweier gleichnamig zu machenden Brüche wird daher gefunden, wenn man dieselben mit einander vervielfacht. Und man verwandelt zwei Brüche in gleichnamige, wenn man Zähler und Nenner jedes Bruches mit dem Nenner des andern vervielfacht.

Beispiele. $^2/_3$ und $^5/_7$!

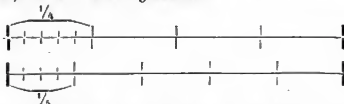
$^2/_3 = \frac{2\ .\ 7}{3\ .\ 7} = {}^{14}/_{21}$; $\qquad$ $^5/_7 = \frac{5\ .\ 3}{7\ .\ 3} = {}^{15}/_{21}$.

$^5/_8$ und $^7/_9$!

$^5/_8 = \frac{5\ .\ 9}{8\ .\ 9} = {}^{45}/_{72}$; $\qquad$ $^7/_9 = \frac{7\ .\ 8}{9\ .\ 8} = {}^{56}/_{72}$.

Man kann diese Verfahrungsweise auf mannigfaltige Art anschaulich machen, an Quadraten, Strichen u. s. w.

Z. B. $^1/_4$ und $^1/_5$. Wir stellen den Werth derselben in Strichen dar, theilen also denselben Strich, einmal in 4, das andere mal in 5 gleiche Theile. Von jenen 4 Theilen und von diesen 5 Theilen wird einer genommen.



Hierauf theilt man das Viertel in 5, das Fünftel in 4 gleiche Theile. Die dadurch entstehenden einzelnen Theile sind einander gleich; jeder ist $^1/_{20}$ des ganzen Strichs, und es ist anschaulich klar, daß nun beide Brüche in einerlei Theilen, nämlich in 20steln ausgedrückt, folglich gleichnamig sind: $^1/_4 = {}^5/_{20}$, $^1/_5 = {}^4/_{20}$. Ihr Unterschied ist $= {}^1/_{20}$.

Die einzelnen Fälle, welche noch vorkommen können, entwickeln wir aus Beispielen.

$^2/_3$ und $^1/_6$ gleichnamig zu machen!

Nach dem Vorigen vervielfacht man Zähler und Nenner des Bruches $^2/_3$ mit 6, und Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_6$ mit 3. Dadurch entstehen die Brüche $^{12}/_{18}$ und $^3/_{18}$. Es ist aber auch $^{12}/_{18} = {}^4/_6$, und $^3/_{18} = {}^1/_6$.

Also sind beide gleichnamige Brüche jetzt solche, deren Nenner der Nenner des zweiten Bruches $^1/_6$ ist. Dieses rührt daher, weil

der Nenner des einen Bruchs $\frac{2}{3}$ in dem Nenner des andern Bruchs $\frac{1}{6}$ ohne Rest enthalten ist. In diesem Falle hat man nur zuzusehen, wie oft der kleinere Nenner in dem größeren enthalten ist; hier 2 mal. Und dann vervielfacht man mit dieser Zahl 2 den Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

$\frac{1}{4}$ und $\frac{5}{6}$ gleichnamig zu machen.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{6}{24} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{6}{24} = \frac{3}{12} \qquad \frac{20}{24} = \frac{10}{12}.$$

12 ist daher auch der gemeinschaftliche Nenner. Da derselbe kleiner ist als 24, so ist er bequemer als dieser. Denn je kleiner der Nenner, desto leichter übersieht man den Werth der Brüche. Daß man hier zum gemeinschaftlichen Nenner eine kleinere Zahl wählen konnte, als $4 \cdot 6 = 24$, rührt daher, weil 4 und 6 in einer kleinern Zahl als 24, nämlich in 12 aufgehen. Ist dieses der Fall, so braucht man nur zuzusehen, wie oft jeder Nenner in dieser Zahl enthalten ist, und mit diesem Quotienten Zähler und Nenner zu vervielfachen. Die kleinere Zahl war 12; 4 ist in 12 3mal und 6 in 12 2mal enthalten. Also vervielfacht man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{4}$ mit 3, und Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{5}{6}$ mit 2. Das gibt:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}.$$

Auf diese Weise findet man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{7}{30}$ gleichnamig zu machen!

Wir vergleichen die Nenner mit einander. Wir sehen, daß die Nenner 3 und 5 in dem dritten Nenner 30 aufgehen; wir können daher beide Brüche in solche verwandeln, deren Nenner 30 ist. Dieses geschieht, indem wir zusehen, wie oft 3 und 5 in 30 enthalten sind: 10- und 6mal. Also wird der Nenner des Bruchs $\frac{1}{3}$ mit 10, der Nenner des Bruchs $\frac{2}{5}$ mit 6 vervielfacht, um beide in 30stel auszudrücken. Folglich muß, damit der Werth beider sich nicht ändere, auch 1 mit 10 und 2 mit 6 vervielfacht werden. Dies gibt:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}; \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30}; \qquad \frac{7}{30} = \frac{7}{30}.$$

Die Brüche, welche jenen gleich und gleichnamig sind, heißen also: $\frac{10}{30}$, $\frac{12}{30}$ und $\frac{7}{30}$.

Wenn sich daher unter gleichnamig zu machenden Brüchen einer befindet, in dessen Nenner die übrigen Nenner aufgehen, so sucht man die Zahlen, welche angeben, wie oft die übrigen Nenner in diesem einen enthalten sind, und vervielfacht Zähler und Nenner jener Brüche mit den gefundenen Quotienten.

$^1/_4$, $^2/_5$, $^5/_6$ gleichnamig zu machen!

Hier sucht man eine Zahl, in welcher die 3 Nenner 4, 5, 6 aufgehen. Eine solche Zahl ist unzweifelhaft 4 . 5 . 6 = 120; aber auch 60. Nun sieht man zu, wie oft 4, 5, 6 in 60 enthalten sind: 15, 12, 10mal. Also vervielfacht man Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_4$ mit 15, Zähler und Nenner des Bruchs $^2/_5$ mit 12, Zähler und Nenner des Bruchs $^5/_6$ mit 10. Dies gibt:

$$^1/_4 = \frac{1\,.\,15}{4\,.\,15} = {}^{15}/_{60}; \qquad ^2/_5 = \frac{2\,.\,12}{5\,.\,12} = {}^{24}/_{60}; \qquad ^5/_6 = \frac{5\,.\,10}{6\,.\,10} = {}^{50}/_{60}.$$

Hätte man aber keine kleinere Zahl, in welcher die 3 Brüche aufgehen, finden können, als das Product aller = 4 . 5 . 6, so wäre dieses Product derjenige Nenner gewesen, in welchem der Werth aller Brüche auszudrücken gewesen wäre. Dieses ist z. B. mit den Brüchen $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$ der Fall.

Hier heißt der kleinste gemeinschaftliche Nenner 2 . 3 . 5 = 30. Da nun 2, 3, 5 in 30 15mal, 10mal, 6mal enthalten sind, so vervielfacht man Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_2$ mit 15, Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_3$ mit 10, Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_5$ mit 6. Dieses gibt:

$$^1/_2 = \frac{1\,.\,15}{2\,.\,15} = {}^{15}/_{30}; \qquad ^1/_3 = \frac{1\,.\,10}{3\,.\,10} = {}^{10}/_{30}; \qquad ^1/_5 = \frac{1\,.\,6}{5\,.\,6} = {}^{6}/_{30}.$$

Die Zahl, mit welcher Zähler und Nenner jedes Bruches zu vervielfachen war, wurde gefunden, indem wir das Product aller Nenner 2 . 3 . 5 durch jeden Nenner theilten. Nun ist 2 in 2 . 3 . 5 offenbar 3 . 5mal, 3 in 2 . 3 . 5 aber 2 . 5mal, 5 in 2 . 3 . 5 sicher 2 . 3mal enthalten. Also wurde Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_2$ mit 3 . 5, Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_3$ mit 2 . 5, Zähler und Nenner des Bruchs $^1/_5$ mit 2 . 3 vervielfacht. Dieses gab:

$$^1/_2 = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,3\,.\,5}; \qquad ^1/_3 = \frac{1\,.\,2\,.\,5}{3\,.\,2\,.\,5}; \qquad ^1/_5 = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{5\,.\,2\,.\,3}.$$

Daraus erhellt, daß Zähler und Nenner jedes Bruches mit den Nennern der beiden andern Brüche (ihrem Producte) vervielfacht wurden. Wenn daher keine kleinere Zahl, in welcher alle Nenner ohne Rest aufgehen, gefunden werden kann, als das Product aller Nenner, so ist dieses der kleinste gemeinschaftliche (der Haupt- oder General-) Nenner, und nun werden **Zähler und Nenner jedes Bruches mit dem Producte der übrigen Nenner vervielfacht.**

Beispiel: $^2/_3$, $^4/_5$, $^6/_7$.

$$^2/_3 = \frac{2\,.\,5\,.\,7}{3\,.\,5\,.\,7} = {}^{70}/_{105}; \qquad ^4/_5 = \frac{4\,.\,3\,.\,7}{5\,.\,3\,.\,7} = {}^{84}/_{105}; \qquad ^6/_7 = \frac{6\,.\,3\,.\,5}{7\,.\,3\,.\,5} = {}^{90}/_{105}.$$

Aufgaben.

1) Machet folgende Brüche gleichnamig: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ ꝛc. bis $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$!
Dann: $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ ꝛc. bis $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$!
Dann: $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ ꝛc. bis $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{10}$; u. s. w.
Dann: $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{6}$ ꝛc.
2) Folgende Brüche: $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{10}$, $\frac{4}{7}$ und $\frac{10}{28}$, $\frac{4}{6}$ und $\frac{29}{60}$, $\frac{3}{10}$ und $\frac{7}{40}$, $\frac{11}{21}$ und $\frac{9}{63}$ ꝛc., überhaupt solche Brüche, wo der Nenner des einen in den Nenner des andern aufgeht, also z. B.
Halbe in 4tel, 6tel, 8tel ꝛc.
Drittel in 6tel, 9tel, 12tel ꝛc.
Viertel in 8tel, 12tel, 16tel ꝛc.
3) Folgende Brüche: $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{10}$ und $\frac{7}{15}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{3}{12}$ ꝛc., überhaupt Brüche, welche in einer Mittelzahl aufgehen, z. B. 6stel und 8tel in 24stel, statt in 48tel; 9tel und 12tel in 36stel, statt in 108stel u. s. w.
4) Drei gegebene Brüche: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ꝛc.; $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ u. s. w.
5) Nennet Brüche, deren kleinster Nenner in dem größten aufgeht!
6) Nennet Brüche, deren kleinster gemeinschaftlicher Nenner das Product beider ist!
7) Nennet Brüche, deren Nenner in einer Mittelzahl aufgehen!
8) Bestimmet die gegenseitige Größe folgender Brüche: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{9}$ und $\frac{9}{10}$!
9) Ordnet folgende Brüche nach ihrer Größe: $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{30}$!
10) Machet $\frac{7}{12}$ Thlr. und $\frac{9}{16}$ Thlr., $\frac{3}{4}$ Sgr. und $\frac{7}{9}$ Sgr., $\frac{7}{12}$ Pfd. und $\frac{8}{16}$ Pfd., $\frac{3}{20}$ Ctr. und $\frac{13}{20}$ Ctnr. gleichnamig!
11) Ein Papierhändler verkauft nach und nach $3\frac{1}{2}$ Ries Papier, jedesmal 1 Buch; wie oft hat er an den $3\frac{1}{2}$ Ries verkauft?

II. Schriftlich.

Vorbemerkung. Die bisher über die Brüche aufgestellten Lehren enthalten das Wesentlichste über die Eigenschaften der Brüche und ihre Behandlungsweise. Es folgt nun noch die Anwendung der vier Grundrechnungsarten in Brüchen. Bevor wir dazu übergehen, ist es an der Zeit, das Bisherige schriftlich einzuüben. Wir haben dieses bis hieher verschoben. Es ist damit nicht gesagt, daß nicht schon früher, jedoch immer erst nach mündlicher Einübung, die schriftliche Behandlung der Ziffern gebraucht werden dürfte. Es bleibt dies dem Lehrer überlassen, ob er zuerst die bisher entwickelten Sätze durchnehmen und mündlich einüben, und nun erst dasselbe schriftlich vornehmen lassen, oder ob er überall nach irgend einer mündlichen Einübung gleich die schriftliche hinzufügen will. Das Erste ist das Bessere, damit die Behandlung der Brüche möglichst frei geschehe, frei von allen schriftlichen Zeichen.

§. 93. Schriftliche Darstellungsweise der Brüche.

1) Bezeichnung derselben.

Dieselbe ist schon in §. 84 gelehrt worden. Sie ist einerlei mit der Darstellung einer zu bewerkstelligenden oder bewerkstelligten Division. Denn jeder Bruch ist als ein Quotient anzusehen, dessen Dividend der Zähler und dessen Divisor der Nenner ist; $3 : 4 = \frac{3}{4}$; $4 : 3 = \frac{4}{3}$.*)

*) heißt : in.

2) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in Brüche.

Beispiel 1. 24 in 8tel. (Antw. $24 = {}^{192}/_{8}$).

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 192. \end{array}$$ Also ${}^{192}/_{8}$.

Man vervielfacht die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, in welchen die ganze Zahl zu verwandeln ist; die ganze Zahl ist daher der Multiplicand, der Nenner des Bruchs der Multiplicator. Dem Producte gibt man den Nenner zum Nenner.

$$7 = \frac{7 \cdot 2}{2} = \frac{7 \cdot 3}{3} = \frac{7 \cdot 4}{4} \text{ u. s. w.}$$

Beispiel 2. 3048 Thlr. in 30stel.

Ausrechnung: $$\begin{array}{r} 3048 \\ 30 \\ \hline 91440. \end{array}$$

Also 3048 Thlr. $= \frac{91440}{30}$ Thlr.
$= 91440$ Sgr.

Beispiel 3. $829^2/_3$ einzurichten!

Ein Ganzes hat 3 Drittel, 829 Ganze 829×3 Drittel; um daher 829 in Drittel zu verwandeln, vervielfacht man 829 mit 3, und dann fügt man zu diesem Producte noch 2 hinzu.

Ausrechnung: $$\begin{array}{r} 829^2/_3 \\ 3 \\ \hline 2487 \\ +\ 2 \\ \hline 2489. \end{array}$$ Also $829^2/_3 = {}^{2489}/_{3}$.

Man pflegt auch der Kürze wegen zu dem Producte der 3 in 9 gleich die 2 hinzuzufügen und den Factor 3 nicht eigends hinzuschreiben:

$$\begin{array}{r} 829^2/_3 \\ \hline {}^{2489}/_{3} \end{array}$$

Beispiel 4. $3524^{129}/_{327}$ einzurichten.

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 3524 \\ 327 \\ \hline 24668 \\ 7048 \\ 10572 \\ \hline 1152348 \\ +\ 129 \\ \hline 1152477 \end{array}$$

Hier schreibt man 3524 als Multiplicand, 327 als Multiplicator hin und multiplicirt; zu dem Producte fügt man noch 129 hinzu. Geübtere addiren gleich bei der Multiplication von 3524 mit 7 die Zahl 129.

Also ist $3524^{129}/_{327} = {}^{1152477}/_{327}$.

```
   3524
    327 (+ 129)
   -----
  24797
   7048
 10572
 -------
1152477
```

3) **Verwandlung unächter Brüche in Ganze.**

Beispiel 1. $^{368}/_{8}$, wie wie viel Ganze?

Da $^{8}/_{8} = 1$, so muß man zusehen, wie oft $^{8}/_{8}$ in $^{368}/_{8}$ enthalten sind; eben so viel Ganze hat man. Dieses geschieht, wenn man mit 8 in 368 dividirt. Man setzt daher den Zähler des gegebenen Bruchs als Dividend, den Nenner als Divisor an, und dividirt. Der gefundene Quotient nennt die gesuchte Anzahl der Ganzen.

Ausrechnung:

```
8 | 368 | 46.   Also ist
  | 32  |       368/8 = 46.
  -----
    48
    48
  -----
    ..
```

Beispiel 2. $^{5924}/_{34}$, wie viel Ganze?

Ausrechnung:

```
34 | 5924 | 174.  Also ist 5924/34 = 174 8/34.
   | 34   |
   ------
     252
     238
   ------
      144
      136
     -----
        8
```

4) **Verwandlung der Form der Brüche durch Vervielfachung mit Beibehaltung des Werthes, = das Erweitern der Brüche.**

Beispiel 1. Erweitere den Bruch $^{2}/_{9}$ durch 5!

Ausrechnung: $\frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 5} = {}^{10}/_{45}$.

Beispiel 2. Erweitere den Bruch $^{392}/_{540}$ mit 11!

Ausrechnung:

```
 392        540
  11         11
-----      -----
 392        540
392        540       Also ist
-----      -----     392/540 = 4312/5940.
4312       5940
```

Im ersten Beispiele setzte man die erweiternde Zahl neben Zähler und Nenner als Factor und verrichtete die Multiplication. Im zweiten Beispiele mußte man wegen der Mehrstelligkeit der zu vervielfachenden Zahlen dieselben besonders hinschreiben u. s. w.

Beispiel 3. $^{15}/_{36}$ in 756stel.

Der Nenner 36 soll in 756 verwandelt, also mit einer gewissen Zahl vervielfacht werden. Dieselbe wird gefunden, wenn wir mit 36 in 756 dividiren. Da mit dem herauskommenden Quotienten der Nenner des Bruchs $^{15}/_{36}$ multiplicirt wird, so muß der Zähler 15 auch mit diesem Quotienten multiplicirt werden.

```
Also 36 | 756 | 21          15
        | 72  |             21   Also ist 15 15/36 = 315/756.
        -------           -----
          36                15
          36                30
        -------           -----
          = =              315
```

Oder: Aus dieser Auflösung geht hervor, daß der Zähler 15 mit dem Quotienten $^{756}/_{36}$ vervielfacht wird. Anstatt nun zuerst 756 durch 36 zu theilen und mit dem dadurch gefundenen Quotienten den Zähler 15 zu vervielfachen, kann man auch zuerst 15 mit 756 vervielfachen und dieses Product durch 36 theilen:

```
       756
        15
     -------
      3780
      756
     -------
36 | 11340 | 315.   Also ist 25/36 = 315/756.
   | 108   |
     -------
        54
        36
     -------
       180
       180
     -------
       = = =
```

5) Verwandlung der Form der Brüche durch Theilung, mit Beibehaltung ihres Werthes = Aufheben oder Heben der Brüche.

Beispiel 1. Hebe $^{24}/_{36}$!

Hier muß eine Zahl gesucht werden, durch welche sich 24 und 36 ohne Rest theilen lassen. Solcher Zahlen gibt es mehrere. Man kann daher den Bruch $^{24}/_{36}$ auf mehrfache Weise heben. Denn 24 und 36 sind theilbar durch 2, 3, 4, 6 und 12. Also kann der Bruch $^{24}/_{36}$ auf fünffache Art gehoben werden.

Ausrechnung: $\frac{24}{36}\Big|\overset{2}{\frac{12}{18}}$ oder: $\frac{24}{36}\Big|\overset{3}{\frac{8}{12}}$ oder: $\frac{24}{36}\Big|\overset{4}{\frac{6}{9}}$

oder: $\frac{24}{36}\Big|\overset{6}{\frac{4}{6}}$ oder: $\frac{24}{36}\Big|\overset{12}{\frac{2}{3}}$.

In den 4 ersten Fällen konnte man an dem gefundenen Bruche die Hebung fortsetzen:

$$\frac{24}{36}\Big|\overset{2}{\frac{12}{18}}\Big|\overset{3}{\frac{4}{6}}\Big|\overset{2}{\frac{2}{3}} \text{ oder: } \frac{24}{36}\Big|\overset{3}{\frac{8}{12}}\Big|\overset{2}{\frac{4}{6}}\Big|\overset{2}{\frac{2}{3}}$$

oder: $\frac{24}{36} \Big| \overset{4}{\frac{6}{9}} \Big| \overset{3}{\frac{2}{3}}$ oder: $\frac{24}{36} \Big| \overset{6}{\frac{4}{6}} \Big| \overset{2}{\frac{2}{3}}$.

Aus diesem Beispiele ist ersichtlich, daß die Hebung eines Bruchs oft auf mehrfache Weise geschehen und oft fortgesetzt werden kann. Jenes ist der Fall, wenn mehrere Zahlen gefunden werden können, durch welche sich Zähler und Nenner ohne Rest theilen lassen. Man pflegt alsdann gewöhnlich den größten Theiler zu nehmen, um den Werth des Bruchs in den möglichst kleinsten Zahlen auszudrücken. Nimmt man nicht den größten Theiler, so kann man die Hebung fortsetzen. Die schriftliche Darstellung ist in der oben angegebenen Art üblich.

Anmerkung. In Ansehung der Kennzeichen, ob ein Bruch sich heben läßt, verweise ich auf die später folgende Lehre von den Primzahlen. Der Lehrer kann von den dort vorkommenden Sätzen hier oder anderwärts so viel einschieben, als er für gut hält. Die Geschwindigkeit in diesen Operationen wird durch Uebung erlangt, welche gewöhnlich auf den ersten Blick die Zahl erkennen lehrt, durch welche ein Bruch gehoben werden kann.

6) Verwandlung ungleichnamiger Brüche in gleichnamige.

Erster Fall. Die Nenner der gleichnamig zu machenden Brüche haben keinen gemeinschaftlichen Theiler (sind Primzahlen unter einander).

Beispiel. $^2/_3$, $^4/_5$ und $^1/_7$ gleichnamig zu machen.

Nach dem Obigen ist in dem vorliegenden Falle der kleinste Hauptnenner 3 . 5 . 7 = 105. Also muß der Zähler des Bruchs $^2/_3$ mit 5 . 7, der Zähler des Bruchs $^4/_5$ mit 3 . 7, der Zähler des Bruchs $^1/_7$ mit 3 . 5 vervielfacht werden. Man kann die Ausrechnung auf mehrfache Weise ausführen.

$$\left.\begin{aligned} ^2/_3 &= \frac{2\,.\,5\,.\,7}{3\,.\,5\,.\,7} = {}^{70}/_{105} \\ ^4/_5 &= \frac{4\,.\,3\,.\,7}{5\,.\,3\,.\,7} = {}^{84}/_{105} \\ ^1/_7 &= \frac{1\,.\,3\,.\,5}{7\,.\,3\,.\,5} = {}^{15}/_{105} \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \begin{array}{r|l} & 105 \\ ^2/_3 & 35 \times 2 = {}^{70}/_{105} \\ ^4/_5 & 21 \times 4 = {}^{84}/_{105} \\ ^1/_7 & 15 \times 1 = {}^{15}/_{105} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c} & 105 & \\ ^2/_3 & 35 & 70 \\ ^4/_5 & 21 & 84 \\ ^1/_7 & 15 & 15 \end{array}$$

In den beiden letzten Darstellungsweisen wurde die Einheit = $^{105}/_{105}$ gesetzt und von derselben $^2/_3$, $^4/_5$, $^1/_7$ genommen. Man nahm daher von $^{105}/_{105}$ ein Drittel, dann dieses Drittel 2 Mal u. s. w.

Die angegebene Verfahrungsart ist in allen Fällen anwendbar, und führt immer zum Ziele. Wenn die Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß dieses Verfahren angewandt werden. Wenn aber die Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler haben, oder wenn ein Nenner ein Vielfaches aller andern Nenner ist, so kann

zwar auch das angegebene Verfahren gebraucht werden, allein man findet durch dasselbe in diesen Fällen nicht den möglich kleinsten Hauptnenner. Wie derselbe gefunden wird, zeigt das Nachfolgende.

Zweiter Fall. Einer der gegebenen Nenner ist ein Vielfaches der übrigen Nenner.

Beispiel. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{12}$ gleichnamig zu machen.

Der Nenner 12 ist ein Vielfaches der 3 übrigen Nenner 3, 4 und 6. In diesem Falle brauchen wir nicht das Product aller Nenner zum Hauptnenner zu machen, sondern 12 selbst ist schon der Hauptnenner. Wir sehen also jetzt $\frac{12}{12}$ als die Einheit an, und nehmen nun von derselben $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$.

Darstellung:

	12
$\frac{1}{3}$	$4 \times 1 = \frac{4}{12}$
$\frac{3}{4}$	$3 \times 3 = \frac{9}{12}$
$\frac{5}{6}$	$2 \times 5 = \frac{10}{12}$
$\frac{7}{12}$	$1 \times 7 = \frac{7}{12}$

kürzer:

	12	
$\frac{1}{3}$	4	4
$\frac{3}{4}$	3	9
$\frac{5}{6}$	2	10
$\frac{7}{12}$	1	7

Dritter Fall. Die Nenner der gegebenen Brüche, oder einige haben gemeinschaftliche Theiler.

Beispiel 1. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$ gleichnamig zu machen.

Ich vergleiche die Nenner mit einander. Der Nenner 3 ist in dem Nenner 9 ohne Rest enthalten; folglich ist er auch in jedem Vielfachen von 9 ohne Rest enthalten; den Nenner 3 brauche ich daher nicht weiter zu berücksichtigen. Dasselbe gilt vom Nenner 4 gegen 8. Ich habe daher nur noch den Hauptnenner von 8 und 9 zu suchen. Da beide keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist ihr Product $8 . 9 = 72$ ihr Hauptnenner, folglich auch der Hauptnenner, und zwar der möglichst kleinste, für alle Nenner.

Darstellung:

	72
$\frac{2}{3}$	$24 \times 2 = 48$
$\frac{1}{4}$	$18 \times 1 = 18$
$\frac{5}{8}$	$9 \times 5 = 45$
$\frac{7}{9}$	$8 \times 7 = 56$

Beispiel 2. Den kleinsten Hauptnenner für die Zahlen 4, 6, 8, 12, 10 zu finden?

Die beiden ersten Zahlen 4 und 6 gehen in 8 und 12 auf; sie brauchen daher nicht weiter berücksichtigt zu werden. Es bleiben also noch die Zahlen 8, 12, 10 übrig. Diese haben den gemeinschaftlichen Theiler 2; denn $8 = 4 . 2$, $12 = 6 . 2$, $10 = 5 . 2$; also ist $8 . 12 . 10 = 4 . 2 \times 6 . 2 \times 5 . 2$. Hier kann der Theiler 2 2mal weggestrichen werden, weil in dem Producte aus den übrigen Factoren $4 . 2 \times 6 \times 5$ auch jede der Zahlen 8, 12, 10 ohne Rest enthalten ist. 4 und 6 haben noch den gemeinschaftlichen Theiler 2; denn $4 = 2 . 2$, $6 = 3 . 2$; ich kann daher den Factor 2 noch ein mal weglassen; es bleiben also für den Hauptnenner noch die Zahlen 4, 2, 3, 5 übrig. Ihr Product gibt den kleinsten Hauptnenner für die angegebenen Zahlen. Derselbe ist also $4 . 2 . 3 . 5 = 120$.

Man pflegt dieses Verfahren auch in folgender Darstellung auszuführen:

4	6	8	12	10
	2:	4	6	5
		2:	2	3	5

Der Hauptnenner ist also 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120.

Zuerst durchstrich man diejenigen Zahlen, welche in den übrigen aufgehen, also 4 und 6. Nun zog man den gemeinschaftlichen Theiler 2 heraus, und theilte die übrigen Zahlen durch ihn. Man erhielt die Quotienten 4, 6 und 5. Nun zog man den gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen 4 und 6, welcher 2 ist, abermals heraus, und theilte 4 und 6 durch 2. Man erhielt die Zahlen 2 und 3, zu welchen, um den Hauptnenner zu bilden, die beiden herausgezogenen Theiler 2 und 2 und die Zahl 5 hinzugenommen werden müssen.

Beispiel 3. Den kleinsten Hauptnenner für die Zahlen 8, 12, 16, 21, 7, 9, 3 zu finden.

Man streiche zuerst alle Zahlen durch, welche in andern ohne Rest enthalten sind, hier: 8, 7 und 3, weil in allen Zahlen, in welchen 16, 21, und 9 ohne Rest enthalten sind, auch 8, 7 und 3 ohne Rest enthalten sein müssen. Mehrere der übrig bleibenden Zahlen haben gemeinschaftliche Factoren.

12 und 16
4 . 3 und 4 . 4

Hier kann der Factor 4 ein Mal weggestrichen werden, weil sich aus den noch übrig bleibenden Factoren sowohl 12 als 16 bilden läßt.

12 und 21
4 . 3 und 7 . 3

12 und 21 haben den gemeinschaftlichen Factor 3; derselbe kann also ein Mal weggestrichen werden.

21 und 9
7 . 3 und 3 . 3

21 und 9 haben den gemeinschaftlichen Factor 3; also kann 3 noch ein Mal gestrichen werden. Als Factoren, welche den kleinsten Hauptnenner bilden, bleiben daher übrig: 4 . 4 . 7 . 3 . 3 = 1008.

Man stellt dieses Verfahren auch so dar:

8	12	16	21	7	9	3
	3.4	4.4	7.3		3.3	

3
4
12
4
48
7
336
3
1008 Hauptnenner.

Wenn also irgend ein Nenner in einem andern Nenner aufgeht, so streicht man denselben aus, da es hinreichend ist, wenn jeder einzelne Nenner in dem Hauptnenner ein Mal enthalten ist. Hierauf zerfällt man jeden der übrigen Nenner in seine kleinsten Factoren, und fügt zu den Factoren des ersten Nenners die-

jenigen Factoren der übrigen Nenner noch hinzu, die er selbst noch nicht hat. Diese Factoren bilden als Product den kleinsten Hauptnenner.

Weiß man einmal diese Regel, so ist das Verfahren schnell geendigt. Es soll z. B. der kleinste Hauptnenner gefunden werden für die Nenner

6	8	16	45	9	36	50
2 3	2.2.2.	2.2.2.2.	3.3.5	3.3	2.2.3.3.	2.5.5.

Der kleinste Hauptnenner ist also 2. 3. 2. 2. 2. 3. 5. 5 = 3600. Denn in der Zahl 2. 3. 2. 2. 2. 3. 5. 5 kommen alle Factoren vor, welche die gegebenen Zahlen bilden: 2. 3 — 2. 2. 2 — 2. 2. 2. 2 — 3. 3. 5 — 3. 3 — 2. 2. 3. 3 und 2. 5. 5.

Anmerkung. Der Lehrer übe nun durch viele Beispiele die Schüler in der schriftlichen Behandlung der Brüche. Dazu gibt das erste Uebungsbuch in dem Kapitel von den Brüchen hinreichende Veranlassung. Dort ist Manches in anderer Ordnung und auf andere Weise dargestellt worden, als es in der bisherigen Auseinandersetzung vorliegt. Dieses ist nicht ohne Absicht geschehen. Denn wenn das Uebungsbuch in der Hand des Schülers, ohne irgend eine Abweichung oder Veränderung, überall genau denselben Gang geht, welchen der mündliche Unterricht des Lehrers einschlägt, so hat der Schüler durch den Gebrauch des Buches nicht Anstrengung genug. Die Darstellungsweise desselben darf und soll daher von dem mündlichen Vortrage des Lehrers abweichen, damit der Schüler auch beim schriftlichen Rechnen und außer der Schule seine Kräfte anstrengen müsse, und das Rechnen als ein solcher Gegenstand erscheine, welcher den Kopf des Menschen überall in Anspruch nimmt.

Zweite Uebung.

Das Zusammenzählen mit Brüchen.

I. Mündlich.

§. 94. Zusammenzählen gleichnamiger Brüche.

Beispiel 1. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{4}$ zusammenzählen.

Auflösung. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$; $\frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$; also ist $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Regel. Wenn gleichnamige Brüche zusammengezählt werden sollen, so zählt man ihre Zähler zusammen, gibt dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner, und zieht die Ganzen heraus.

Beispiel 2. $2\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{5}$, $5\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{5}$ zusammenzählen.

Auflösung. $2\frac{2}{5} + 4\frac{1}{5} = 6\frac{3}{5}$; $6\frac{3}{5} + 5\frac{4}{5} = 11\frac{7}{5} = 12\frac{2}{5}$; $12\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 13$; also ist $2\frac{2}{5} + 4\frac{1}{5} + 5\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = 13$. Oder: $2 + 4 + 5 = 11$; $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} = 2$; $11 + 2 = 13$.

Regel. Wenn gemischte Zahlen, deren Brüche gleichnamig sind, zusammengezählt werden sollen, so zählt man die ganzen Zahlen

und auch die Brüche zusammen, zieht aus der Summe der Brüche die Ganzen heraus, fügt dieselben zu der Summe der ganzen Zahlen und zu dieser Summe den übrig gebliebenen Bruch.

Man könnte auch die gemischten Zahlen einrichten und dann zusammenzählen; allein dieses ist weitläuftiger. Z. B. $2\frac{4}{7} + \frac{5}{7} + 8\frac{1}{7}$, wie viel zusammen?

Auflösung. $2\frac{4}{7} = \frac{18}{7}$; $\frac{18}{7} + \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$; $8\frac{1}{7} = \frac{57}{7}$; $\frac{23}{7} + \frac{57}{7} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$.

Der Lehrer gebe nun viele Beispiele zur mündlichen Uebung in gleichnamigen Brüchen und in gemischten Zahlen mit gleichnamigen Brüchen auf!

§. 95. Zusammenzählen ungleichnamiger Brüche.

Beispiel 1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, wie viel zusammen?

Auflösung. Die Benennungen dieser beiden Brüche sind ungleichnamig. Ungleichnamiges aber kann nicht zusammengefügt werden. Das Ungleichnamige muß zuvor gleichnamig gemacht werden. Wie dieses bewerkstelligt wird, ist bekannt. $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$; also ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Regel. Sollen ungleichnamige Brüche in eine Summe zusammengezogen werden, so macht man sie zuerst gleichnamig, und zählt sie dann als solche auf die bekannte Art zusammen.

Beispiel 2. $\frac{3}{5} + \frac{6}{7}$?

Auflösung. $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$; $\frac{6}{7} = \frac{30}{35}$; $\frac{21}{35} + \frac{30}{35} = \frac{51}{35} = 1\frac{16}{35}$; also ist $\frac{3}{5} + \frac{6}{7} = 1\frac{16}{35}$.

Beispiel 3. $5\frac{1}{8} + \frac{7}{12} + \frac{3}{4}$?

Auflösung. $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$; $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$; $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$; $\frac{3}{24} + \frac{14}{24} + \frac{18}{24} = \frac{35}{24} = 1\frac{11}{24}$; $5 + 1\frac{11}{24} = 6\frac{11}{24}$; also ist $5\frac{1}{8} + \frac{7}{12} + \frac{3}{4} = 6\frac{11}{24}$.

Regel. Sollen gemischte Zahlen und ungleichnamige Brüche zusammengezählt werden, so werden die Brüche gleichnamig gemacht, zusammengezählt, die Ganzen herausgezogen, diese Ganzen zu den übrigen Ganzen und zu dieser Summe der übrig gebliebene Bruch hinzugefügt.

Beispiel 4. $6\frac{2}{3} + 12\frac{1}{4} + 9\frac{3}{8}$?

Auflösung. $6 + 12 + 9 = 27$; $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$; $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$; $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$; $\frac{16}{24} + \frac{6}{24} + \frac{9}{24} = \frac{31}{24} = 1\frac{7}{24}$; $27 + 1\frac{7}{24} = 28\frac{7}{24}$; also ist $6\frac{2}{3} + 12\frac{1}{4} + 9\frac{3}{8} = 28\frac{7}{24}$.

Regel. Sollen gemischte Zahlen, deren Brüche ungleichnamig sind, zusammengezählt werden, so zählt man zuerst die ganzen Zahlen zusammen, macht die Brüche gleichnamig, zieht die Ganzen heraus, fügt dieselben zu der Summe der ganzen Zahlen und setzt den übrig bleibenden Bruch bei.

Der Lehrer lege dergleichen Beispiele den Schülern zur mündlichen Uebung viele vor, leichte und schwere durch einander. Denn die Abwechselung ermuntert und reizt, weil sie der menschlichen Natur zusagt. Auch an angewandten Beispielen darf es nicht fehlen. Z. B. $\frac{2}{3}$ Thlr. + $\frac{4}{3}$ Thlr.?

Auflösung. $\frac{2}{3}$ Thlr. = $\frac{10}{15}$ Thlr.; $\frac{4}{5}$ Thlr. = $\frac{12}{15}$ Thlr.; $\frac{10}{15}$ Thlr. + $\frac{12}{15}$ Thlr. = $\frac{22}{15}$ Thlr. = $1\frac{7}{15}$ Thlr.; also ist $\frac{2}{3}$ Thlr. + $\frac{4}{5}$ Thlr. = $1\frac{7}{15}$ Thlr.

$10\frac{5}{12}$ Pf. + 8 Pf. + $6\frac{3}{4}$ Pf. + $15\frac{1}{3}$ Pf.? (Antw. $40\frac{1}{2}$ Pf.)

$\frac{3}{4}$ Sgr. + $\frac{4}{5}$ Thlr.? Hier müssen beide Geldsorten, welche zwar gleichartig, aber nicht gleichnamig sind, gleichnamig gemacht werden. Dieses kann auf doppelte Weise geschehen, indem man entweder die Thlr. in Groschen, oder die Groschen in Thaler umwandelt. Also:

$\frac{4}{5}$ Thlr. = $\frac{4 . 30}{5}$ = $\frac{120}{5}$ Sgr. = 24 Sgr.; 24 Sgr. + $\frac{3}{4}$ Sgr. = $24\frac{3}{4}$ Sgr.; also ist $\frac{3}{4}$ Sgr. + $\frac{4}{5}$ Thlr. = $24\frac{3}{4}$ Sgr.

Oder: $\frac{3}{4}$ Sgr. = $\frac{3}{4 . 30}$ = $\frac{3}{120}$ = $\frac{1}{40}$ Thlr.; $\frac{4}{5}$ Thlr. = $\frac{32}{40}$ Thlr.; $\frac{1}{40}$ Thlr. + $\frac{32}{40}$ Thlr. = $\frac{33}{40}$ Thlr. = $\frac{33 . 30}{40}$ Sgr. = $24\frac{3}{4}$ Sgr.

In jenem Falle vervielfacht man den Zähler der höheren Geldsorte mit der Reductionszahl; in diesem Falle vervielfacht man den Nenner der niederen Sorte mit der Reductionszahl.

Aufgaben als Beispiele.

1) Zähle je 2 auf einander folgende Stammbrüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{12}$ zusammen, nämlich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ u. s. w. (Antw. $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{42}$, $\frac{15}{56}$, $\frac{17}{72}$, $\frac{19}{90}$, $\frac{21}{110}$, $\frac{23}{132}$.)

2) Zähle zu $\frac{2}{3}$ folgende Brüche einzeln: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{6}$, $5\frac{8}{9}$, $10\frac{1}{10}$. (Antw. $1\frac{5}{12}$, $1\frac{7}{15}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{24}$, $3\frac{5}{12}$, $4\frac{5}{6}$, $6\frac{5}{9}$, $10\frac{23}{30}$.)

3) Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 8 und $\frac{1}{5}$ von 12 zusammen? (Antw. $5\frac{1}{15}$.)

4) Karl gewinnt den 6ten Theil von 21 Thlr. und erhält den 5ten Theil von 32 Thlr. zum Geschenke. Wie viel Thlr. besitzt er nun? (Antw. $9\frac{9}{10}$ Thlr.)

5) Ein Bäcker mengt unter $10\frac{3}{4}$ Pfd. Weizenmehl $5\frac{7}{8}$ Pfd. Roggenmehl und $6\frac{1}{2}$ Pfd. Wasser. Wie schwer ist die Mischung? (Antw. $23\frac{1}{8}$ Pfd.)

6) Julius bedarf zu einem Rocke $3\frac{4}{7}$ Ellen, zu Beinkleidern $1\frac{3}{8}$ Ellen und zur Weste $\frac{3}{4}$ Ellen desselben Zeuges, wie viel muß er dem Schneider schicken? (Antw. $5\frac{39}{56}$ Ellen.)

7) Zu einem Gastmahle werden angekauft: $12\frac{1}{2}$ Pfd. Schweinefleisch, $18\frac{3}{4}$ Pfd. Rindfleisch, $14\frac{3}{8}$ Pfd. Kalbfleisch und $4\frac{1}{2}$ Pfd. Hammelfleisch. Wie viel Fleisch wurde zu diesem Gastmahle erfordert? (Antw. $50\frac{1}{8}$ Pfd.)

8) Ein Knabe bedarf 3 Schulbücher; das erste kostet $\frac{4}{5}$ Thlr., das zweite $\frac{2}{3}$ Thlr. und das dritte $1\frac{3}{8}$ Thlr. Um wie viel Geld muß er seinen Vater bitten? (Antw. Um $2\frac{101}{120}$ Thlr.)

9) Ein Krämer verkauft $12\frac{3}{10}$, $24\frac{4}{5}$ und $38\frac{11}{12}$ Pfd.; wie viel an Gewicht zusammen? (Antw. $76\frac{1}{60}$ Pfd.)

10) $10\frac{3}{4}$ Jahre + $5\frac{1}{2}$ Jahre + $8\frac{1}{2}$ Jahre + 5 Monate — wie viel Jahre zusammen? (Antw. $25\frac{1}{6}$ Jahre.)

II. Schriftlich.

§. 96. Verfahren beim schriftlichen Zusammenzählen der Brüche.

Beispiel 1. $\frac{4}{9} + \frac{3}{9} + \frac{11}{9} + \frac{8}{9}$, wie viel zusammen? Man setzt die Zähler unter einander, zieht sie zusammen und theilt die Summe durch den Nenner, um die Ganzen herauszuziehen.

$\frac{4}{9}$	4	
$\frac{3}{9}$	3	
$\frac{11}{9}$	11	
$\frac{8}{9}$	8	
9 :	26	$2\frac{8}{9}$.
	18	
	8	

Beispiel 2. $5\frac{3}{11} + 9\frac{8}{11} + 24 + 12\frac{1}{11} + \frac{10}{11}$, wie viel zusammen? (Antw. 52.)

Ansatz:		Oder:		
	$5\frac{3}{11}$	$5\frac{3}{11}$	3	Die Ausführung
	$9\frac{8}{11}$	$9\frac{8}{11}$	8	ist für sich klar.
	24	24		
	$12\frac{1}{11}$	$12\frac{1}{11}$	1	
	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{11}$	10	
	$50\frac{22}{11} = 2$	50	$\frac{22}{11} = 2$	
	2	2		
Summa =	52	52		

Beispiel 3. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, und $\frac{7}{8}$ zusammen zu zählen!

Diese Brüche müssen zuerst gleichnamig gemacht werden, wie es oben gezeigt worden ist. Die Ausführung und die Art des Ansatzes erkennt man aus dem Früheren und aus dieser Darstellung:

	24
$\frac{1}{2}$	$12 \times 1 = 12$
$\frac{2}{3}$	$8 \times 2 = 16$
$\frac{3}{4}$	$6 \times 3 = 18$
$\frac{7}{8}$	$3 \times 7 = 21$
	$\frac{67}{24} = 2\frac{19}{24}$.

Beispiel 4. $24\frac{2}{3} + 104\frac{1}{6} + 1003\frac{4}{7} + 294\frac{11}{12} + \frac{3}{4}$.

Ausrechnung.

	84		
$24\frac{2}{3}$	$28 \times 2 = 56$		
$104\frac{1}{6}$	$14 \times 1 = 14$		
$1003\frac{4}{7}$	$12 \times 4 = 48$		
$294\frac{11}{12}$	$7 \times 11 = 77$		
$\frac{3}{4}$	$21 \times 3 = 63$		
1425		84 : 258	$3\frac{1}{14}$
$3\frac{1}{14}$		252	
$1428\frac{1}{14}$		$\frac{6}{84} = \frac{1}{14}$	

Der kleinste Hauptnenner ist 84. In demselben werden alle Brüche ausgedrückt, dann zusammengezählt und in Ganze verwandelt. Die ganzen Zahlen werden auch summirt, jene werden zu dieser Summe hinzugezählt, und der etwa gebliebene Bruch beigefügt.

Dritte Uebung.

Das Abziehen mit Brüchen.

I. Mündlich.

§. 97. Das Abziehen gleichnamiger und ungleichnamiger Brüche und gemischter Zahlen.

Beispiel 1. Ziehe $^2/_7$ von $^6/_7$ ab!

Auflösung. $^6/_7 - ^2/_7 = \frac{6-2}{7} = ^4/_7$.

Regel. Wenn ein Bruch von einem gleichnamigen abgezogen werden soll, so zieht man den Zähler vom Zähler (den Zähler des Subtrahenden von dem Zähler des Minuenden) und gibt dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner.

Beispiel 2. Ziehe $^4/_5$ von 8 ab!

Auflösung. $8 = 7 + 1 = 7 + ^5/_5$; $^5/_5 - ^4/_5 = ^1/_5$; also ist $8 - ^4/_5 = 7^1/_5$.

Oder: $8 = \frac{8 \cdot 5}{5} = ^{40}/_5$; $^{40}/_5 - ^4/_5 = ^{36}/_5 = 7^1/_5$.

Regel. Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll, so nimmt man von der ganzen Zahl 1 (oder mehrere 1, wenn dies nöthig ist) ab, verwandelt dieses (oder diese) in einen Bruch, dessen (deren) Nenner dem Nenner des abzuziehenden gleich ist, bewirkt nun den Abzug des gegebenen Bruchs von diesem gebildeten, und fügt dem Reste die um 1 (oder mehrere 1) verminderte Zahl bei. Oder: man macht die ganze Zahl mit dem gegebenen Bruche gleichnamig, bewirkt den Abzug, und zieht aus dem Reste die Ganzen heraus.

Beispiel 3. Ziehe $^6/_7$ von $4^6/_7$ und von $4^2/_7$ ab!

Auflösung. $4^6/_7 - ^6/_7 = 4$. Ferner: $4^2/_7 = 3^9/_7$; $^9/_7 - ^6/_7 = ^3/_7$; $^3/_7 + 3 = 3^3/_7$; also ist $4^2/_7 - ^6/_7 = 3^3/_7$.

Oder: $4^2/_7 = ^{30}/_7$; $^{30}/_7 - ^6/_7 = ^{24}/_7 = 3^3/_7$.

Regel. Um einen Bruch von einer gemischten Zahl abzuziehen, zieht man den Bruch von dem Bruche der gemischten Zahl ab, wenn es angeht; oder, wenn dies nicht geht, so nimmt man von der ganzen Zahl so viel Einheiten hinzu, daß der Abzug bewerkstelligt werden kann; die hinzugenommenen Einheiten werden dem Bruche gleichnamig gemacht u. s. w. Oder: man verwandelt die gemischte Zahl in einen Bruch, zieht den Subtrahenden vom Minuenden ab, und aus dem Reste die Ganzen heraus.

Beispiel 4. Wie viel ist 24 weniger $6^3/_4$?

Auflösung. $24 - 6 = 18$; $18 - ^3/_4 = 17^1/_4$; also ist $24 - 6^3/_4 = 17^1/_4$.

Oder: $24 = \frac{4 \cdot 24}{4} = ^{96}/_4$; $6^3/_4 = ^{27}/_4$; $^{96}/_4 - ^{27}/_4 = ^{69}/_4 = 17^1/_4$.

Beispiel 5. $8\frac{5}{7} - 2\frac{1}{7}$; $8\frac{5}{7} - 2\frac{6}{7}$?

Auflösung. a. $8\frac{5}{7} - 2\frac{1}{7} = 6\frac{4}{7}$. Oder: $8\frac{5}{7} = \frac{61}{7}$; $2\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$; $\frac{61}{7} - \frac{15}{7} = \frac{46}{7} = 6\frac{4}{7}$.

b. $8\frac{5}{7} - 2\frac{6}{7} = 6\frac{5}{7} - \frac{6}{7} = 5\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = 5\frac{6}{7}$. Oder: $8\frac{5}{7} = \frac{61}{7}$; $2\frac{6}{7} = \frac{20}{7}$; $\frac{61}{7} - \frac{20}{7} = \frac{41}{7} = 5\frac{6}{7}$.

Diese Operationen und die aus den Beispielen 4 und 5 zu ziehenden Regeln sind für sich klar.

Beispiel 6. Wie viel ist $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$?

Auflösung. $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$; also ist $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Regel. Man macht die Brüche gleichnamig, zieht dann, wie oben, den Zähler des Subtrahenden von dem Zähler des Minuenden ab, und gibt den Nenner der gleichnamigen Brüche dem Reste zum Nenner.

Beispiel 7. Wie viel ist $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$?

Auflösung. $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$; $\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$; also ist $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$.

Beispiel 8. Wie viel ist $10\frac{2}{7} - \frac{5}{9}$?

Auflösung. $10\frac{2}{7} = \frac{72}{7} = \frac{72 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{648}{63}$; $\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$; $\frac{648}{63} - \frac{35}{63} = \frac{613}{63} = 9\frac{46}{63}$.

Beispiel 9. Wie viel ist $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{6}$?

Auflösung. $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$; $2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$; $\frac{17}{5} = \frac{17 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{102}{30}$; $\frac{13}{6} = \frac{13 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{65}{30}$; $\frac{102}{30} - \frac{65}{30} = \frac{37}{30} = 1\frac{7}{30}$.

Oder: $3 - 2 = 1$; $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$; $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$; $\frac{12}{30} - \frac{5}{30} = \frac{7}{30}$; $1 + \frac{7}{30} = 1\frac{7}{30}$.

Aufgaben, beispielweise.

1) Ziehet von 1 alle Stammbrüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{12}$ ab!
2) Wie viel ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ rc.?
3) Wie viel ist $\frac{11}{12} - \frac{10}{11}$, $\frac{10}{11} - \frac{9}{10}$, $\frac{9}{10} - \frac{8}{9}$, $\frac{8}{9} - \frac{7}{8}$, $\frac{7}{8} - \frac{6}{7}$, $\frac{6}{7} - \frac{5}{6}$, $\frac{5}{6} - \frac{4}{5}$, $\frac{4}{5} - \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$?
4) Fritz gibt von 7 Rthlr. $5\frac{4}{15}$ Rthlr. aus; wie viel behält er? (Antw. $1\frac{11}{15}$ Rthlr.)
5) Ein Kaufmann verkauft von $20\frac{3}{4}$ Pfd. $17\frac{7}{8}$ Pfd.; wie viel hat er noch? ($2\frac{7}{8}$ Pfd.)
6) Von $12\frac{2}{5}$ Rthlr. werden $8\frac{17}{30}$ ausgegeben; wie viel bleibt übrig? (Antw. $3\frac{5}{6}$ Rthlr.)
7) A ist $30\frac{3}{4}$ Jahre alt, B 7 Jahre 11 Monate; wie viel älter ist A als B? (Antw. $22\frac{5}{6}$ Jahre.)
8) Von $36\frac{4}{5}$ Sgr. sind $16\frac{1}{2} + 7\frac{3}{4}$ ausgegeben worden; wie viel Sgr. sind noch übrig? (Antw. $12\frac{11}{20}$ Sgr.)
9) Von $26\frac{1}{4}$ Ellen Tuch werden $10\frac{7}{8}$ Ellen abgeschnitten; wie viel Ellen bleiben übrig? (Antw. $15\frac{3}{8}$ Ellen.)

10) Von $100\frac{3}{4}$ Ellen sollen so viel Ellen abgeschnitten werden, daß $80\frac{1}{8}$ Ellen übrig bleiben; wie viel Ellen müssen abgeschnitten werden? (Antw. $20\frac{5}{8}$ Ellen.)

Man gebe viele solcher Aufgaben, lasse die Schüler ähnliche Aufgaben bilden und einander aufgeben, combinire auch die vorige Uebung mit dieser, indem man Brüche zusammenzahlen und abziehen läßt, z. B.: wie viel ist $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}$; $16\frac{1}{2} + 6\frac{2}{3} - 8\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$ u. s. w.? Wenn man es den Schülern nicht erlaubt, die mündlich genannten Brüche aufzuschreiben, so wähle man leicht behaltbare Zahlen, oder schreibe die Aufgabe an die Tafel! Man nenne aber jede Aufgabe nur ein Mal, die Schüler verlassen sich sonst darauf, daß die Aufgabe mehr als ein Mal genannt wird, und dann hören sie nur mit halber Aufmerksamkeit. Ueberhaupt muthe man den Schülern nicht zu wenig zu! Wer es nicht aus eigener Erfahrung oder Ansicht weiß, glaubt es nicht, welche außerordentliche Fertigkeit Kindern im Behalten und Behandeln von Zahlen im Kopfe, ohne übergroßen Aufwand von Zeit und Mühe, angeeignet werden kann.

II. Schriftlich.

§. 98. Das schriftliche Verfahren beim Abziehen der Brüche.

Beispiel 1. Ziehe $\frac{7}{12}$ von $\frac{11}{12}$ ab!

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} \frac{11}{12} \\ \frac{7}{12} \\ \hline \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Man setzt den Minuenden (die Vollzahl) oben hin, den Subtrahenden unter denselben, zieht den Zähler dieses von dem Zähler jenes ab, und gibt dem Reste den Nenner der gleichnamigen Brüche zum Nenner.

Beispiel 2. Vermindere 10 um $6\frac{4}{5}$!

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 6\frac{4}{5} \\ \hline 3\frac{1}{5} \end{array}$$

Der Ansatz ist wie bei der Subtraction in ganzen Zahlen. Um den Bruch abzuziehen, leiht oder borgt man von der Vollzahl eine Einheit, schreibt den Rest herunter, und zieht nun die ganze Zahl von der ganzen.

Beispiel 3. Ziehe von $15\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$ ab!

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 15\frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \hline 14\frac{5}{7} \end{array}$$

Ansatz und Verfahren, wie vorher. Oder: $\frac{6}{7}$ von 1 oder $\frac{7}{7}$ bleibt $\frac{1}{7}$. $14\frac{4}{7} + \frac{1}{7} = 14\frac{5}{7}$.

Beispiel 4. Wie viel bleibt, wenn man $6\frac{13}{17}$ von $9\frac{6}{17}$ abzieht?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 9\frac{6}{17} \\ 6\frac{13}{17} \\ \hline 2\frac{10}{17} \end{array}$$

Hier nimmt man von 9 eine Einheit weg, verwandelt dieselbe in 17tel = $\frac{17}{17}$, fügt diese zu $\frac{6}{17}$ hinzu, welches $\frac{23}{17}$ gibt; nun zieht man $\frac{13}{17}$ von $\frac{23}{17}$ ab, und schreibt den Rest herunter; dann zieht man die ganze Zahl von der ganzen ab.

Oder: Man zieht zuerst 13 von 17 (d. h. $\frac{13}{17}$ von $\frac{17}{17}$) ab, Rest 4, 4 + 6 = 10, $\frac{10}{17}$. So hat man es mit kleineren Zahlen zu thun.

Beispiel 5. Wie viel bleibt, wenn man $\frac{3}{4}$ um $\frac{4}{11}$ vermindert?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r|l} & \overset{44}{\smile} \\ \frac{3}{4} & 11 \times 3 = 33 \\ \frac{4}{11} & 4 \times 4 = 16 \\ \hline & \frac{17}{44}. \end{array}$$

Man macht die Brüche gleichnamig; die Nenner beider Brüche gehen in 44 auf; man verwandelt daher beide in 44stel, und zieht nun, wie bei gleichnamigen Brüchen, Zähler von Zähler, und gibt dem Reste den Nenner der gleichnamigen Brüche zum Nenner.

Beispiel 6. Vermindre $29\frac{1}{3}$ um $8\frac{5}{9}$!

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 29\frac{1}{3}\ (\frac{3}{9}) \\ 8\frac{5}{9} \\ \hline 20\frac{7}{9} \end{array}$$

Da Drittel sich in Neuntel ausdrücken lassen, so thut man dies, leiht bei der Vollzahl eine Einheit, verwandelt dieselbe in Neuntel u. s. w.

Beispiel 7. Wie groß ist der Unterschied zwischen $519\frac{13}{20}$ und $389\frac{11}{24}$?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r|l} & \overset{120}{\smile} \\ 519\frac{13}{20} & 6 \times 13 = 78 \\ 389\frac{11}{24} & 5 \times 11 = 55 \\ \hline 130\frac{23}{120} & \frac{23}{120} \end{array}$$

Man macht die ungleichnamigen Brüche gleichnamig; zieht dann Zähler von Zähler und Ganze von Ganzen u. s. w.

Aufgaben.

1) Von $40\frac{7}{16}$ Ctnr. sind $9\frac{1}{3}$ Ctnr. verkauft; wie viel hat man noch? (Antw. $31\frac{5}{48}$ Ctnr.)

2) Wie viel Rthlr. behält man, wenn man von $2006\frac{7}{13}$ Rthlr. $1809\frac{15}{23}$ Rthlr. ausgibt? (Antw. $196\frac{265}{299}$ Rthlr.)

3) Wie viel macht $18\frac{1}{2} + 17\frac{3}{4} + 7\frac{1}{9} - (18\frac{7}{12} + \frac{14}{15})$? (Antw. $23\frac{38}{45}$.)

4) Wie viel ist $48\frac{6}{15} + 29\frac{1}{3} + 27\frac{5}{12} + 15\frac{1}{20} - (74\frac{1}{7} + 7\frac{5}{9} + 18\frac{5}{21} + \frac{11}{30})$?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r|l} & \overset{60}{\smile} \\ 48\frac{6}{15} & 4 \times 6 = 24 \\ 29\frac{1}{3} & 20 \times 1 = 20 \\ 27\frac{5}{12} & 5 \times 5 = 25 \\ 15\frac{1}{20} & 3 \times 1 = 3 \\ \hline 119 & \frac{72}{60} = 1\frac{12}{60} \\ 1\frac{1}{5} & = 1\frac{1}{5} \\ \hline 120\frac{1}{5} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \overset{630}{\smile} \\ 74\frac{1}{7} & 90 \times 1 = 90 \\ 7\frac{5}{7} & 70 \times 5 = 350 \\ 18\frac{5}{21} & 30 \times 5 = 150 \\ \frac{11}{30} & 21 \times 11 = 231 \\ \hline 99 & \frac{821}{630} = 1\frac{191}{630} \\ 1\frac{191}{630} & \\ \hline 100\frac{191}{630} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \overset{630}{\smile} \\ 120\frac{1}{5} & 126 \times 1 = 126 \\ 100\frac{191}{630} & 1 \times 191 = 191 \\ \hline 19\frac{113}{126} & \frac{565}{630} = \frac{113}{126}. \end{array}$$

Zuerst wurden die zusammenzuzählenden Zahlen zusammen gefügt, dann die von ihnen abzuziehenden in eine Summe gebracht, hierauf diese Summe von jener abgezogen. Bei der letzten Operation mußte ($1 = {}^{630}/_{630}$) von der Vollzahl geborgt werden. Das Uebrige ist für sich klar.

Anmerkung. Aufgaben zur schriftlichen Uebung im Zusammenzählen und Abziehen der Brüche, siehe erstes Uebungsbuch, Abschn. XVII. u. XVIII.

Vierte Uebung.

Das Vervielfachen mit Brüchen.

I. Mündlich.

§. 99. Brüche oder gemischte Zahlen mit Ganzen zu vervielfachen.

Beispiel 1. $^3/_8$ soll mit 4 vervielfacht werden.

Auflösung 1. 1 mal $^3/_8 = {}^3/_8$; 2 mal $^3/_8 = {}^6/_8$; 3 mal $^3/_8 = {}^9/_8$; 4 mal $^3/_8 = {}^{12}/_8 = 1^1/_2$.

Auflösung 2. Wird der Nenner eines Bruches durch 2 getheilt, indeß der Zähler ungeändert bleibt, so wird der Werth des Bruches, wie oben gezeigt worden ist, 2 mal so groß; wird er durch 3 oder 4 getheilt, so wird der Werth des Bruches 3, 4 mal so groß. Theilt man daher den Nenner des Bruches $^3/_8$, nämlich 8 durch 4 und läßt den Zähler ungeändert, so ist der Bruch $^3/_8$ mit 4 vervielfacht worden. Also:

$$^3/_8 \times 4 = \frac{3}{4 : 8} = {}^3/_2 = 1^1/_2.$$

Regel. Soll der Bruch mit einer ganzen Zahl vervielfacht werden, so vervielfache den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und gib dem Producte den Nenner des Bruches zum Nenner; oder: laß den Zähler ungeändert, theile den Nenner des Bruches durch die ganze Zahl, und gib dem umgeänderten Zähler diesen Quotienten zum Nenner.

Die erste Verfahrungsweise ist in allen Fällen anwendbar; die letzte schlägt man nur dann ein, wenn sich der Nenner des Bruches durch die gegebene Zahl ohne Rest theilen läßt.

Beispiel 2. $7^2/_5$ soll mit 3 vervielfacht werden.

Auflösung 1. Hier hat man sowohl 7, als auch $^2/_5$ mit 3 zu vervielfachen, $3 \times 7 = 21$; $3 \times {}^2/_5 = {}^6/_5 = 1^1/_5$; $21 + 1^1/_5 = 22^1/_5$; also ist $7^2/_5 \times 3 = 22^1/_5$.

Auflösung 2. $7^2/_5 = {}^{37}/_5$; $^{37}/_5 \times 3 = {}^{111}/_5 = 22^1/_5$.

Regel. Um eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl zu vervielfachen, vervielfacht man entweder die einzelnen Theile der gemischten Zahl, und fügt die Producte zusammen; oder man richtet die gemischte Zahl zuerst ein, und vervielfacht den dadurch entstehenden uneigentlichen Bruch mit der ganzen Zahl.

§. 100. **Ganze Zahlen mit Brüchen oder mit gemischten Zahlen zu vervielfachen.**

Beispiel 1. 4 soll mit $^3/_7$ vervielfacht werden.

Auflösung 1. Wenn 4 1mal genommen werden soll, so gibt es 1 . 4; soll 4 $^1/_2$mal genommen werden, so gibt es $^1/_2$. 4; soll 4 $^1/_7$mal genommen werden, so gibt es $^1/_7$. 4 = 1mal den siebenten Theil von 4 = $^4/_7$. Nun soll 4 aber nicht mit $^1/_7$, sondern mit dem Dreifachen von $^1/_7$, d. h. mit $^3/_7$, vervielfacht werden, also ist auch das Product 3 . $^4/_7$ = $^{12}/_7$ = $1^5/_7$.

Auflösung 2. Wenn 4 1mal genommen wird, so erhält man 1 . 4; wird 4 3mal genommen, so erhält man 3 . 4; nun soll aber 4 nicht mit 3, sondern mit dem siebenten Theile von 3 vervielfacht werden; die Zahl 4 ist also dadurch, daß sie mit 3 vervielfacht wurde, mit einer 7mal so großen Zahl vervielfacht worden, als hätte geschehen sollen; deßhalb ist auch das Product 7mal so groß geworden, als es werden soll; man muß daher von dem Producte 3 . 4 den siebenten Theil nehmen; dieses gibt $\frac{3 \cdot 4}{7} = {}^{12}/_7 = 1^5/_7$.

Regel. Um eine ganze Zahl mit einem Bruche zu vervielfachen, **theilt man dieselbe durch den Nenner des Bruches, und vervielfacht den erhaltenen Quotienten mit dem Zähler des Bruches. Oder: man vervielfacht die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches, und theilt dieses Product durch den Nenner desselben.**

Zusatz. $6 \times {}^2/_5 = {}^{12}/_5$, und ${}^2/_5 \times 6 = {}^{12}/_5$. Also kommt es auch bei Brüchen, wie bei ganzen Zahlen, auf die Ordnung der Factoren nicht an. Das Product bleibt dasselbe, wenn nur die Factoren dieselben sind, gleich viel, in welcher Ordnung die Factoren mit einander vervielfacht werden.

§. 101. **Brüche oder gemischte Zahlen mit Brüchen oder gemischten Zahlen zu vervielfachen.**

Beispiel 1. $^2/_3$ mit $^4/_5$ zu vervielfachen.

Auflösung. Wird $^2/_3$ mit 1 vervielfacht, so erhält man $^2/_3$. Soll nun $^2/_3$ mit dem fünften Theile von 1, d. h. mit $^1/_5$ vervielfacht werden, so entsteht auch nur der fünfte Theil von $^2/_3$. Um also $^2/_3$ mit $^1/_5$ zu vervielfachen, muß ich von $^2/_3$ den fünften Theil nehmen. Ein Bruch wird aber durch 5 getheilt, wenn ich, wie oben gezeigt ist, den Nenner mit 5 vervielfache, ${}^2/_3 \times {}^1/_5$ ist also $= \frac{2}{3 \cdot 5} = {}^2/_{15}$. Allein $^2/_3$ soll nicht mit $^1/_5$ sondern mit $^4/_5$, d. h. mit dem Vierfachen von $^1/_5$, vervielfacht werden; also muß auch das Product von ${}^2/_3 \times {}^1/_5$, d. h. $^2/_{15}$, noch 4mal genommen werden. Dieses gibt ${}^2/_{15} \times 4 = {}^8/_{15}$. Also ist ${}^2/_3 \times {}^4/_5 = {}^8/_{15}$.

Anschaulich:

Wir theilen einen Strich in 3 gleiche Theile, und nehmen von ihm $\frac{1}{3}$. Nun nehmen wir dieses $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ mal, d. h. von $\frac{1}{3}$ den fünften Theil. Wir theilen deßhalb das Drittel noch in 5 gleiche Theile, und finden, daß $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ ist. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ muß also, was auch die Anschauung lehrt, $\frac{2}{15}$ sein. $\frac{4}{5}$ ist 4 mal so viel als $\frac{1}{5}$, also muß auch $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ 4 mal so viel sein als $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$, d. h. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Regel. Brüche werden mit Brüchen vervielfacht, indem man den Zähler des einen mit dem Zähler des andern, und den Nenner des einen mit dem Nenner des andern vervielfacht, jenes Product zum Zähler, dieses zum Nenner macht. Der dadurch entstehende Bruch ist das Product der beiden Brüche.

Beispiel 2. $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{2}{7}$ zu vervielfachen.

Auflösung 1. Hier ist sowohl 6, als auch $\frac{2}{3}$ mit $\frac{2}{7}$ zu vervielfachen. $6 \times \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$; $\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$; also ist $6\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{12}{7} + \frac{4}{21} = \frac{36}{21} + \frac{4}{21} = \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}$.

Auflösung 2. Man richte die gemischte Zahl $6\frac{2}{3}$ ein, und multiplicire dann Bruch mit Bruch.

$$6\tfrac{2}{3} = \tfrac{20}{3};\; \tfrac{20}{3} \times \tfrac{2}{7} = \frac{20 \,.\, 2}{3 \,.\, 7} = 1\tfrac{19}{21}.$$

Regel. Um eine gemischte Zahl mit einem Bruche zu vervielfachen, vervielfacht man sowohl die ganze Zahl als den Bruch mit dem gegebenen Bruche, und fügt beide Producte zusammen. Oder: man richtet die gemischte Zahl ein, vervielfacht Bruch mit Bruch, und zieht die Ganzen heraus.

Beispiel 3. $\frac{7}{9}$ mit $2\frac{3}{4}$ zu vervielfachen.

Auflösung. Die Operation ist hier dieselbe, wie in dem vorstehenden Beispiele; sie wird auf doppelte Weise vollführt.

$$\begin{array}{l} \tfrac{7}{9} \times 2 = \tfrac{14}{9} = \tfrac{56}{36} \\ \tfrac{7}{9} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{21}{36} \\ \hline \tfrac{56}{36} + \tfrac{21}{36} = \tfrac{77}{36} = 2\tfrac{5}{36}. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \tfrac{7}{9} \times 2\tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{9} \times \tfrac{11}{4} \\ = \tfrac{77}{36} \\ = 2\tfrac{5}{36}. \end{array}$$

Aus dem Vergleichen beider Auflösungsweisen geht hervor, daß das Einrichten der gemischten Zahl die einfachere Rechnungsweise ist.

Beispiel 4. $3\frac{1}{4}$ soll mit $2\frac{3}{5}$ vervielfacht werden.

Auflösung 1. Hier soll nicht bloß 3 mit $2\frac{3}{5}$, sondern auch $\frac{1}{4}$ mit $2\frac{3}{5}$ vervielfacht werden. Wir erhalten also die 4 Producte: $3 \times 2 + 3 \times \frac{3}{5}$, und $\frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$.

$$\begin{array}{l} 3 \times 2 = 6 \\ 3 \times \tfrac{3}{5} = \tfrac{9}{5} \\ \tfrac{1}{4} \times 2 = \tfrac{2}{4} \\ \tfrac{1}{4} \times \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{20} \\ \hline 3\tfrac{1}{4} \times 2\tfrac{3}{5} = 6 + \tfrac{9}{5} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{20} \\ \qquad\qquad 6 + \tfrac{36}{20} + \tfrac{10}{20} + \tfrac{3}{20} \\ \qquad\qquad 6 + \tfrac{49}{20} = 8\tfrac{9}{20}. \end{array}$$

Auflösung 2. Man richte die beiden gemischten Zahlen zuerst ein, und vervielfache dann Bruch mit Bruch.

$$3\tfrac{1}{4} = \tfrac{13}{4}$$
$$2\tfrac{3}{5} = \tfrac{13}{5}$$

$$3\tfrac{1}{4} \times 2\tfrac{3}{5} = \tfrac{13}{4} \times \tfrac{13}{5} = \tfrac{169}{20} = 8\tfrac{9}{20}.$$

Regel. Um gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen zu vervielfachen, vervielfacht man entweder jeden Theil der einen Zahl mit jedem Theile der andern, fügt die 4 Producte zusammen, und bringt die Brüche nöthigenfalls unter einen Hauptnenner, oder man richtet die gemischten Zahlen zuerst ein, und vervielfacht alsdann Bruch mit Bruch.

Das letztere Verfahren ist in der Regel bei weitem das bequemere.

Anmerkung 1. In der bisherigen Darstellung sind alle Fälle enthalten, welche bei der Vervielfachung der Brüche vorkommen können. Wir haben mit einander vervielfacht:

1) eine ganze Zahl mit einem Bruche (z. B. $4 \times \tfrac{2}{3}$);
2) einen Bruch mit einer ganzen Zahl (z. B. $\tfrac{3}{4} \times 8$);
3) einen Bruch mit einem Bruche (z. B. $\tfrac{2}{3} \times \tfrac{7}{10}$);
4) eine gemischte Zahl mit einem (reinen) Bruche (z. B. $4\tfrac{2}{5} \times \tfrac{3}{7}$);
5) einen Bruch mit einer gemischten Zahl (z. B. $\tfrac{3}{7} \times 8\tfrac{2}{3}$);
6) eine ganze Zahl mit einer gemischten Zahl ($6 \times 7\tfrac{5}{9}$);
7) eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl ($8\tfrac{3}{8} \times 10$);
8) eine gemischte Zahl mit einer gemischten ($6\tfrac{3}{5} \times 4\tfrac{2}{7}$).

Wenn man die gemischten Zahlen einrichtet, d. h. in Brüche verwandelt, so erfordern die gemischten Zahlen keine andere Behandlungsart als die Brüche; in dieser Hinsicht gibt es bei der Vervielfachung der Brüche mit Brüchen nur 3 — die 3 oben zuerst genannten — Hauptfälle, welche sich auf 2 reduciren.

Anmerkung 2. Daß man bei jedem dieser Fälle den Schülern eine Anzahl, den vorgenommenen Fall betreffende, Aufgaben geben müsse, versteht sich von selbst. Es ist hier von besonderer Wichtigkeit, daß der Lehrer gründlich und besonnen zu Werke gehe, den Schülern alle Sätze zum deutlichsten Bewußtsein bringe, im Anfange alle Operationen, welche die Schüler machen, zergliedern und begründen lasse, und dann erst ihnen durch eine Menge Aufgaben die nöthige Gewandtheit aneigene. Wir stellen hier nur einige Aufgaben als Beispiele auf.

Aufgaben.

1) Vervielfacht 7 mit allen Stammbrüchen von $\tfrac{1}{2}$ bis $\tfrac{1}{24}$!
2) Vervielfacht 11 mit $\tfrac{2}{3}$, $\tfrac{2}{4}$, $\tfrac{2}{5}$, $\tfrac{2}{6}$, $\tfrac{2}{7}$ ꝛc. bis $\tfrac{2}{12}$!
3) Vervielfacht 25 mit $\tfrac{2}{3}$, $\tfrac{3}{4}$, $\tfrac{4}{5}$, $\tfrac{5}{6}$, $\tfrac{6}{7}$ ꝛc. bis $\tfrac{11}{12}$!
4) Vervielfacht $\tfrac{4}{5}$ mit allen ganzen Zahlen von 1 bis 50!
5) Vervielfacht $\tfrac{1}{5}$ mit allen Stammbrüchen von $\tfrac{1}{2}$ bis $\tfrac{1}{15}$!
6) Vervielfacht die Stammbrüche von $\tfrac{1}{2}$ bis $\tfrac{1}{10}$ mit den abgeleiteten Brüchen: $\tfrac{2}{3}$, $\tfrac{3}{4}$, $\tfrac{4}{5}$, $\tfrac{5}{6}$, $\tfrac{6}{7}$, $\tfrac{7}{8}$, $\tfrac{8}{9}$, $\tfrac{9}{10}$ ꝛc.!
7) Vervielfacht folgende abgeleitete Brüche mit einander: $\tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{4}$; $\tfrac{3}{4} \times \tfrac{4}{5}$; $\tfrac{4}{5} \times \tfrac{5}{6}$; $\tfrac{5}{6} \times \tfrac{6}{7}$; $\tfrac{6}{7} \times \tfrac{7}{8}$; $\tfrac{7}{8} \times \tfrac{8}{9}$; $\tfrac{8}{9} \times \tfrac{9}{10}$ ꝛc.; dann $\tfrac{2}{3}$ nacheinander mit den Brüchen: $\tfrac{4}{5}$, $\tfrac{5}{6}$, $\tfrac{6}{7}$, $\tfrac{7}{8}$ ꝛc. bis $\tfrac{15}{16}$!

8) Vervielfacht $4\frac{2}{3}$ mit den Stammbrüchen von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{10}$!

9) Vervielfacht $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ ꝛc. bis $\frac{9}{10}$ mit $8\frac{2}{9}$!

10) Vervielfacht $10\frac{4}{7}$ mit den ganzen Zahlen von 1 bis 10!

11) Vervielfacht $2\frac{3}{4}$ mit $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{5}$, $4\frac{2}{5}$ $4\frac{3}{5}$, $4\frac{4}{5}$; dann $5\frac{3}{7}$ mit $8\frac{1}{9}$, $8\frac{2}{9}$, $8\frac{1}{3}$, $8\frac{4}{9}$, $8\frac{5}{9}$ u. s. w.!

Nach der Kraft der Schüler müssen diese Aufgaben gewählt, und wenn es nöthig ist, ihnen erlaubt werden, bei der Vervielfachung gemischter Zahlen mit einander die einzelnen Producte aufzuschreiben.

Anmerkung. Aus den Beispielen unter vorstehender Nr. 7. werden die Schüler einen Satz gefunden haben, welcher bei manchen Multiplicationsaufgaben in Brüchen eine Abkürzung zuläßt. Daselbst wurden nämlich Brüche mit einander vervielfacht, in welchen der Zähler des einen dem Nenner des andern gleich war, z. B. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$. Dieses gab $\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{4}{6}$. Wir sehen hieraus, was auch aus anderen Gründen erhellet, daß sich in diesem Falle diese beiden Zahlen, nämlich der Nenner des einen und der Zähler des andern Bruches, gegen einander aufheben. Man kann also in diesem Falle die Vervielfachung kürzer bewerkstelligen:

$$\frac{3}{11} \times \frac{11}{9} = \frac{3}{9};\ \frac{4}{15} \times \frac{15}{7} = \frac{4}{7};\ \frac{8}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \text{ ꝛc.}$$

Eine ähnliche Abkürzung findet Statt, wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl vervielfacht werden soll, welche dem Nenner des Bruchs gleich ist, z. B. $\frac{4}{7} \times 7$. $\frac{4}{7} \times 7 = \frac{28}{7} = 4$. Das Product ist in diesem Falle dem Zähler des Bruches gleich. Also ist $\frac{6}{11} \times 11 = 6$; $13 \times \frac{5}{13} = 5$, ꝛc.

Eine dritte Art Abkürzung findet bei der Vervielfachung der Brüche mit ganzen Zahlen Statt, wenn der Nenner des Bruches ein Theiler der ganzen Zahl ist; z. B. $\frac{3}{4} \times 28$. Dieses gibt $\frac{3 \times 28}{4}$. Nun kann man einen Bruch, ohne Veränderung seines Werthes, im Zähler und Nenner mit derselben Zahl theilen, hier mit 4. Ein Product (hier $3 \cdot 28$) wird aber getheilt, wenn man einen Factor theilt. Also theilt man 28 durch 4. Dadurch entsteht das Product $3 \times 7 = 21$. — Kürzer noch wird dieses gefunden, wenn man 28 in 2 Factoren zerlegt, von welchen der eine dem Nenner des Bruches (4) gleich ist; also in $4 \cdot 7$. Wir haben dann:

$$\frac{3}{4} \times 28 = \frac{3}{4} \times 4 \cdot 7 = 3 \times 7 = 21.$$

Deßgleichen: $\frac{7}{9} \times 36 = 7 \cdot 4. = 28$; $\frac{10}{11} \times 44 = 10 \times 4 = 40$; $15 \times \frac{9}{5} = 3 \cdot 9 = 27$ ꝛc.

Eine vierte Art möglicher Abkürzung bei der Vervielfachung von Brüchen mit Brüchen findet endlich Statt, wenn die Zähler und Nenner der Brüche gemeinschaftliche Theiler (Factoren) haben; z. B. $\frac{4}{9} \times \frac{3}{7}$. Das Product ist $\frac{4 \times 3}{9 \times 7}$. Da nun 3 und 9 den gemeinschaftlichen Factor 3 haben, so kann man Zähler und Nenner dieses Bruches mit 3 theilen, wodurch der Werth des Bruches ungeändert bleibt. Daher ist

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21}.$$

Deßgleichen: $\frac{7}{12} \times \frac{8}{13} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 13} = \frac{14}{39}$; $\frac{16}{21} \times \frac{14}{12} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$.

In dem letztern Beispiele sind 16 und 12 durch 4, 21 und 14 durch 7 getheilt oder gehoben worden. — Aufmerksame und aufgeregte Schüler werden diese und vielleicht noch andere Abkürzungen auffinden, und sich dieselben zu Nutze machen.

§. 102. Angewandte Aufgaben über die Multiplication mit Brüchen.

Vorbemerkung. Im gemeinen Leben kommen sehr viele Aufgaben in Brüchen vor. Schon darum ist die Gewandtheit des Schülers in der Behandlung der Brüche, besonders in der mündlichen Behandlung derselben von nicht geringer Wichtigkeit. Die am häufigsten vorkommenden Aufgaben sind in den meisten Rechenbüchern (auch in dem ersten Uebungsbuche) unter dem Namen der **Resolution** und **Reduction** (der Auflösung in niedere, und der Zurückführung auf höhere Einheiten) aufgeführt. Wir stellen daher hier über beide einige Aufgaben zusammen, denen wir noch einige andere anreihen werden.

1. Aufgaben über die sogenannte Resolution in Brüchen.

a. $^9/_{10}$ Thlr., wie viel Sgr.?

Auflösung 1. 1 Thlr. = 30 Sgr.; $^1/_{10}$ Thlr. also = $^{30}/_{10}$ Sgr. = 3 Sgr.; $^9/_{10}$ Thlr. also 9×3 Sgr. = 27 Sgr.

Auflösung 2. 1 Thlr. = 30 Sgr.; 9 Thlr. also 9×30 Sgr. = 270 Sgr.; folglich $^9/_{10}$ Thlr. = $^{270}/_{10}$ Sgr. = 27 Sgr.

b. $^5/_8$ Pfd. wie viel Loth?

Auflösung 1. 1 Pfd. = 32 Loth; $^1/_8$ Pfd. = $^{32}/_8$ Loth = 4 Loth; $^5/_8$ Pfd. = $5 \times 4 = 20$ Loth.

Auflösung 2. 1 Pfd. = 32 Loth; 5 Pfd. = 5×32 Loth; $^5/_8$ Pfd. = $\frac{5 \,.\, 32}{8} = 5 \,.\, 4 = 20$ Loth.

c. $^4/_5$ Jahr, wie viel Tage?

Auflösung 1. 1 Jahr = 365 Tage, also $^1/_5$ Jahr = $^{365}/_5$ = 73 Tage; $^4/_5$ Jahr = $4 \times 73 = 292$ Tage.

Auflösung 2. 1 Jahr = 365 Tage; 4 Jahre = 4×365 Tage; $^4/_5$ Jahr = $\frac{4 \times 365}{5} = 4 \times 73 = 292$ Tage.

d. $^3/_7$ Tag, wie viel Stunden?

Auflösung 1. 1 Tag = 24 Stunden, $^1/_7$ Tag also = $^{24}/_7 = 3^3/_7$ Stunden; folglich $^3/_7$ Tag = $3 \times 3^3/_7 = 9^9/_7 = 10^2/_7$ Stunden.

Auflösung 2. 1 Tag = 24 St.; 3 Tage = $3 \times 24 = 72$ St.; $^3/_7$ Tag also = $^{72}/_7 = 10^2/_7$ Stunden.

e. $6^2/_5$ Loth, wie viel Quentchen?

Auflösung. 1 Loth = 4 Quent.; $6^2/_5$ Loth also $6^2/_5 \times 4$ Qt. = $6 \,.\, 4 + {}^2/_5 \,.\, 4 = 24^8/_5 = 25^3/_5$ Qt.

f. $3^5/_8 \times$ Längenfuß, wie viel Zoll (zwölftheilig)?

Auflösung. 1 Längenfuß = 12 Zoll; $3^5/_8$ Fuß also $3^5/_8 \times 12$ = $3 \times 12 + {}^5/_8 \times 12 = 36 + {}^{60}/_8 = 36 + 7^1/_2 = 43^1/_2$ Zoll.

Viele solcher Aufgaben!

2. Aufgaben über die sogenannte Reduction in Brüchen.

a. 17 Sgr., wie viel Thlr.?

Auflösung 1 Sgr. = $^1/_{30}$ Thlr., also 17 Sgr. = $^{17}/_{30}$ Thlr.

b. 11 Pf., wie viel Sgr. und wie viel Thlr.?

Auflösung. 1 Pf. = $^1/_{12}$ Sgr.; also 11 Pf. = $^{11}/_{12}$ Sgr.; 1 Pf. = $^1/_{360}$ Thlr., also 11 Pf. = $^{11}/_{360}$ Thlr.

c. 95 Tage, wie viel Jahre?

Auflösung. 1 Tag = $^1/_{365}$ Jahr, also 95 Tage = $^{95}/_{365}$ = $^{19}/_{73}$ Jahr.

d. 28 Loth, wie viel Pfd.?

Auflösung. 1 Loth = $^1/_{32}$ Pfd.; also 28 Loth = $^{28}/_{32}$ = $^7/_8$ Pfd.

e. 8 Sgr. 4 Pf., wie viel Thlr.?

Auflösung. 8 Sgr. 4 Pf. = 8 × 12 + 4 = 100 Pf.; 1 Pf. = $^1/_{360}$ Thlr., also 100 Pf. = $^{100}/_{360}$ = $^{10}/_{36}$ = $^5/_{18}$ Thlr.

f. 10 Tage 6 Stunden, wie viel Monate?

Auflösung. 10 Tage 6 Stunden = 10 × 24 + 6 = 240 + 6 = 246 St.; 1 Monat = 30 Tage = 30 × 24 = 720 Stunden; 1 Stunde ist also $^1/_{720}$ Monat, folglich 246 Stunden = $^{246}/_{720}$ Monat = $^{82}/_{240}$ = $^{41}/_{120}$ Monat.

Viele solcher Aufgaben!

3. Vermischte Aufgaben.

a. Wie viel kosten 10 Brode, wenn 1 Brod $4^2/_3$ Sgr. kostet?

Antw. 10 × $4^2/_3$ = 40 + $^{20}/_3$ = 40 + $6^2/_3$ = $46^2/_3$ = 46 Sgr. 8 Pf. = 1 Thlr. 16 Sgr. 8 Pf.

b. Eine Elle Tuch kostet $5^4/_5$ Thlr., wie viel kosten 20 Ellen?

Antw. 20 × $5^4/_5$ = 20 × 5 + 20 × $^4/_5$ = 100 + $^{80}/_5$ = 100 + 16 = 116 Thlr.

c. A gibt einem Armen $2^3/_5$ Thlr., B ihm $1^1/_2$ mal so viel; wie viel gibt B?

Antw. $1^1/_2$ × $2^3/_5$ = $^3/_2$ × $^{13}/_5$ = $^{39}/_{10}$ = $3^9/_{10}$ Thlr.

d. Ein Landmann säet $7^1/_9$ Scheffel Weizen aus; er ärndtet $10^1/_2$ mal so viel; wie viel Scheffel ärndtet er ein?

Antw. $10^1/_2$ × $7^1/_9$ = $^{21}/_2$ × $^{64}/_9$ = 7 × $^{32}/_3$ = $^{224}/_3$ = $74^2/_3$ Scheffel.

e. Ein Stück Land, $8^2/_3$ Morgen groß, soll mit Kleesamen besäet werden, auf jeden Morgen gehen $10^1/_2$ Pfund Kleesamen; wie viel Pfund auf das ganze Stück Land?

Antw. $8^2/_3$ × $10^1/_2$ Pfd. Kleesamen = $^{26}/_3$ × $^{21}/_2$ = 13 × 7 = 91 Pfund.

f. Ein Landwirth hat 6 Kühe, für welche er die Menge des Futters, das sie in 3 Monaten fressen, berechnen will. Er weiß, daß sie in jedem Monat $2^5/_6$ Fuder Heu fressen, und daß jedes Fuder $2^3/_4$ Thlr kostet. Wie viel Fuder fressen die Kühe in 3 Monaten, und viel kostet ihre Fütterung in dieser Zeit?

Antw. Sie fressen 3 × $2^5/_6$ = 6 + $^{15}/_6$ = $8^1/_2$ Fuder. Diese kosten $8^1/_2$ × $2^3/_4$ Thlr. = $^{17}/_2$ × $^{11}/_4$ = $^{187}/_8$ = $23^3/_8$ Thlr.

g. Ein Fuhrmann besorgt 3 Fuhren, mit jeder Fuhre $15^1/_5$ Ctnr.; jeder Ctnr. kostet $1^1/_3$ Thlr. Fuhrlohn; wie groß ist der ganze Lohn?

Antw. 1 Fuhre = $15^1/_5$ Ctnr., 3 Fuhren = 3 × $15^1/_5$ = $45^3/_5$ Ctnr.; 1 Ctnr. kostet $1^1/_3$ Thlr. Fuhrlohn; also $45^3/_5$ Ctnr. $45^3/_5$ × $1^1/_3$ Thlr. = $^{228}/_5$ × $^4/_3$ = $^{912}/_{15}$ = $60^4/_5$ Thlr.

h. Auf einer Rechnung waren notirt:
$3\frac{1}{3}$ Ellen Tuch à $2\frac{1}{2}$ Thlr.
$2\frac{1}{2}$ Ellen Futter à $\frac{2}{5}$ Thlr.

Die Summe war zu $13\frac{1}{2}$ Thlr. angegeben. Um wie viel hatte sich der Rechnungssteller geirrt?

Antw. $3\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{2} = \frac{10}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ Thlr.; $2\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1$ Thlr.; $8\frac{1}{3} + 1 = 9\frac{1}{3}$; $13\frac{1}{2} - 9\frac{1}{3} = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} = \frac{27}{6} - \frac{2}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$, also um $4\frac{1}{6}$ Thlr.

i. 1 Pfd. Thee kostet $5\frac{2}{9}$ Thlr.; wie viel kosten $7\frac{1}{5}$ Pfd.?

Antw. $7\frac{1}{5} \times 5\frac{2}{9} = \frac{36}{5} \times \frac{47}{9} = \frac{4}{5} \times 47 = \frac{188}{5} = 37\frac{3}{5}$ Thlr.

k. 1 Pfund Tabak kostet 18 Sgr.; wie viel kosten 12 Pfd.?

Antw. 18 Sgr. $= \frac{1}{2}$ Thlr. $+ \frac{1}{10}$ Thlr.; also kosten 12 Pfd. $12 \times \frac{1}{2} = 6$ Thlr. und $12 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = 1\frac{1}{5}$ Thlr.; 6 Thlr. $+ 1\frac{1}{5}$ Thlr. $= 7\frac{1}{5}$ Thlr. Also kosten 12 Pfd. Tabak $7\frac{1}{5}$ Thlr. = 7 Thlr. 6 Sgr.

l. 1 Pfund Chinarinde kostet 20 Thlr. 24 Sgr.; wie viel kosten 20 Pfund?

Antw. $20 \times 20\frac{4}{5}$ Thlr. $= 400 + 4 \times 4 = 416$ Thlr.

m. Wie viel kosten $10\frac{1}{2}$ Pfd. einer Waare, wenn 1 Pfd. derselben Waare 6 Sgr. 8 Pf. kostet?

Antw. 6 Sgr. 8 Pf. $= 6\frac{2}{3}$ Sgr.; also kosten $10\frac{1}{2}$ Pfd. $10\frac{1}{2} \times 6\frac{2}{3}$ Sgr. $= \frac{21}{2} \times \frac{20}{3} = 7 . 10 = 70$ Sgr. = 2 Thlr. 10 Sgr.

Viele solcher Aufgaben!

II. Schriftlich.

§. 103. Verfahren bei der schriftlichen Behandlung der Brüche.

Der Lehrer hat hierbei nicht viel zu thun. Denn theils stimmt die schriftliche Behandlung mit der mündlichen, bei welcher hier und da eine Aufzeichnung erlaubt ist, überein, theils ist Manches hierin willkührlich, und kann dem Belieben der Schüler überlassen werden. Indessen findet auch bei dem Ansatze und der Ausrechnung der Aufgaben mit Brüchen bei den meisten Schriftstellern und Rechnern eine Art stillschweigender Uebereinkunft statt, weßhalb es gut ist, daß der Schüler die herkömmliche Weise kennen lerne, und daß sie ihm zur Gewohnheit, zur andern Natur, werde. Doch soll dies mit dem klaren Bewußtsein geschehen, daß solche Einrichtungen nicht auf nothwendigen Gesetzen, sondern auf Uebereinkunft und Herkommen ruhen; auch kann es ihm hier, wie an andern Orten, zu Gemüthe geführt werden, daß man nicht ohne gehörige Gründe sich zu Neuerungen solle verführen lassen. Das Herkommen begründet zwar nicht das höchste, aber es begründet doch immer ein Recht. — Wir machen das Beizubringende durch Beispiele klar.

A. Brüche und gemischte Zahlen, vervielfacht mit ganzen Zahlen.

Beispiel 1. Wie viel ist $\frac{11}{12}$, vervielfacht mit 24? (Antw. 22.)

Ansatz und Ausrechnung:

$\frac{11 \times 24}{12}$

```
        11
        24
        --
        44
       22
       ---
12 |  264 | 22
   |  24  |
      ---
       24
       24
       --
       ==
```

Man vervielfacht den Zähler des gegebenen Bruches mit der gegebenen ganzen Zahl, und theilt das Product durch den Nenner, wodurch man die Ganzen erhält.

Beispiel 2. Wie viel ist $927\frac{25}{47}$, mit 37 vervielfacht? (Antw. $34318\frac{32}{47}$.)

Ansatz und Ausrechnung:

```
 927 25/47                          25
  37                                37
 -----                              ---
 6489                               175
2781                                75
-----                              ----
34299                        47 |  925 | 19 32/47
 + 19 32/47                     |  47  |
-----------                        ----
34318 32/47                         455
                                    423
                                    ---
                                     32
```

Oder: $927\frac{25}{47}$ eingerichtet:

```
        47
      -----
      6514
     3708
     -----
     43594
        37
    ------
    305158
   130782
   -------
47 | 1612978 | 34318 32/47
   | 141     |
   -------
     202
     188
     ---
      149
      141
      ---
       87
       47
       ---
       408
       376
       ---
        32
```

Bei dem ersten Verfahren wurde jeder Theil der gemischten Zahl mit der ganzen Zahl 37 vervielfacht, zuerst die ganze Zahl 927, dann der Bruch $\frac{25}{47}$ durch Vervielfachung des Zählers und Theilung des dadurch entstandenen Products durch den Nenner 47. Der gewonnene Quotient $19\frac{32}{47}$ wurde zu dem Producte der ganzen Zahlen hinzugefügt.

Bei dem zweiten Verfahren wurde die gegebene gemischte Zahl zuerst eingerichtet, hierauf der dadurch entstandene Bruch mit der gegebenen Zahl 37 vervielfacht, indem man den Zähler vervielfachte; hierauf zog man durch Theilung des gewonnenen Productes durch den Nenner die Ganzen heraus.

B. Ganze Zahlen, vervielfacht mit Brüchen und gemischten Zahlen.

Beispiel 1. Vervielfacht 804 mit $\frac{3}{11}$! (Antw. $219\frac{3}{11}$.)

Ansatz und Ausrechnung:

$\frac{804 \times 3}{11}$

804
3
11 | 2412 | $219\frac{3}{11}$
22
21
11
102
99
3

Oder: 11 | 804 | $73\frac{1}{11}$
77
34
33
1

$73\frac{1}{11}$
3
$219\frac{3}{11}$

Verfahren. Da 804 mit $\frac{3}{11}$ vervielfacht werden soll, so vervielfacht man 804 zuerst mit 3, und theilt das Product durch 11, oder man theilt 804 zuerst mit 11, und vervielfacht den entstandenen Quotienten mit 3. Jenes Verfahren ist in der Regel das bequemere.

Beispiel 2. Vervielfache 1009 mit $8\frac{3}{7}$! (Antw. $8504\frac{3}{7}$.)

Ansatz und Ausrechnung:

1009
$8\frac{3}{7}$
8072
$+ 432\frac{3}{7}$
$8504\frac{3}{7}$

1009
3
7 | 3027 | $432\frac{3}{7}$
28
22
21
17
14
3

Oder: $8\frac{3}{7}$
59
1009
531
59
7 | 59531 | $8504\frac{3}{7}$
56
35
35
31
28
3

Verfahren. Entweder vervielfacht man die Zahl 1009 einzeln mit jedem Theile der gemischten Zahl, oder man richtet die gemischte Zahl zuerst ein ($\frac{59}{7}$) und vervielfacht nun die Zahl 1009 mit dem entstandenen Bruche.

C. Brüche und gemischte Zahlen, vervielfacht mit Brüchen und gemischten Zahlen.

Beispiel 1. $\frac{36}{72}$ mit $\frac{15}{16}$ zu vervielfachen? (Antw. $\frac{15}{32}$.)

Oben ist es bereits auseinandergesetzt worden, daß Brüche mit Brüchen vervielfacht werden, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner vervielfacht, jenes Product zum Zähler und dieses Product zum Nenner des gesuchten Productes macht. In vorliegendem Beispiele ist daher 36 mit 15 und 72 mit 16 zu vervielfachen, woraus denn hervorgeht, $\frac{36}{72} \times \frac{15}{16} = \frac{15}{16} \times \frac{36}{72}$.

Ansatz und Ausrechnung:

36	72
15	16
180	432
36	72
540	1152

$$\frac{540}{1152} \Big| \frac{180}{384} \Big| \frac{30}{64} \Big| \frac{15}{32}$$

(Kürzungsfaktoren: 3, 6, 2)

Das gefundene Product $^{540}/_{1152}$ wurde bis zu $^{15}/_{32}$ aufgehoben.

Abkürzung. Das gesuchte Product war $\frac{36 \times 15}{72 \times 16}$. Die Zahlen des Zählers und Nenners haben gemeinschaftliche Factoren; daher konnte man durch dieselben, ohne Veränderung des Werthes des Bruches, theilen. Der gemeinschaftliche Theiler von 36 und 72 ist 36 selbst. Also ist $\frac{36 \times 15}{72 \times 16} = \frac{15}{2 \,.\, 16} = {}^{15}/_{32}$.

Beispiel. 2. $84^3/_{10}$ mit $^7/_9$ zu vervielfachen? (Antw. $65^{17}/_{30}$.) Die gemischte Zahl wird zuerst eingerichtet und der dadurch entstehende Bruch mit dem gegebenen Bruche vervielfacht.

Ansatz und Ausrechnung:

```
       84³/₁₀
       843
         7
90 | 5901 | 65¹⁷/₃₀
   | 54   |
       50
       45
       ⁵¹/₉₀ = ¹⁷/₃₀.
```

Beispiel 3. $97^4/_5$ mit $27^8/_9$ zu vervielfachen. (Antw. $2727^8/_{15}$.) Hier werden beide gemischte Zahlen eingerichtet und beide Brüche mit einander vervielfacht.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\frac{97^4/_5}{^{489}/_5} \times \frac{27^8/_9}{^{251}/_9} = \frac{489 \times 251}{5 \times 9}$$

```
                 489
                 251
                 489
                2445
                978
5 × 9 = 45 | 122739 | 2727⁸/₁₅
           | 90     |
             327
             315
              123
               90
              339
              315
              ²⁴/₄₅ = ⁸/₁₅.
```

Zusatz 1. $\frac{2}{3}$ mit $\frac{7}{12}$ und das dadurch entstehende Product mit $\frac{8}{9}$, also drei Brüche mit einander zu vervielfachen. (Antw. $\frac{28}{81}$.)

Hier vervielfacht man alle Zähler und Nenner mit einander und kürzt, wo möglich, ab.

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{12} \times \frac{8}{9} = \frac{2 \times 7 \times 8}{3 \times 12 \times 9} = \frac{7 \,.\, 8}{3 \times 6 \times 9} = \frac{7 \times 4}{3 \times 3 \times 9} = \frac{28}{81}.$$

Dasselbe gilt für jede Anzahl von mit einander zu vervielfachenden Brüchen und gemischten Zahlen. Ist unter den Factoren noch eine ganze Zahl, so setzt man dieselbe als Factor zu den Zählern. Die gemischten Zahlen werden vorher eingerichtet.

Beispiel 1. $\frac{4}{11} \times \frac{22}{27} \times \frac{3}{10} \times 20 = \frac{4 \,.\, 22 \,.\, 3 \,.\, 20}{11 \,.\, 27 \,.\, 10} = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2}{27} = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 2}{9} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$

Beispiel 2. $\frac{2}{3} \times 4\frac{1}{2} \times \frac{6}{7} \times 3 = \frac{2.9.6.3}{3.2.7} = \frac{9.6}{7} = \frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}.$

Zusatz 2. Das bisherige Verfahren wird auch angewandt bei zusammengesetzteren Aufgaben.

Beispiel. Jemand erwirbt $36\frac{3}{4} \times 84\frac{1}{2}$ Thlr. + $24\frac{5}{8} \times 12$ Thlr. + $8\frac{3}{9} \times 14\frac{2}{5}$ Thlr., gibt aus: $16\frac{4}{15} \times \frac{2}{5}$ Thlr. und $100\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ Thlr. Wie viel bleibt ihm übrig, wenn der Rest in 3 gleiche Theile getheilt wird? (Antw. $1149\frac{121}{1800}$ Thlr.)

Ansatz und Ausrechnung:

a. $36\frac{3}{4} \times 84\frac{1}{2}$

$\frac{147}{4} \times \frac{169}{2}$

169
147
1183
676
169
8 | 24843 | $3105\frac{3}{8}$
24
8
8
43
40
3

b. $24\frac{5}{8} \times 12$

197
12
394
197
8 | 2364 | $295\frac{1}{2}$
16
76
72
44
40
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c. $8\frac{3}{9} \times 14\frac{2}{5}$

$\frac{75}{9} \times \frac{72}{5}$

75
72
150
525
45 | 5400 | 120
45
90
90
0

Erworbenes: $3105\frac{3}{8}$
+ $295\frac{1}{2}$
+ 120
$3520\frac{7}{8}$ Thlr.

d. $16\frac{4}{15} \times \frac{2}{5}$

$16\frac{4}{5}$
15
84
16

$\frac{244}{15} \times \frac{2}{5}$

244 × 2 = 488; 15 × 5 = 75

75 | 488 | $6\frac{38}{75}$
450
38

e. $100\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

$\frac{403}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{403}{6} = 67\frac{1}{6}$

Ausgegebenes: $6\frac{38}{75}$ + $67\frac{1}{6}$ = $73\frac{101}{150}$ (150: 2 × 38 = 76; 1 × 25 = 25; $\frac{101}{150}$)

f. Ueberschuß: $3520\frac{7}{8}$ − $73\frac{101}{150}$ = $3447\frac{121}{600}$ (600: 75 × 7 = 525; 4 × 101 = 404; $\frac{121}{600}$)

g. $3447\frac{121}{600} \times \frac{1}{3}$

$\frac{2068321}{600} \times \frac{1}{3} = \frac{2068321}{1800}$

1800 | 2068321 | $1149\frac{121}{1800}$ Thlr.
18
26
18
88
72
163
162
$\frac{121}{1800}$

a, b, c berechnen die Größe des Erworbenen, d und e die Größe des Ausgegebenen, f den Ueberschuß, g die Größe eines der drei gleichen Theile.

Fünfte Uebung.

Das Theilen mit Brüchen.

I. Mündlich.

§. 104. **Begriff der Theilung durch einen Bruch — und Angabe der verschiedenen Fälle, welche dabei vorkommen.**

Theilen oder dividiren heißt bekanntlich eine Zahl (Größe) in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, deren Anzahl durch den sogenannten Theiler oder Divisor angegeben ist; 12 durch 4 theilen, heißt also, 12 in 4 gleiche Theile theilen, und einen dieser Theile, hier den 4ten Theil, angeben. Wenn wir diese Ansicht auch auf die Theilung durch einen Bruch anwenden, so heißt z. B. 12 durch $\frac{2}{3}$ theilen — — — — — — — — — — — —? Wir sehen, daß der Gedanke, welcher uns bei der Division mit ganzen Zahlen leiten kann, sich nicht ohne Veränderung auf die Theilung

durch einen Bruch anwenden läßt. Wir sehen uns daher nach einer andern Ansicht um. — 12 durch 4 theilen, heißt auch: angeben, der wie vielste Theil 4 von 12 ist. Diese Vorstellung läßt sich auch auf die Theilung durch einen Bruch anwenden, z. B.: 12 durch $^2/_3$ theilen, heißt: suchen, der vielste Theil $^2/_3$ von 12 ist. — Wir lernten aber noch eine andere Ansicht von der Theilung kennen. Durch eine Zahl theilen, heißt auch in gewisser Hinsicht: untersuchen, wie oft diese Zahl in einer andern enthalten sei. Auch diese Vorstellung ist auf die Theilung durch Brüche anwendbar; z. B. 12 durch $^2/_3$ theilen, heißt: untersuchen, wie oft $^2/_3$ in 12 enthalten ist. Durch einen Bruch dividiren, heißt also untersuchen: der wie vielste Theil der Bruch von einer gegebenen Zahl sei, oder: wie oft dieser Bruch in einer gegebenen Zahl enthalten sei. Beide Ausdrücke führen zu denselben Resultaten. Denn wenn ich weiß, der wie vielste Theil ein Bruch von einer Zahl ist, so weiß ich auch, wie oft der Bruch in dieser Zahl enthalten ist; ist ein Bruch z. B. der 10te Theil einer Zahl, so ist er 10mal in ihr enthalten. Und weiß ich, wie oft ein Bruch in einer Zahl enthalten ist, so weiß ich auch zugleich, der wie vielste Theil er von dieser Zahl ist. Ist ein Bruch z. B. 18mal in einer Zahl enthalten, so ist er auch der 18te Theil von ihr. Wir werden daher im Folgenden, wenn von der Division durch einen Bruch die Rede ist, bald die eine, bald die andere Ansicht festhalten. Im Wesentlichen sind sie eins. Für den populären (Schul-)Gebrauch ist der Begriff des Enthaltenseins der klarere.*)

Man kann die Sache auch so ansehen:

Eine Zahl durch einen Bruch, z. B. 12 durch $^3/_4$ theilen, heißt, eine Zahl suchen, die $^3/_4$ mal genommen, 12 gibt. Da $^3/_4$ nach früher gegebenen Erläuterungen, in zwiefachem Sinne genommen werden kann, einmal: $^3/_4$ = dem Dreifachen des vierten Theils einer Zahl; dann = dem vierten Theile des Dreifachen einer Zahl: so muß die gesuchte Zahl, die mit $^3/_4$ multiplicirt, 12 gibt, die Eigenschaften haben: 1) daß 3 mal ihr vierter Theil = 12 ist, und 2) daß 1 mal der vierte Theil ihres Dreifachen 12 gibt. Beide Eigenschaften sind Folgen von einander, sie sind wesentlich nur eine.

Die Zahl nun, welche $^3/_4$ mal genommen 12 gibt, wird gefunden, wenn man untersucht, wie oft $^3/_4$ in 12 enthalten ist. So läuft auch diese zweite Erklärungsweise wieder auf die erste zurück. Doch bedingt die Anwendung der einen oder andern eine andre Auflösungsweise. Soll man 12 durch $^3/_4$ theilen, so kann man nicht sagen, in wie viel gleiche Theile 12 getheilt werden soll; das ist ganz richtig. Aber man kann doch auch in dieser Beziehung das Theilen durch einen Bruch dem Theilen durch eine ganze Zahl sehr nahe bringen.

12 durch 3 theilen, heißt die Zahl suchen, die 3mal genommen, 12 gibt. 12 durch $^3/_4$ theilen, heißt, eine Zahl suchen, von deren Dreifachem der vierte Theil genommen 12 gibt. So ist's.

Im eigentlichen Sinne des Worts kann man mit $^3/_4$ in 12 Sgr. nicht dividiren. Denn was sollte es heißen? Von Enthaltensein kann

*) Das Ausführlichere darüber siehe am Schlusse der 5ten Uebung dieser Stufe!

nicht die Rede sein. Von Theilen auch nicht. Denn in wie viel gleiche Theile sollen 12 Sgr. getheilt werden? Man weiß es nicht. Aber man kann der Vorstellung eine andere Wendung geben. Mit 3 in 12 Sgr. theilen, heißt, eine Zahl suchen, welche 3 mal genommen, 12 Sgr. gibt. Ebenso: mit $^3/_4$ in 12 Sgr. theilen, heißt eine Zahl suchen, die $^3/_4$ mal genommen 12 Sgr. gibt, oder von der 3 mal der 4te Theil = 12 Sgr., oder von deren Dreifachem der 4te Theil = 12 Sgr. ist. So gefaßt hat das Dividiren mit $^3/_4$ in 12 Sgr. einen Sinn, und so ist das Theilen von 12 Sgr. mit einer ganzen Zahl oder mit einem Bruche fast identisch.

Bevor wir nun zu den Beispielen, aus welchen wir die Einsichten und Regeln für die Theilung mit Brüchen entwickeln wollen, übergehen, besinnen wir uns, welche verschiedene Fälle zur Betrachtung kommen werden. Es soll die Theilung mit Brüchen gelehrt werden. Zu jeder Theilung gehören 2 Zahlen, eine zu theilende und eine theilende. Die verschiedenen Arten der Zahlen, welche der Operation der Theilung zu unterwerfen sind, sind Brüche, ganze Zahlen und gemischte Zahlen. Es gibt daher hier folgende Fälle:

1) Theilung eines Bruches durch einen Bruch;
2) » » » » eine ganze Zahl;
3) » einer ganzen Zahl durch einen Bruch;
4) » einer gemischten Zahl durch einen Bruch;
5) » eines Bruches durch eine gemischte Zahl;
6) » einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl;
7) » einer ganzen Zahl durch eine gemischte Zahl;
8) » einer gemischten Zahl durch eine gemischte Zahl.

Wir werden diese Fälle in der angegebenen Ordnung vornehmen.

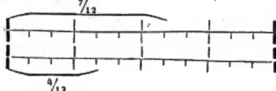
§. 105. Einen Bruch durch einen Bruch zu theilen.

a. Brüche von gleichen Nennern.

Beispiel 1. $^7/_{12}$ soll durch $^4/_{12}$ getheilt werden.

Auflösung. Es soll untersucht werden: der wie vielste Theil $^4/_{12}$ von $^7/_{12}$ ist, oder wie oft $^4/_{12}$ in $^7/_{12}$ enthalten ist. Nun ist aber der 2te, 3te, 4te, 12te Theil einer Zahl in dem 2ten, 3ten, 4ten, 12ten Theile einer andern so oft enthalten, als die ganze Zahl in der ganzen Zahl; also sind $^4/_{12}$ in $^7/_{12}$ so oft enthalten, als 4 Ganze oder 4×1 in 7×1. Man hat daher zur Lösung der Aufgabe zu untersuchen, wie oft 4 in 7 enthalten ist; 4 ist in 1 $^1/_4$mal, in 2 $^2/_4$mal, in 3 $^3/_4$mal, in 7 $^7/_4$mal enthalten, also ist auch $^4/_{12}$ in $^7/_{12}$ | $^7/_4$mal enthalten; der Quotient der Division von $^4/_{12}$ in $^7/_{12}$ ist also $= {}^7/_4 = 1^3/_4$.

Veranschaulichung:



Wir stellen die Einheit durch einen Strich dar, theilen sie in 12 gleiche Theile, und nehmen das erste Mal der gleichen Theile 7 ($^7/_{12}$), das andere mal 4 ($^4/_{12}$). Hier zeigt es gleich die Anschauung, daß zu untersuchen ist, wie oft 4 in 7 enthalten ist, um zu wissen, wie oft $^4/_{12}$ in $^7/_{12}$ enthalten sind.

Regel: Um mit einem Bruche in einen andern zu dividiren, welcher mit ihm einerlei Nenner hat, braucht man nur zu untersuchen, wie oft der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividenden enthalten ist; die dadurch gefundene Zahl gibt den verlangten Quotienten. — Der Zähler des Dividenden wird also der Zähler des gesuchten Quotienten, der Zähler des Divisors der Nenner des gesuchten Quotienten.

Aufgaben.

Wie oft ist $^3/_2$ in $^4/_2$, $^5/_2$, $^6/_2$ enthalten?
» » » $^2/_5$ in $^7/_5$, $^9/_5$, $^{11}/_5$ ꝛc. — ?
» » » $^7/_8$ in $^5/_8$, $^4/_8$, $^3/_8$, $^2/_8$, $^1/_8$ — ?
Theilet $^{11}/_{12}$, $^{13}/_{12}$, $^{17}/_{12}$, $^{21}/_{12}$ durch $^7/_{12}$!
» $^{15}/_{20}$, $^{20}/_{20}$, $^{25}/_{20}$, $^{30}/_{20}$ durch $^{41}/_{20}$!
Mehr solcher Aufgaben!

b. Brüche von ungleichen Nennern.

Mit einem Bruche dividiren, heißt in der Regel entweder: untersuchen, der wie vielste Theil sein Werth von einer andern Größe, oder wie oft er in dieser enthalten ist. In beiden Fällen müssen die beiden Größen, wenn die Ausführung möglich sein soll, gleichartig, und wenn sie ausgeführt werden soll, gleichnamig sein oder gleichnamig gemacht werden. Mit $^3/_4$ Sgr. kann man daher in 5 oder $^5/_6$ Pfd. gar nicht dividiren; wohl aber mit $^3/_4$ Sgr. in $^5/_6$ Sgr. oder $^5/_6$ Thlr., mit $^3/_4$ (mal Eins) in $^5/_6$ (mal Eins). Denn die Werthe dieser Brüche beziehen sich auf gleichartige Größen. Nur sind sie noch nicht gleichnamig. Denn die Nenner bezeichnen die Namen der Größen, mit andern Worten: die Maße, womit der Werth der Brüche (der Zähler, die Zahl der Theile oder Maßeinheiten) gemessen wird. Folglich müssen die Brüche vor der Theilung gleichnamig gemacht werden. Alsdann reducirt sich die Aufgabe auf den vorhergehenden Satz. —

Beispiel. $^4/_5$ durch $^2/_3$ zu theilen.

Auflösung. $^4/_5 = {}^{12}/_{15}$; $^2/_3 = {}^{10}/_{15}$. $^{10}/_{15}$ ist in $^{12}/_{15}$ so oft enthalten als 10 in 12, d. h. $^{12}/_{10}$ oder $^6/_5 = 1^1/_5$ mal; der gesuchte Quotient heißt also $1^1/_5$.

Anmerkung. Gleich nachher wird noch eine andere Ansicht aufgestellt und gezeigt werden, daß die Gleichnamigmachung der Brüche nicht nothwendig sei. Einstweilen bleibe man dabei stehen.

Aufgaben.

Theilet $^5/_6$ durch $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$, $^6/_7$!
» $^{11}/_{12}$ durch $^{10}/_{11}$, $^9/_{10}$, $^8/_9$, $^7/_8$, $^6/_7$ ꝛc.!

Wie oft ist $^3/_2$ in $^{12}/_{13}$, $^{13}/_{12}$, $^{13}/_{14}$, $^{14}/_{13}$, $^{14}/_{15}$, $^{15}/_{14}$ rc. enthalten?
Wie oft ist $^4/_7$ in $^3/_8$, $^8/_3$, $^4/_9$, $^9/_4$, $^5/_{11}$, $^{11}/_5$ rc. enthalten?
Der Theiler einer Zahl heißt $^2/_3$, der Quotient $^4/_5$; wie heißt die getheilte Zahl?
Eine getheilte Zahl heißt $^7/_8$, der Quotient $^4/_7$; wie heißt der Theiler?
Von welchem Bruche kann man $^7/_8$ $^3/_4$ mal wegnehmen?
Mehr solcher Aufgaben!

§. 106. **Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen.**

Beispiel. $^6/_7$ durch 3.

Hier können wir, wie überall, von der doppelten Ansicht ausgehen, daß gesucht werden soll, wie oft 3 in $^6/_7$ enthalten ist, oder, daß $^6/_7$ in 3 gleiche Theile getheilt und einer dieser Theile angegeben werden soll. Auflösen läßt sich diese Frage auf mehrfache Weise.

Auflösung 1. Der 3te Theil von $^6/_7$ ist $^2/_7$.

Regel: Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen, dividirt man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl, und gibt dem Quotienten den Nenner des Bruches zum Nenner.

Wenn die Division des Zählers durch die ganze Zahl nicht aufgeht, wie das in der Regel der Fall ist, so wird der gesuchte Quotient ein Doppelbruch. In diesem Falle ist dieses Verfahren nicht sehr bequem. Wir sehen uns daher nach einer zweiten Auflösungsart um.

Auflösung 2. $^6/_7$ durch 3 theilen, heißt, eine Zahl suchen, welche der dritte Theil von $^6/_7$ ist. Wenn man aber den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der Werth des Bruches der so vielste Theil des vorigen Werthes, als die ganze Zahl Einheiten hat. Wenn ich daher den Nenner des Bruches $^6/_7$ mit 3 vervielfache und den Zähler ungeändert lasse, so ist der Werth des Bruches $^6/_7$ 3 mal so klein, also durch 3 getheilt worden. Also ist $^6/_7$ getheilt durch $3 = \frac{6}{7\,.\,3} = {}^6/_{21} = {}^2/_7$.

Aus denselben Gründen ist $^7/_8$, getheilt durch $3 = \frac{7}{8\,.\,3} = {}^7/_{24}$.

Regel: Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen, vervielfacht man den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl und gibt dieses Produkt dem Zähler des Bruches zum Nenner. Mit anderen Worten: Man läßt den Zähler des Bruches ungeändert und vervielfacht den Nenner des Bruches mit der gegebenen Zahl.

Dieses Verfahren ist in allen Fällen anwendbar, und es entstehen durch Anwendung desselben niemals Doppelbrüche.

Auflösung 3. $^6/_7$ durch 3 theilen, kann auch heißen: untersuchen, wie oft 3 in $^6/_7$ enthalten ist. Dieses geschieht am einfachsten, wenn ich die Zahl 3 mit dem Bruche $^6/_7$ gleichnamig mache; 3 ist =

$\frac{3 \cdot 7}{7} = {}^{21}/_7$; ${}^{21}/_7$ ist aber in ${}^6/_7$ so oft enthalten, als 21 in 6, und dieses ist ${}^6/_{21} = {}^2/_7$ mal der Fall. — Wenn ${}^7/_8$ durch 3 getheilt werden soll, so verhält es sich ebenso. $3 = \frac{3 \cdot 8}{8} = {}^{24}/_8$; ${}^{24}/_8$ in ${}^7/_8$ eben so oft wie 24 in 7, d. h. ${}^7/_{24}$ mal.

Regel. Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen, macht man die ganze Zahl mit dem Bruche gleichnamig, und dividirt dann mit dem Zähler der letzteren Zahl in den Zähler des gegebenen Bruches. Der Quotient nennt die gesuchte Zahl.

Ein Bruch kann also auf eine dreifache Weise durch eine ganze Zahl getheilt werden:

durch die Theilung des Zählers durch die ganze Zahl — durch die Vervielfachung des Nenners mit der ganzen Zahl — durch die Gleichnamigmachung der ganzen Zahl mit dem Bruche, und durch Division des Zählers des Bruches mit dem Zähler der gefundenen Zahl.

Die dritte Art ist mit der zweiten wesentlich eins. Es bleiben daher die beiden ersten Arten übrig. Die erste Art, die Theilung des Zählers des Bruches durch die ganze Zahl, wählt man nur in den Fällen, wenn sich der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl ohne Rest theilen läßt; in den meisten Fällen wird daher die zweite Art, die Vervielfachung des Nenners mit der ganzen Zahl, angewandt.

Aufgaben.

Theilet ${}^2/_3$, ${}^3/_4$, ${}^4/_5$, ${}^5/_6$ rc. durch 2, 3, 4 und 5!

Gebet an, wie oft 6, 7, 8, 9 und 10 enthalten sind in ${}^3/_5$, ${}^4/_6$, ${}^5/_7$, ${}^6/_8$, ${}^7/_9$, ${}^8/_{10}$!

Mehr solcher Aufgaben!

§. 107. Eine ganze Zahl durch einen Bruch zu theilen.

Beispiel. 5 durch ${}^2/_3$ zu theilen.

Auflösung 1. Wenn ich 5 durch 2 theilen sollte, so würde ich zum Quotienten ${}^5/_2$ erhalten; nun soll aber 5 nicht durch 2, sondern durch den 3ten Theil von 2 getheilt werden; ich habe also, indem ich 5 durch 2 theilte, durch eine Zahl getheilt, welche 3mal so groß ist, als diejenige, durch welche ich theilen soll; dadurch ist der Quotient offenbar 3mal so klein geworden, als er hätte werden sollen. Ich muß daher den Quotienten ${}^5/_2$ 3mal nehmen, um den wahren Quotienten zu erhalten.

$${}^5/_2 \times 3 = \frac{5 \cdot 3}{2} = {}^{15}/_2 = 7{}^1/_2.$$

Regel. Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch getheilt werden, so theilt man dieselbe durch den Zähler des Bruches, und vervielfacht diesen Quotienten mit dem Nenner desselben. Oder: man vervielfacht die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, und theilt dieses Product durch den Zähler desselben. 6 durch

$^4/_5$ getheilt, gibt: $^6/_4 \times 5 = \frac{6 \cdot 5}{4} = {}^{30}/_4 = 7^1/_2$.

Oder: $\frac{6 \cdot 5}{4} = {}^{30}/_4 = 7^1/_2$.

Folgerung. Da 6 durch $^4/_5$ getheilt, $\frac{6 \cdot 5}{4}$ gibt, $6 \times {}^5/_4$ aber auch $\frac{6 \cdot 5}{4}$ gibt, so ist es einerlei, ob man eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, oder dieselbe ganze Zahl mit dem umgekehrten Bruche multiplicirt. In manchen Rechenbüchern ist dieser Satz so ausgedrückt: Durch einen Bruch dividiren, heißt: „mit dem umgekehrten Bruche multipliciren." (Einen Bruch umkehren, heißt: den Zähler desselben zum Nenner, und den Nenner zum Zähler machen.) Eine Zahl also z. B. durch $^2/_3$ theilen, heißt: sie $^3/_2$ mal nehmen, und eine Zahl $^5/_6$ mal nehmen, heißt: sie durch $^6/_5$ theilen. Hieraus erklärt sich auf eine ganz einfache Weise die den Anfängern auffallende Erscheinung, daß bei der Vervielfachung einer Zahl mit einem ächten Bruche ein Product entsteht, welches kleiner ist, als die Zahl, welche vervielfacht worden ist. Wenn man nun bedenkt, daß durch die Umkehrung eines ächten Bruches ein unächter entsteht, und daß, mit einem Bruche theilen, so viel ist, als mit dem umgekehrten Bruche vervielfachen, und, mit einem Bruche vervielfachen, so viel, als mit dem umgekehrten Bruche theilen, so erhellet, daß die Vervielfachung mit einem ächten Bruche die Theilung mit einem unächten Bruche (der also größer als 1 ist) ist, und daß die Theilung mit einem ächten der Vervielfachung mit einem unächten gleich ist. Durch die Vervielfachung mit einem ächten Bruche muß daher ein Product entstehen, welches kleiner ist als die vervielfachte Zahl, und durch die Theilung mit einem ächten Bruche muß ein Product entstehen, welches größer ist, als die getheilte Zahl. Die Vervielfachung mit einem ächten Bruche ist also eigentlich (der Sache nach) eine Theilung (= Verminderung), und die Theilung mit einem ächten Bruche ist eigentlich eine Vervielfachung (= Vermehrung).

Man kann diese Sätze auch so deutlich machen: vervielfacht man eine Zahl mit 1, so bleibt sie ungeändert; vervielfacht man eine Zahl mit einer andern, welche größer als 1 ist, also mit ganzen Zahlen oder unächten Brüchen, so nimmt man sie mehr als ein mal, so entsteht ein Product, welches größer ist, als sie selbst; vervielfacht man aber eine Zahl mit einem ächten Bruche, d. h. nimmt man sie weniger als ein mal, so muß auch das Product kleiner sein, als sie selbst.

Theilt man eine Zahl durch 1, so bleibt sie ungeändert; theilt man sie durch eine Zahl, welche größer als 1 ist, so muß ein Quotient entstehen, welcher kleiner ist, als die Zahl selbst; theilt man sie durch eine Zahl, welche kleiner als 1 ist, so muß ein Quotient entstehen, welcher größer ist als derjenige Quotient, welcher entsteht, wenn ich die Zahl durch 1 theile. In diesem Falle ist aber der Quotient der getheilten Zahl selbst gleich; also ist in jenem Falle der Quotient größer als die Zahl selbst.

Beispiele.
a. $^3/_4 \times 2 = {}^6/_4 = 1^1/_2$; $1^1/_2 < 2$.
b. $^3/_4 \times {}^1/_2 = {}^3/_8$; $^3/_8 < {}^1/_2$.
c. $^3/_4 \times 2^1/_2 = {}^{15}/_8 = 1^7/_8$; $1^7/_8 < 2^1/_2$.

d. $^3/_4 : 2 = {}^8/_3 = 2^2/_3$; $2^2/_3 > 2$.
e. $^3/_4 : {}^1/_2 = {}^4/_6 = {}^2/_3$; $^2/_3 > {}^1/_2$.
f. $^3/_4 : 2^1/_2 = {}^{20}/_6 = 3^1/_3$; $3^1/_3 > 2^1/_2$.

Mag man also eine ganze Zahl (a), oder einen ächten Bruch (b), oder eine gemischte Zahl (c), mit einem ächten Bruche ($^3/_4$) vervielfachen, so ist das Product stets kleiner, als die vervielfachte Zahl. Wenn man aber irgend eine Zahl, eine ganze Zahl (d), oder einen ächten Bruch (e), oder eine gemischte Zahl (f), mit einem ächten Bruche ($^3/_4$) theilt, so ist der

Quotient stets größer als die getheilte Zahl. Bei der Vervielfachung und Theilung mit ächten Brüchen und mit der Einheit müssen daher die Wörter Vervielfachung und Theilung nicht im eigentlichen (ursprünglichen Wort-) Sinne genommen werden. Deßwegen ziehen Manche überhaupt die fremden Wörter Multiplication und Division vor. Denkt sich (— so begründen sie ihre Meinung —) der Schüler bei denselben vielleicht nichts, so denkt er sich doch wenigstens nichts Falsches. Es ist aber im Allgemeinen heilsamer, nichts zu denken, als Falsches zu denken.

Auflösung 2. 5 durch $^2/_3$ theilen, heißt a. eine Zahl suchen, deren 3ter Theil 2 mal genommen 5 gibt. Wenn der 3te Theil 2 mal genommen 5 gibt, so ist ihr 3ter Theil selbst die Hälfte von $5 = {}^5/_2$; sie selbst also 3 mal $^5/_2 = {}^{15}/_2 = 7^1/_2$.

Oder b.: deren 3ter Theil ihres Zwiefachen 5 ist. Wenn der 3te Theil ihres Zwiefachen 5 ist, so ist ihr Zwiefaches selbst = 3 mal 5 = 15; folglich ihr Einfaches, d. h. sie selbst $= {}^{15}/_2 = 7^1/_2$.

Die aus dieser Auflösungsweise herfließende (practisch-mechanische, practicantische) Regel ist dieselbe, welche aus der ersten Auflösung floß.

Noch ein Beispiel zur Anwendung der 2ten Auflösungsweise. 60 durch $^5/_6$ zu theilen.

Auflösung 1. Die gesuchte Zahl muß, $^5/_6$ mal genommen, 60 geben. Eine Zahl $^5/_6$ mal nehmen, heißt ihr 6tel 5 mal nehmen. $^1/_6$ der gesuchten Zahl muß also $^1/_5$ von 60 d. h. 12 sein; die Zahl selbst also $6 \times 12 = 72$.

Auflösung 2. Eine Zahl $^5/_6$ mal nehmen, heißt den 6ten Theil ihres Fünffachen nehmen. Das Fünffache der gesuchten Zahl ist also $6 \times 60 = 360$; folglich ihr Einfaches $^1/_5$ von $360 = 72$.

Anmerkung. Diese Auflösungsweise ist eigentlich eine algebraische.

a.
$$\frac{5}{6}x = 60$$
$$\frac{1}{6}x = \frac{60}{5} = 12$$
$$x = 6 \times 12 = 72$$

b.
$$\frac{5}{6}x = 60$$
$$5x = 6 \times 60 = 360$$
$$x = \frac{360}{5} = 72.$$

§. 108. Eine gemischte Zahl durch einen Bruch zu theilen.

Beispiel. $6^2/_3$ durch $^4/_7$ zu theilen.

Auflösung 1. Man verwandelt $6^2/_3$ in einen unächten Bruch und theilt denselben durch $^4/_7$, wie, nach dem Obigen, Brüche durch Brüche getheilt werden.

$6^2/_3 = {}^{20}/_3$; also ist $^{20}/_3$ durch $^4/_7$ zu theilen.

4 ist in 1 $^1/_4$ mal enthalten; 4 in $^1/_3$ (= dem dritten Theile von 1) auch nur den dritten Theil von $^1/_4$ mal, d. h. $\frac{1/3}{4} = {}^1/_{12}$ mal; 4 ist also in $^{20}/_3$ $^{20}/_{12}$ mal enthalten; die Hälfte von 4 muß in $^{20}/_3$ doppelt so oft enthalten sein, als 4 selbst; ein Drittel von 4 ist in $^{20}/_3$ 3 mal so oft enthalten, als 4; 1 Siebentel von 4 ist daher in $^{20}/_3$ 7 mal so oft enthalten, als 4 selbst. Nun war 4 in $^{20}/_3$ $^{20}/_{12}$ mal enthalten; also ist $^4/_7$ 7 mal $^{20}/_{12} = {}^{140}/_{12}$ mal in $^{20}/_3$ oder in $6^2/_3$ enthalten; $^{140}/_{12} = {}^{35}/_3 = 11^2/_3$. Also ist $6^2/_3$, getheilt durch $^4/_7$, $= 11^2/_3$.

Kürzer nach dem Obigen: $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$, getheilt durch $\frac{4}{7} = \frac{20}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{140}{12} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$.

Auflösung 2. $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$. Es soll eine Zahl gesucht werden, von der $\frac{4}{7}$ genommen $\frac{20}{3}$ sind.

a. 4 mal $\frac{1}{7}$ der Zahl $= \frac{20}{3}$;
folglich 4 mal die Zahl $= 7 \times \frac{20}{3} = \frac{140}{3}$;
also 1 mal die Zahl = dem 4ten Theil von $\frac{140}{3}$
$= \frac{140}{12} = 11\frac{2}{3}$.

b. $\frac{1}{7}$ von dem 4fachen der Zahl $= \frac{20}{3}$;
$\frac{1}{7}$ von der einfachen Zahl $= \frac{20}{12}$;
1 mal die Zahl $= 7 \times \frac{20}{12}$
$= \frac{140}{12} = 11\frac{2}{3}$.

Anmerkung. Man thut sehr wohl daran, Aufgaben mit Brüchen auf so genaue (umständliche) Art auflösen zu lassen, wie es oben geschehen ist. Es bildet sich dadurch in den Köpfen der Schüler die gehörige Klarheit, und sie gelangen dadurch zu einer schönen Fertigkeit in der mündlichen und — wenn man dazu die Anleitung gibt — in der schriftlichen Darstellung. Es liegt in der Natur der Sache, daß das ganze Wesen der Brüche dem Schüler nicht auf ein Mal klar wird. Geistesträge Schüler finden deßhalb den Mechanismus so bequem. Ihnen sind Regeln, als: mit einem Bruche dividiren heißt: mit dem umgekehrten Bruche multipliciren, gefundene Waare. Darum nöthige man sie, durch die Forderung ausführlicher Erläuterungen und genauester Nachweisung aller vorzunehmenden Operationen zum klaren Denken und Begründen.

Aufgaben.

Theilet $4\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $6\frac{3}{4}$, $7\frac{4}{5}$, $8\frac{5}{6}$, $9\frac{6}{7}$ durch $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$!

Wie oft sind $\frac{6}{7}$ und $\frac{4}{9}$ in $10\frac{1}{2}$, $12\frac{3}{4}$, $20\frac{4}{5}$ enthalten? rc.

§. 109. Einen Bruch durch eine gemischte Zahl zu theilen.

Beispiel. Wie oft ist $2\frac{4}{5}$ in $\frac{5}{6}$ enthalten? (Antw. $\frac{25}{84}$.)

Oder: $\frac{14}{5} : \frac{5}{6} = \frac{14 \,.\, 6}{5 \,.\, 6} : \frac{5 \,.\, 5}{6 \,.\, 5} = \frac{84}{30} : \frac{25}{30} = 84 : 25 = \frac{25}{84}$.

Die Auseinandersetzungen, die Auflösungen, geschehen auf ähnliche Weise wie in dem vorigen Paragraphen.

Aufgaben.

Wie oft ist $3\frac{3}{4}$ in $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$ enthalten?
Theilet $\frac{5}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{14}{20}$ durch $2\frac{5}{6}$!

§. 110. Eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu theilen.

Beispiel. $6\frac{4}{9}$ durch 3 zu theilen.

Auflösung. Der dritte Theil von 6 ist 2; der dritte Theil von 4 ist $\frac{4}{3}$; der dritte Theil von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{4}{9 \,.\, 3} = \frac{4}{27}$; der dritte Theil von $6\frac{4}{9}$ ist also $2\frac{4}{27}$.

Oder: $6\frac{4}{9} = \frac{58}{9}$; der dritte Theil von $\frac{58}{9}$ ist eine 3 mal so kleine Zahl; ein Bruch wird aber 3 mal so klein (besser: wird der dritte Theil seines Werthes), wenn man den Nenner mit 3 vervielfacht; also ist der dritte Theil von $\frac{58}{9} = \frac{58}{27} = 2\frac{4}{27}$.

Oder: $6\frac{4}{9} = \frac{58}{9}$; 3 ist $= \frac{27}{9}$; $\frac{27}{9}$ in $\frac{58}{9}$ = 27 in 58 = $\frac{58}{27} = 2\frac{4}{27}$.

Anmerkung. Man thut wohl daran, den Auflösungen die Proben beifügen zu lassen. Auf solche Weise übt man zugleich bei der Division mit Brüchen die Multiplication mit Brüchen.

Aufgaben.

Theilet $8\frac{4}{7}$, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{7}{12}$, $11\frac{2}{3}$, $12\frac{5}{10}$ durch 6!
Wie oft ist 9 in $16\frac{4}{5}$, $22\frac{3}{4}$, $29\frac{1}{2}$, $36\frac{3}{4}$ enthalten?

§. 111. Eine ganze Zahl durch eine gemischte Zahl zu theilen.

Beispiel. 5 durch $2\frac{1}{3}$ zu theilen.

Auflösung. $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; 1 ist in 5 5mal enthalten; die Hälfte von 1 muß in 5 2mal, und $\frac{1}{3}$ von 1 muß in 5 3mal so oft enthalten sein, wie 1 selbst; nun ist 1 in 5 5mal enthalten; also ist $\frac{1}{3}$ in 5 $3 \times 5 = 15$mal enthalten. $\frac{2}{3}$ sind 2mal $\frac{1}{3}$, also sind $\frac{2}{3}$ nur halb so oft, und $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$ nur den siebenten Theil so oft in 5 enthalten, als $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$ war in 5 15mal enthalten; also ist $\frac{7}{3}$ in 5 $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ mal enthalten. 5 durch $2\frac{1}{3}$ getheilt, gibt den Quotienten $2\frac{1}{7}$.

Oder: $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; 5 ist $= \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{15}{3}$; $\frac{7}{3}$ in $\frac{15}{3} = 7$ in $15 = 2\frac{1}{7}$.

Oder: $2\frac{1}{3} : 5 = \frac{7}{3} : 5 = \frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

Oder: $\frac{7}{3}$ einer Zahl $= 5$
7 mal die Zahl $= 3 \times 5 = 15$
1 mal die Zahl $= \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

Oder: $\frac{7}{3}$ einer Zahl $= 5$
$\frac{1}{3}$ der Zahl $= \frac{5}{7}$
1 mal die Zahl $= 3 \times \frac{5}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

Aufgaben.

Theilet 10, 15, 20, 25, 30 durch $4\frac{2}{3}$! (Antw. $2\frac{1}{7}$, $3\frac{3}{14}$, $4\frac{2}{7}$, $5\frac{5}{14}$, $6\frac{3}{7}$.)
Wie oft ist $8\frac{1}{5}$ in 17, 21, 36, 50 enthalten? (Antw. $2\frac{3}{41}$, $2\frac{23}{41}$, $4\frac{16}{41}$, $6\frac{4}{41}$ mal.)

§. 112. Eine gemischte Zahl durch eine gemischte Zahl zu theilen.

Beispiel. $8\frac{2}{3}$ durch $4\frac{2}{5}$ zu theilen.

Auflösung. $8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}$; $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$; $\frac{22}{5} : \frac{26}{3} = \frac{22 \cdot 3}{5 \cdot 3} : \frac{26 \cdot 5}{3 \cdot 5}$
$= \frac{66}{15} : \frac{130}{15} = 66 : 130 = 33 : 65 = \frac{65}{33} = 1\frac{32}{33}$.

Oder: $\frac{22}{5} : \frac{26}{3} = \frac{5}{22} \times \frac{26}{3} = \frac{5 \cdot 26}{22 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 13}{11 \cdot 3} = \frac{65}{33} = 1\frac{32}{33}$.

Oder in den vorhergehenden Weisen.

Aufgaben.

Wie oft ist $4\frac{2}{3}$ in $3\frac{4}{5}$, $6\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{3}$, $12\frac{4}{5}$ enthalten? (Antw. $\frac{57}{70}$, $1\frac{11}{28}$, 2, $2\frac{26}{35}$ mal.)

Wie oft kann man $9\frac{1}{3}$ von $20\frac{1}{2}$, $16\frac{3}{4}$, $15\frac{1}{5}$, $6\frac{1}{2}$ wegnehmen? Antw. $2\frac{11}{56}$, $1\frac{89}{112}$, $1\frac{22}{35}$, $\frac{39}{56}$ mal.)

§. 113. Gemischte Aufgaben zur mündlichen Anwendung der Brüche.

1) 1 Pfd. Waare kostet $4\frac{2}{7}$ Sgr.; wie viel kosten 30 Pfd.? (Antw. 4 Thlr. 8 Sgr. $6\frac{6}{7}$ Pf.)

2) Für $2\frac{1}{2}$ Pfennig erhält man 1 Pfd. Kirschen; wie viel für 3 Sgr.? (Antw. $14\frac{2}{5}$ Pfd.)

3) 1 Elle kostet $10\frac{9}{40}$ Thlr.; wie viel kosten $4\frac{3}{4}$ Ellen? (Antw. 48 Thlr. 17 Sgr. $\frac{3}{4}$ Pf.)

4) A kauft 3 Säcke Salz; der erste wog $100\frac{2}{3}$ Pfd., der zweite $105\frac{1}{2}$ Pfd., der dritte $121\frac{5}{6}$ Pfd.; jedes Pfd. kostet $\frac{2}{3}$ Sgr.; wie viel kosten alle Säcke zusammen? (Antw. 7 Thlr. 8 Sgr. 8 Pf.)

5) A kauft ein Pferd; er bezahlt $27\frac{1}{2}$ Thlr. und bleibt $\frac{2}{5}$ des Kaufpreises schuldig; wie theuer war das Pferd? (Antw. 45 Thl. 25 Sgr.)

6) $94\frac{2}{7}$ Thlr. werden unter eine Anzahl armer Familien zu gleichen Theilen vertheilt; jede Familie empfängt $8\frac{4}{7}$ Thlr.; unter wie viel Familien wurde das Geld vertheilt? (Antw. 11 Familien.)

7) Ein Landmann erndtet auf $5\frac{1}{2}$ Morgen Ackerland $38\frac{1}{2}$ Scheffel Roggen; wie viel auf einem Morgen? (Antw. 7 Scheffel.)

8) Ein Krämer verkauft von $66\frac{11}{12}$ Pfd. Thee am ersten Tage $4\frac{3}{4}$ Pfd.; in wie viel Tagen würde er sämmtlichen Thee verkauft haben, wenn er täglich $4\frac{1}{4}$ Pfd. verkaufte? (Antw. $14\frac{5}{57}$ Tagen.)

9) Und wenn er an jedem verkauften Pfunde $\frac{1}{3}$ Thlr. gewinnt, wie viel bringt ihm dann der Verkauf des Thee's ein? (Antw. 22 Thlr. 9 Sgr. 2 Pf.)

10) Jemand verbraucht $54\frac{3}{4}$ Gang Steinkohlen; er bezahlt jeden Gang auf der Grube mit $\frac{2}{3}$ Thlr., und für jeden Gang an Fuhrlohn $\frac{1}{2}$ Sgr.; wie hoch kommen die $54\frac{3}{4}$ Gang zu stehen? (Antw. 37 Thlr. 12 Sgr. $4\frac{1}{2}$ Pf.)

11) A verkauft $\frac{1}{2}$ Ctnr., $\frac{3}{4}$ Ctnr., $\frac{7}{8}$ Ctnr., jeden Ctnr. zu $3\frac{1}{5}$ Thlr.; wie viel nimmt er überhaupt ein? (Antw. 6 Thlr. 24 Sgr.)

12) Wie viel kosten $7\frac{1}{5}$ Pfd. Kaffee, wenn 1 Pfd. $\frac{4}{3}$ Thlr. kostet? (Antw. 9 Thlr. 18 Sgr.)

13) 8 Personen theilen eine Erbschaft von $1000\frac{4}{10}$ Thlr.; wie viel erhält jede? (Antw. 125 Thlr. 1 Sgr. 6 Pf.)

14) Ein Kind verliert von $26\frac{9}{12}$ Sgr. $16\frac{3}{4}$; für jeden Pfennig des Restes kauft es 1 Birne; wie viel Birnen erhält es? (Antw. 115 Birnen.)

15) Theilet $\frac{2}{3}$ durch $\frac{3}{4}$ und zieht vom Quotienten $\frac{7}{9}$ ab; wie viel bleibt übrig? (Antw. $\frac{1}{9}$.)

16) Was kommt heraus, wenn man $\frac{8}{11}$ mit $\frac{7}{8}$ vervielfacht und vom Producte $3 \times \frac{2}{11}$ abzieht? (Antw. $\frac{1}{11}$.)

17) Vermehret den 8ten Theil von $10\frac{4}{5}$ um $2\frac{4}{5}$, und gebet an, welche Summe entsteht? (Antw. $4\frac{3}{20}$.)

18) Füget $6\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{9}$ und $8\frac{1}{3}$ zusammen, und untersuchet, wie oft $5\frac{2}{9}$ in der Summe enthalten ist? (Antw. $4\frac{11}{47}$.)

19) Der wie vielste Theil ist $7\frac{2}{3}$ von $8\frac{4}{7}$? (Antw. $1\frac{19}{161}$.)

20) Was für ein Theil ist $9\frac{1}{3}$ von $\frac{8}{5}$? (Antw. $\frac{6}{35}$.)

21) Welche Zahl ist $\frac{4}{11}$ mal so groß als $5\frac{3}{4}$? (Antw. $2\frac{1}{11}$.)

22) In welcher Zahl ist $3\frac{4}{7}$ $1\frac{2}{3}$ mal enthalten? (Antw. In $5\frac{20}{21}$.)

23) Wie oft kann man $3\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$ von $22\frac{1}{2}$ abziehen? (Antw. $7\frac{5}{7}$ mal.)

24) Wie oft muß man $\frac{2}{3}$ mal $1\frac{1}{2}$ von 31 abziehen, um $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ übrig zu behalten? (Antw. 30 mal.)

25) $16 \times \frac{4}{7}$ weniger $3 \times \frac{4}{21}$ ist wie viel mehr als $6\frac{1}{2}$? (Antw. $2\frac{1}{14}$.)

26) Theilet den 8ten Theil von $15\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, und ziehet den Quotienten von 4 ab; was bleibt übrig? (Antw. $\frac{3}{16}$)

27) Der 12te Theil von $8\frac{4}{7}$ ist der wie vielste Theil von 3? (Antw. $\frac{5}{21}$.)

28) Ein Viertel von $\frac{3}{5}$, vervielfacht mit dem Neuntel von $\frac{7}{8}$, ist wie viel weniger als 1? (Antw. $\frac{473}{480}$.)

29) Welche Zahl entsteht, wenn man $\frac{4}{7}$ von 28 mit $\frac{2}{3}$ von $10\frac{1}{2}$ vervielfacht und das Product durch $1\frac{1}{2}$ theilt? (Antw. $74\frac{2}{3}$.)

30) Wie viel bleibt übrig, wenn man $2\frac{3}{4} \times \frac{3}{8}$ von $12\frac{1}{2} \times 10\frac{3}{4}$ abzieht? (Antw. $132\frac{21}{32}$.)

31) 8 mal $2\frac{4}{9} + (2\frac{1}{3} \times 11)$ ist wie viel mehr als $\frac{3}{4}$ von 40? (Antw. $15\frac{2}{9}$.)

32) Nennet Brüche, deren Zähler durch 2, 4, 8, 12 rc. theilbar sind!

33) Nennet Brüche, deren Nenner Vielfache von 3, 6, 9, 12 sind!

34) Nennet gemischte Zahlen, deren Zähler nach der Einrichtung durch 6, 7, 8, 9, 10 theilbar sind! (Antw. $2\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{4}$, $6\frac{2}{5}$, $10\frac{2}{7}$, $11\frac{1}{9}$ u. s. w.)

35) Nennet Paare von Brüchen, die, mit einander vervielfacht, 1 zum Producte geben! (Antw. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}$, $\frac{5}{8} \times 1\frac{3}{5}$ u. s. w.)

36) Nennet drei mit einander zu vervielfachende Brüche, deren Product $= 1$ ist! (Antw. $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} \times 1\frac{5}{7}$ u. s. w.)

37) Nennet eine Reihe von Brüchen, von welchen jeder folgende die Hälfte, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ des vorhergehenden ist! (Antw. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ — $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ — $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ u. s. w.)

38) Nennet Paare von Brüchen, durch welche, wenn man den einen durch den andern theilt, der Quotient 1 entsteht! (Antw. $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$, $\frac{4}{5} : \frac{8}{10}$ u. s. w.)

39) A kauft ein Faß Tabak von $4\frac{3}{4}$ Ctnr. Gewicht; das leere Faß wog $36\frac{1}{4}$ Pfd.; jedes Pfd. Tabak kostet $2\frac{1}{2}$ Sgr.; wie viel kostet aller Tabak zusammen? (Antw. 40 Thlr. 15 Sgr. $7\frac{1}{2}$ Pf.)

40) Vervielfache die Zahl $\frac{2}{3}$ mit 12, theile das Product durch $\frac{4}{5}$, nimm den Quotienten $4\frac{2}{5}$ mal, und füge $2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ hinzu; hierauf ziehe von der Summe $6\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ ab, und gib nun an, wie oft die ursprüngliche Zahl $\frac{2}{3}$ in dem gebliebenen Reste enthalten ist! (Antw. 61 mal.)

II. Schriftlich.

§. 114. Verfahren bei der schriftlichen Behandlung der Brüche.

1) Einen Bruch durch einen Bruch zu theilen.

a. Wenn sie gleichnamig sind.

Beispiel. $^{92}/_{104}$ durch $^{36}/_{104}$ zu theilen. (Antw. $2^5/_9$.)

Ansatz und Ausrechnung:

36 : 92   36 | 92 | $2^5/_9$
                  | 72 |

$^{20}/_{36} = {^5}/_9$

b. Wenn sie ungleichnamig sind.

Beispiel. $^{24}/_{37}$ durch $^{13}/_5$ zu theilen. (Antw. $^{120}/_{481}$.)

Entweder macht man beide Brüche zuerst gleichnamig, und theilt alsdann, wie oben, mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividenden, oder man kehrt den Divisor um, und multiplicirt beide Brüche mit einander.

Ansatz und Berechnung:

$^{24}/_{37}$ | 5 × 24 = 120
$^{13}/_5$ | 37 × 13 = 481
37   481 : 120 = $^{120}/_{481}$.
13
———
111
37
———
481

Oder: $^{13}/_5 : {^{24}}/_{37} = {^5}/_{13} \times {^{24}}/_{37} = {^{120}}/_{481}$.

Dieses letztere Verfahren ist, wie der Augenschein lehrt, das kürzere. Will man den Divisor nicht umkehren, so muß man sich merken, daß man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors zu multipliciren hat. Manche (ältere) Rechenbücher machen dieses durch Querstriche anschaulich, z. B. $^{13}/_5 : {^{24}}/_{37} = {^{13}}/_5 \times {^{24}}/_{37}$.

2) Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen.

Beispiel. Wie oft ist 21 in $^{231}/_{381}$ und in $^{39}/_{62}$ enthalten? (Antw. $^{11}/_{381}$ und $^{13}/_{434}$.)

Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl getheilt werden soll, so theilt man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl, oder man vervielfacht den Nenner mit derselben. Jenes geschieht, wenn der Zähler durch die gegebene Zahl ohne Rest theilbar ist; wo nicht, so schlägt man das zweite Verfahren ein.

Ansatz und Ausrechnung:

$$21 : {^{231}}/_{381} = {^{11}}/_{381};\ 21 : {^{39}}/_{62} = \frac{39}{21\,.\,62} = \frac{13}{7\,.\,62} = {^{13}}/_{434}.$$

3) Eine ganze Zahl durch einen Bruch zu theilen.

Beispiel. 1238 durch $^{23}/_{25}$ zu theilen. Antw. $1345\,^{15}/_{23}$.)

Hier muß 1238 mit 25 multiplicirt und das Product durch 23 dividirt werden; oder man dividirt 1238 zuerst durch 23 und multiplicirt den Quotienten mit 25.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 1238 \\ 25 \\ \hline 6190 \\ 2476 \\ \hline \end{array}$$

$$23 \mid 30950 \mid 1345\,^{15}/_{23}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \hline 79 \\ 69 \\ \hline 105 \\ 92 \\ \hline 130 \\ 115 \\ \hline ^{15}/_{23} \end{array}$$

Oder: $23 \mid 1238 \mid 53\,^{19}/_{23}$

$$\begin{array}{r} 115 \\ \hline 88 \\ 69 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$53\,^{19}/_{23} \times 25$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 265 \\ 106 \\ \hline 1325 \\ +20\,^{15}/_{23} \\ \hline 1345\,^{15}/_{23}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ 25 \\ \hline 95 \\ 38 \\ \hline \end{array}$$

$$23 \mid 475 \mid 20\,^{15}/_{23}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \hline ^{15}/_{23} \end{array}$$

Der Augenschein lehrt, daß das erstere Verfahren das kürzere ist.

4) **Eine gemischte Zahl durch einen Bruch zu theilen.**

Beispiel. $32\,^{3}/_{4}$ durch $^{14}/_{15}$ zu theilen. (Antw. $35\,^{5}/_{56}$.)

Man richtet die gemischte Zahl ein, und multiplicirt den dadurch entstehenden Bruch mit dem umgekehrten Divisor.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\frac{32\,^{3}/_{4}}{^{131}/_{4} \times {}^{15}/_{14} = {}^{1965}/_{56}} \qquad = 35\,^{5}/_{56}.$$

$$\begin{array}{r} 131 \\ 15 \\ \hline 655 \\ 131 \\ \hline 1965 \end{array}$$

$$56 \mid 1965 \mid 35\,^{5}/_{56}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \hline 285 \\ 280 \\ \hline ^{5}/_{56} \end{array}$$

5) **Einen Bruch durch eine gemischte Zahl zu theilen.**

Beispiel. Wie oft ist $7\,^{4}/_{9}$ in $^{17}/_{19}$ enthalten? (Antw. $^{153}/_{1273}$ mal.)

Man richtet die gemischte Zahl ein, kehrt den dadurch entstehenden Bruch um, und multiplicirt mit ihm den Bruch $^{17}/_{19}$.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\frac{7\,^{4}/_{9}}{^{67}/_{9}} \qquad \frac{9 \times 17}{67 \times 19} = {}^{153}/_{1273}.$$

6) **Eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu theilen.**

Beispiel. $309\,^{9}/_{12}$ in 32 gleiche Theile zu theilen. (Antw. $9\,^{87}/_{128}$.)

Man richtet die gemischte Zahl ein, multiplicirt den Nenner des dadurch entstehenden Bruches mit der Zahl 32, und zieht die Ganzen heraus.

Ansatz und Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 309\,^{9}/_{12} \\ \hline 627 \\ 309 \\ \hline 3717 \end{array}$$

$$\frac{3717}{12 \times 32} = {}^{3717}/_{384} = {}^{1239}/_{128} = 9\,^{87}/_{128}.$$

7) Eine ganze Zahl durch eine gemischte Zahl zu theilen.

Beispiel. Wie oft ist $42\frac{8}{15}$ in 309 enthalten? (Antw. $7\frac{169}{638}$ mal.)

Man richtet die gemischte Zahl ein, bringt die Zahl 309 auf dieselbe Benennung, und dividirt mit dem Zähler in den Zähler; oder man kehrt den Divisor nach der Einrichtung um, und multiplicirt mit demselben.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 42\frac{8}{15} \\ \hline 218 \\ 42 \\ \hline {}^{638}/_{15} \end{array} \quad : \quad \begin{array}{r} 309 \\ 15 \\ \hline 1545 \\ 309 \\ \hline {}^{4635}/_{15} \end{array} = 638 : 4635 \,|\, 7\frac{169}{638}.$$

$$\begin{array}{r} 4466 \\ \hline 169 \end{array}$$

Oder: ${}^{638}/_{15} : 309 = {}^{15}/_{638} \times 309 = {}^{4635}/_{638} = 7\frac{169}{638}$.

8) Eine gemischte Zahl durch eine gemischte Zahl zu theilen.

Beispiel. $693\frac{3}{4}$ durch $75\frac{3}{7}$ zu theilen. (Antw. $9\frac{417}{2112}$.)

Man richtet beide gemischte Zahlen ein, kehrt den Divisor um, und multiplicirt mit demselben.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\begin{array}{c} 693\frac{3}{4} \\ \hline {}^{2775}/_{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 75\frac{3}{7} \\ \hline {}^{528}/_{7} \end{array}$$

$${}^{2775}/_{4} \times {}^{7}/_{528} = 9\frac{417}{2112}.$$

Ausrechnung einer zusammengesetzten Aufgabe.

4 Männer treiben ein Geschäft zu gemeinschaftlichem Gewinn und Verlust, 6 Jahre lang. Sie gewinnen im ersten Jahre $684\frac{3}{5}$ Rthlr., im zweiten $3\frac{3}{4}$mal so viel; im dritten verlieren sie $\frac{4}{5}$ des in den beiden früheren Jahren gewonnenen Geldes; im vierten gewinnen sie das $8\frac{5}{6}$fache des in den drei verflossenen Jahren Gewonnenen, im fünften gewinnen sie im Durchschnitt täglich 5 Rthlr. 18 Sgr., und im sechsten verlieren sie $\frac{2}{9}$ des in den 5 ersten Jahren überhaupt gewonnenen Geldes. Wie viel haben sie in den sechs Jahren überhaupt gewonnen, oder verloren, wie viel durchschnittlich in jedem Jahre, und wie viel erhält oder bezahlt jeder bei der nunmehr erfolgenden Auseinandersetzung? —

Ansicht. Besinnen wir uns zuerst, was hier zu thun ist! Erstens ist zu suchen die Größe des Gewinnes im 2ten Jahre (1); zweitens die Summe des Gewinnes im ersten und zweiten Jahre (2); drittens die Größe des Verlustes im dritten Jahre (3); viertens die Größe des Ueberschusses des Gewinnes der beiden ersten Jahre über den Verlust im dritten Jahre (4); fünftens der Gewinn des vierten Jahres (5); sechstens der Gewinn des fünften Jahres (6); siebentens die Summe des Gewinnes in den fünf ersten Jahren (7); achtens der Verlust

im sechsten Jahre (8); neuntens die Größe des Gewinnes oder Verlustes überhaupt (9); zehntens die Durchschnittsumme für ein Jahr (10); eilftens der Gewinn oder Verlust eines jeden (11). In dieser Ordnung und unter den angegebenen Ziffern ist Vorstehendes nachstehend ausgerechnet.

1) $684\frac{3}{5} \times 3\frac{3}{4}$

$$\frac{3423}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{3423 \, . \, 3}{4} = \frac{10269}{4} = 2567\tfrac{1}{4}.$$

2) (20)

$684\frac{3}{5}$	$4 \times 3 = 12$
$2567\frac{1}{4}$	$5 \times 1 = 5$
$3251\frac{17}{20}$	$\frac{17}{20}$.

3) $3251\frac{17}{20} \times \frac{4}{5}$

$$\frac{65037}{20} \times \tfrac{4}{5} = \frac{65037}{25} = 2601\tfrac{12}{25}.$$

4) (100)

$3251\frac{17}{20}$	$5 \times 17 = 85$
$2601\frac{12}{25}$	$4 \times 12 = 48$
$650\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$

5) $650\frac{37}{100} \times 8\frac{5}{9}$

$$\frac{65037}{100} \times \tfrac{77}{9} = \frac{65037 \, . \, 77}{900} = \frac{21679 \, . \, 77}{300} = \frac{1669283}{300} = 5564\tfrac{83}{300}.$$

6) 5 Thlr. 18 Sgr. × 365 $= 5\frac{3}{5} \times 365$
$= \frac{28}{5} \times 365$
$= 28 \times 73$
$= 2044$ Thlr.

7) $650\frac{37}{100}$ Thlr. = Gewinn in den 3 ersten Jahren;
$5564\frac{83}{300}$ » = » im vierten Jahre;
2044 » = » im fünften Jahre;
$8258\frac{97}{150}$ Thlr. = » in den ersten 5 Jahren.

8) $$8258\,\frac{97}{150} = 8258\,\frac{194}{300} \times \frac{2}{9} = \frac{2477594}{300} \times \frac{2}{9} = \frac{4955188}{2700} =$$

$1835\,\frac{172}{675}$ Thlr. = Verlust im 6ten Jahre.

9) (2700)

$8258\frac{194}{300}$ Thlr.	$9 \times 194 = 1746$
$1835\frac{688}{2700}$ »	$1 \times 688 = 688$
$6423\frac{1058}{2700}$ Thlr.	($\frac{1058}{2700}$) ist der Gewinn im Ganzen.

10) $6423\frac{1058}{2700}$ Thlr. $\times \frac{1}{6}$

4497158
12846

$$\frac{17343158}{2700} \times \tfrac{1}{6} = \frac{17343158}{16200} = 1070\tfrac{9158}{16200} \text{ Thlr.}$$

11) $6423^{1058}/_{2700}$ Thlr. $\times$ ¼

$$\frac{17343158}{2700} \times \frac{1}{4} = \frac{17343158}{10800} = 1605^{4570}/_{5400} \text{ Thlr.}$$

Daß in vorstehender Berechnung noch Abkürzungen Statt finden können, wird derjenige von selbst finden, welcher sich an die Berechnung selbst macht. Hier war es nur darum zu thun, ein zusammengesetztes Beispiel auszurechnen. Uebersicht und Verhütung von Fehlern werden dadurch mit erreicht, daß man die einzelnen Resultate nicht nur getrennt für sich berechnet, sondern auch in abgesonderte Räume schreibt, folglich auch die Schüler daran gewöhnt. Nur gar zu sehr haben Viele die Neigung, die Zifferreihen in einander laufen zu lassen. Man zwinge sie zu übersichtlicher deutlicher Darstellung, schreibe ihnen in einem Schema die Art vor, wie man die schriftlichen Arbeiten verlangt!

Anmerkung. In dem ersten Uebungsbuche findet man unter dem Artikel „Brüche" die nöthigen Aufgaben zur Uebung in der schriftlichen Behandlung der Brüche, zuerst nach den 4 Grundrechnungsarten in Brüchen getrennt, dann vermischte Aufgaben.

Zusatz: Vollständige Auseinandersetzung des Verhältnisses der Begriffe des Theilens und des Enthaltenseins. An verschiedenen Stellen der sechsten und neunten Stufe sind die Begriffe des Theilens und des Enthaltenseins vorgekommen und mit einander verglichen worden, damit ihr Verhältniß oder ihre Verwandtschaft und ihr Unterschied an jeder Stelle so weit, als es nöthig war, aufgefaßt werde. Es steht zu bezweifeln, daß bei keinem Lehrer in Betreff derselben gar keine Dunkelheit mehr obwalte, und das Eine nirgends mehr mit dem Andern verwechselt werde. Dieser Zustand würde für den Rechenunterricht von schädlichen Folgen sein. Denn die genannten Begriffe sind Grundbegriffe der Division; folglich hängt die Klarheit des Operirens vorzüglich mit von ihnen ab. Es scheint daher orts- und, wenn man vergleicht, was die Rechenbücher von andern Verfassern in dieser Beziehung leisten, auch zeitgemäß, zur gegenseitigen Feststellung der genannten zwei Begriffe in nähere Untersuchung und Erläuterung einzugehen. Die Leichtigkeit der Verwechselung beider Begriffe hat ihren Grund in ihrer Verwandtschaft; denn das Verwandte, darum einander Aehnliche, wird leicht mit einander verwechselt. An und für sich aber ist das Wesen eines jeden leicht aufzufassen, weil es einfache Begriffe sind. Beginnen wir elementarisch unsere Erörterung auf dem Standpunkte der Kinder des Lebens, wie die Verhältnisse zur Auffassung des einen und des andern Begriffs nöthigen.

Soll eine gewisse Menge von Dingen, z. B. 15 Aepfel, unter eine Anzahl von Knaben, z. B. 3, so getheilt werden, daß jeder so viel erhalte, als die andern, so entsteht der Begriff, den wir kurzweg den Begriff des Theilens nennen, ohne die nähere, mitgedachte Bestimmung, daß eine Theilung in gleiche Theile geschehen solle, mitzunennen. Theilen (Dividiren) heißt also: eine Größe in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen und die Größe eines dieser gleichen (folglich damit, weil sie gleich sind, aller) Theile bestimmen. Um diese Forderung in einem einzelnen, bestimmten Falle zu vollziehen, dazu gehören zwei Größen: eine, welche getheilt werden soll, und eine, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile die zu theilende getheilt werden soll. Daraus folgt, daß die zu theilende Größe nur irgend eine Größe (ein Quantum) zu sein braucht, oder daß an jeder Größe die Theilung vollzogen werden kann, daß dagegen die Größe, welche die Anzahl der Theile angibt, in welche jene Größe getheilt werden soll, nothwendig eine Zahl (d. h. eine bestimmte Art von Größen) sein muß.

Man kann Linien, Flächen, Körper, Dinge aller Art, wenn sie nur zu den Größen gehören, sogenannte benannte und unbenannte Zahlen, reine und nicht reine, ganze und gebrochene 2c. theilen, folglich auch in gleiche Theile theilen, aber man kann nicht durch Linien, Flächen, Körper, nicht durch benannte

Zahlen und beliebige Dinge, sondern nur durch reine Zahlen theilen, deren Wesen lediglich in ihrer Beziehung zur Einheit besteht, wodurch angegeben wird, in wie viel gleiche Theile die zu theilende Größe getheilt werden soll. 30 kann eben so gut in 6 gleiche Theile getheilt werden als 30 Sgr.; aber man kann weder 30 noch 30 Sgr in 6 Sgr.-Theile theilen. Unter diesem Ausdruck läßt sich gar nichts denken. Nennt man herkömmlicher Weise die zu theilende Größe den Dividenden, die Zahl, welche angibt, in wie viel gleiche Theile, den Divisor, so heißt der eben entwickelte Satz: beim Theilen oder Dividiren kann der Dividend jede beliebige Größe, der Divisor aber muß eine reine Zahl sein.

Hier entsteht die Frage, ob der Divisor auch ein Bruch sein könne, oder ob der angegebene Begriff des Theilens auch bei einem Bruchdivisor festgehalten werden könne, z. B. bei $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$ 2c.

Der Divisor zeigt nach der anderwärts gegebenen Erklärung an, in wie viel gleiche Theile eine Größe getheilt werden soll. In wie viel gleiche Theile soll denn eine Größe getheilt werden, wenn der Divisor $^1/_3$ oder $^2/_3$ ist? Dort in 3, hier in 3 oder in 2? Es läßt sich nicht angeben, auf diese Frage nicht unmittelbar antworten. Sie hat keinen Sinn. Um eine Theilung zu vollziehen, muß ich wissen, in wie viel gleiche Theile; Solches weiß ich aber bei einem Bruche nicht, darum kann der festgestellte, eigentliche Begriff des Theilens auf einen Bruch als Divisor nicht angewandt werden. Läßt man daher den Ausdruck: Theilen oder Dividiren durch Brüche — zu, so muß das einen andern als den oben erörterten Sinn haben. Wir werden denselben finden, wenn wir den Begriff des Enthaltenseins erörtern.

Dazu werden wir hingedrängt, wenn wir an den Namen denken, den man dem Resultate einer vollzogenen Division gibt. Man nennt ihn Quotient, welches dem Wortsinne nach heißt: wie oftmal, so und so viel mal. Davon war aber oben gar keine Rede. Denn wir fanden nur die Aufgabe: eine Größe in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilen und einen dieser gleichen Theile angeben. Wie oft, wie oftmal, mal kam gar nicht vor. Diese Vorstellungen erscheinen bei einer ganz andern Betrachtungsweise; wir können sie aber auch aus der bereits angestellten entwickeln, denn sie folgt daraus.

Wollen Kinder eine Zahl von Dingen, z. B. 15 Aepfel, in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in 3, theilen, so nehmen sie zuerst 3 Aepfel und legen sie getrennt von einander hin, dann abermals 3, zu jedem einen hinzufügend u. s. w., bis sie alle Aepfel in 3 gleiche Haufen vertheilt haben. Dann zählen sie einen derselben, und nun wissen sie, daß der dritte Theil der 15 Aepfel = 5 Aepfel ist. Da nun das Ganze aus den 3 gleichen Theilen besteht oder den 3 Dritteln gleich ist, so folgt, das 3 mal 5 das Ganze wieder erzeugt. Durch das Theilen ist also eine Zahl gefunden worden, welche so viel mal genommen, als der Divisor anzeigt, d. h. Einheiten hat, den Dividenden bildet. Man könnte daher, statt der obigen Begriffsbestimmung, das Dividiren auch so erklären: eine Größe dividiren heißt, eine andere suchen, die so viel mal genommen, als der Divisor Einheiten hat, die zu dividirende Größe oder eine ihr gleiche bildet, woraus denn das Resultat folgt, daß der Quotient dem Dividenden gleichartig und gleichnamig sein muß.

Aber wie findet man eine gesuchte Größe?

Doch immer nur dadurch, daß man von gegebenen ausgeht, um das Gesuchte aus Gegebenem zu entwickeln. Einen andern Weg gibt es nicht. Gegeben sind aber bei einer zu vollziehenden Division nur Dividend und Divisor. Also muß, um den Quotienten zu finden, entweder von dem Dividenden oder vom Divisor ausgegangen werden. Kinder pflegen, wie bekannt, von der zu theilenden Größe auszugehen, und man kann auch, wenn der Dividend eine reale Größe (nicht eine reine Zahl), der Divisor eine reine Zahl ist, gar nicht anders, weil die reale Größe das Ding ist, an welchem die Theilung vollzogen werden soll.

Anders aber ist die Sache, wenn eine reine Zahl in eine Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll, also beide gegebene Größen gleichartige, ja gleichnamige sind. Hier kann ich die Sache umkehren, vom Divisor ausgehen und fragen: wie ist der Dividend aus dem Divisor entstanden? wie erzeuge ich jenen aus diesem? wie viel mal werde ich diesen nehmen müssen, um jenen zu erhalten? — Nun wird also vom Divisor ausgegangen und derselbe zu sich selbst so

lange hinzugefügt, bis eine dem Dividenden gleiche Zahl entsteht. Der Dividend wird durch Wiederholung aus dem Divisor erzeugt, das Gleichartige aus dem Gleichartigen, und die Frage beantwortet, wie oft man eine gegebene Zahl nehmen müsse, um eine einer andern gegebenen gleiche zu bilden. Dieses zeigt der Quotient an, und er führt von dieser Bedeutung seinen Namen. Bei dieser Operation ist der Divisor der Ausgangspunkt, der Dividend das Ziel, das Addiren des Divisors zu sich selbst die zu wiederholende Handlung, das wie oftmalige Wiederholen dieser Handlung der Gegenstand der Beobachtung oder das Resultat der Aufmerksamkeit. Wie oft nun der Divisor zu sich selbst hinzugefügt oder genommen werden muß, so vielmal ist er in dem Dividenden enthalten. So werden wir auf den Begriff des Enthaltenseins geführt.

Wir können aber auch einen andern Weg einschlagen, nämlich ausgehen von dem Ziel oder dem Dividenden. Vorausgesetzt (wie in dem Beispiele 3 und 15), daß der Dividend größer ist als der Divisor, so kann man letzteren von ersterem wegnehmen, von dem Reste den Divisor abermals wegnehmen u. s. fort, bis der Dividend ganz zerstört, d. h. bis man auf Null gekommen ist. Zunächst findet man dadurch, wie oft der Divisor von dem Dividenden weggenommen (subtrahirt) werden kann, und man schließt umgekehrt, daß jener in diesem eben so vielmal enthalten sei, als er von ihm weggenommen werden konnte. Das wie oft malige Enthaltensein einer Zahl in einer andern wird also hier auf dem Wege der Subtraction gefunden, und in diesem Sinne, nämlich nach der Vorstellung des Enthaltenseins kann man sagen, daß die Division Subtraction sei oder auf dem Wege der Subtraction bewerkstelligt werde. Ganz allgemein gilt aber dieser Satz nicht, indem die Subtraction nur an gleichartigen Größen vollzogen werden kann. Hat man daher eine reale Größe in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, so kann man zunächst den Begriff der Subtraction nicht anwenden, oder man muß der Vorstellung eine andere Wendung geben.

Daß sich die beiden zuletzt beschriebenen Operationen umgekehrt zu einander verhalten, d. h. daß die eine die umgekehrte der andern sei, springt in die Augen. Zuerst erzeugten wir den Dividenden aus dem Divisor durch wiederholtes Zu-sich-selbst-setzen desselben von Null an, durch Addition; dann zerstörten wir den Dividenden durch wiederholtes Abziehen des Divisors, also durch Subtraction, bis zu Null. Der Ausgangspunkt dort war hier der Endpunkt, und das Ziel jener Operation war hier der Anknüpfungspunkt. Im ersten Falle verfuhr man synthetisch, im zweiten analytisch. Das Resultat beider Operationen war dasselbe: das Finden des Quotienten, der also anzeigt, wie oft eine Zahl genommen werden muß, um eine andre zu erhalten, und wie oft eine Zahl von einer andern weggenommen werden muß, um sie ganz zu zerstören, oder beides auf eine Vorstellung reducirt und in einen Ausdruck gebracht: wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist. Denn wie oft dies der Fall ist, eben so oft kann sie von ihm weggenommen, und eben so oft muß sie zu sich selbst addirt werden, um die andre zu bilden. Das Enthaltensein oder der Quotient im eigentlichen und ursprünglichen Wortsinne kann also immer auf zwei entgegengesetzten Wegen gefunden werden.

Nun können wir nach anschaulicher Auseinandersetzung der Begriffe des Theilens und des Enthaltenseins beide mit einander vergleichen. Halten wir uns an dem gebrauchten Zahlenbeispiel, um das Allgemeine aus dem Einzelnen zu gewinnen!

Das eine Mal fragen wir: welches ist der dritte Theil von fünfzehn? Das andere Mal: Wie oft ist drei in fünfzehn enthalten?

In jenem Falle erhalten wir zur Antwort: 5 = 5 mal eins: in diesem Falle: 5 mal. Mit andern Worten: der dritte Theil oder einer der 3 gleichen Theile von 15 ist 5 mal eins, und: 3 ist in 15 5mal enthalten, oder: 3 muß 5 mal genommen werden, um 15 zu erhalten d. h. 15 ist 5 mal 3.

Zusammengestellt: 1) $\frac{1}{3}$ von 15 ist = 5;
2) 5 mal 3 ist = 15 oder 15 = 5 × 3.

(5 × 3 = 15 und 15 = 5 × 3 bezeichnen den Unterschied und die Gleichheit des vorhin angedeuteten synthetischen und analytischen Verfahrens.)

Aus dem Ersten: $\frac{1}{3}$ von 15 ist 5, folgt, da das Ganze = 3 × $\frac{1}{3}$, daß 3 × 5 = 15 ist. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem zweiten, so finden

wir den Unterschied des Theilens und Enthaltenseins, den wir zu Anfang der fünften Stufe dieses Handbuches angegeben haben. Aus der vollzogenen Operation des Theilens folgt, daß

$$3 \times 5 = 15,$$

und aus der vollzogenen Operation des Enthaltenseins, daß

$$5 \times 3 = 15,$$

dort: daß der Dividend gleich ist dem Producte des Divisors in den Quotienten, hier: daß der Dividend gleich ist dem Producte des Quotienten in den Divisor.

Da nun die Größe des Products nicht abhängt von der Ordnung der Factoren, und beide, falls sie reine Zahlen sind, mit einander verwechselt werden können, also $3 \times 5 = 5 \times 3$ ist, so folgt unmittelbar aus der vollzogenen Operation des Theilens das Resultat des Enthaltenseins und umgekehrt. Weiß ich aus der Theilung, daß 5 der 3te Theil von 15 ist, so weiß ich damit auch, daß 5 in 15 3mal enthalten ist; und habe ich erkannt, daß 3 in 15 5mal enthalten ist, so ist mir auch bekannt, daß 3 der 5te Theil von 15. Das Eine ist also nicht das Andere, sondern das Eine folgt aus dem Andern. Beide Vorstellungen und Operationen dürfen daher auch nicht als identisch gesetzt, nicht mit einander verwechselt werden, obgleich beide zu einander in dem Wechselverhältniß des Grundes und der Folge stehen. Deßhalb werden die beiden Fragen:

welches ist der dritte Theil einer Zahl (z. B. von 15)?

der wie vielste Theil ist 3 von einer Zahl (z. B. von 15)?

immer zugleich beantwortet, so wie auch die beiden:

wie oft ist 3 in einer gewissen Zahl (z. B. in 15) enthalten?

welche Zahl ist in einer gewissen Zahl (z. B. in 15) 3mal enthalten?

Und von diesen 4 Fragen liegen immer je 3 in der 4ten, d. h. ist eine dieser 4 beantwortet, so folgt die Antwort auf die übrigen 3 unmittelbar daraus. Eben deßhalb kann man im Rechenunterricht, wenn Solches bequemer ist, die eine an die Stelle der andern setzen, derselben substituiren; aber es muß immer mit klarem Bewußtsein geschehen, und man muß darauf halten, daß Solches, wo es geschieht, von den Schülern angegeben werde. Sonst fehlt die Genauigkeit und Schärfe der Vorstellung und des Ausdrucks, wenn nicht gar Unklarheit und Verwirrung entsteht. Ich bitte die Lehrer, in dieser Beziehung auf sich und ihre Schüler aufmerksam zu sein, und sie werden finden, was ich in unzähligen Schulen und fast eben so vielen Rechenbüchern gefunden, daß das Eine von dem Andern nicht gehörig geschieden wird, sondern, oft nach reiner Willkühr und nicht selten zum Nachtheil der Kürze, durcheinander läuft.

Wenn ich nun sagte, daß mit der einen jener 4 Fragen die übrigen 3 zugleich beantwortet seien, so folgt daraus mit nichten (was theilweise schon angedeutet ist), daß es dem Belieben des Einzelnen überlassen sei, die eine an die Stelle der andern zu setzen, um nachher etwa auf die ursprünglich gegebene wieder zurückzukommen, sondern es hängt dieses zum Theil von der Natur der jedesmaligen Aufgabe ab. In manchen Fällen kann die Verwechselung geschehen, in andern nicht. Also herrscht hier zum Theil Freiheit, zum Theil Gebundenheit. Wir fragen daher: in welchen Fällen jene, in welchen diese?

Um diese Frage zu beantworten, stellen wir die verschiedenen Aufgaben auf, die Statt finden können, mit vorläufiger Nichtbeachtung der Brüche.

1) Der Divisor ist eine unbenannte Zahl und der Dividend ist eine unben. Zahl;
2) „ „ „ „ unbenannte „ „ „ „ „ „ ben. „
3) „ „ „ „ benannte „ „ „ „ „ „ unben. „
4) „ „ „ „ benannte „ „ „ „ „ „ ben. „

Einfache Beispiele, mit Voranstellung des Divisors:

1) 3 : 15; 2) 3 : 15 Thlr.; 3) 3 Thlr. : 15; 4) 3 Thlr. : 15 Thlr.

Zu 1.) Ist der Divisor 3, der Dividend 15, so kann ich fragen: welches ist der dritte Theil von 15? der wie vielste Theil ist 3 von 15? wie oft ist 3 in 15 enthalten? welche Zahl ist in 15 3mal enthalten:

Aus jeder richtigen Antwort auf eine dieser 4 Fragen folgt durch einen leichten Schluß die Beantwortung der übrigen. Weiß ich z. B., daß der 3te Theil von 15 = 5 ist, so folgt:

daß 3 der 5te Theil von 15 — daß 3 in 15 5mal und daß 5 in 15 3mal enthalten ist.

Sind also Divisor und Dividend unbenannte Zahlen, so kann man den Begriff des Theilens oder den des Enthaltenseins anwenden, und das Eine führt unmittelbar zu dem Andern.

Zu 2.) Ist der Divisor 3, der Dividend 15 Thlr., so kann ich zwar fragen: welches oder wie groß oder wie viel Thlr. sind der dritte Theil von 15 Thlr.? aber es kann nicht gefragt werden: wie oft ist 3 in 15 Thlr. enthalten? weil ungleichartige Dinge nicht in einander enthalten sind, da sie nicht aus einander entstehen können. Weiß ich, daß der 3te Theil von 15 Thlr. = 5 Thlr. ist, daß also 3 × 5 Thlr. = 15 Thlr., so folgt, daß 5 Thlr. in 15 Thlr. 3mal enthalten sind.

Ist also der Divisor eine unbenannte Zahl, der Dividend eine benannte, so kann auf diese Aufgabe ursprünglich nur der Begriff des Theilens angewandt werden. Das Enthaltensein der 5 Thlr. in 15 Thlr. folgt erst aus der Theilung.

Zu 3.) Ist der Divisor 3 Thlr., der Dividend 3, so kann diese Aufgabe zwar bei Aufstellung aller absoluten Möglichkeiten gegeben, aber sie kann nicht vollzogen werden, weil sie keinen Sinn enthält.

Also kann auf den Fall, wenn der Divisor eine benannte, der Dividend eine unbenannte Zahl ist, weder der Begriff des Theilens, noch der Begriff des Enthaltenseins angewandt werden, weil das Ganze eine bloße Form ist ohne allen Begriff.

Zu 4.) Ist der Divisor 3 Thlr., der Dividend 15 Thlr., so kann man ursprünglich nur fragen: wie oft sind 3 Thlr. in 15 Thlr. enthalten, denn es wird Niemand einfallen zu fragen: welches ist der 3 Thlr.-te Theil von 15 Thlr.? Weiß ich nun, daß 3 Thlr. in 15 Thlr. 5mal enthalten, also daß 5 × 3 Thlr. = 15 Thlr., so folgt, daß 3 Thlr. der fünfte Theil von 15 Thlr. sind.

Sind also Divisor und Dividend benannte Zahlen, so findet ursprünglich nur der Begriff des Enthaltenseins eine Anwendung.

Belieben und Willkühr finden also nur in dem Falle statt, wenn Divisor und Dividend unbenannte Zahlen sind; in den beiden andern Fällen herrscht Nothwendigkeit, und zwar muß man in dem Falle, wenn der Divisor allein eine unbenannte Zahl ist, den Begriff des Theilens, in dem Falle, wenn beide benannte Zahlen sind, den Begriff des Enthaltenseins anwenden. Hat man im zweiten Falle die Auflösung durch den Begriff des Theilens vollzogen, so folgert man auf das Enthaltensein des Quotienten; und hat man im dritten Falle den Quotienten durch den Begriff des Enthaltenseins gefunden, so schließt man, der wie vielste Theil der Divisor vom Dividenden sei. Setzt man aber ursprünglich in diesen beiden Fällen die Folgerungen statt der Vordersätze, aus welchen gefolgert worden, so hat man sich entweder eine unstatthafte Umkehrung der Aufgabe erlaubt, oder wenigstens die Angabe der Prämissen verschwiegen, was gleichfalls ein Fehler ist. In allen Fällen also nöthige man den Schüler, die Aufgabe so zu lösen, wie sie gestellt ist, oder wenigstens, falls er sich der Bequemlichkeit wegen eine Umkehrung erlaubt, verlange man die Angabe dieser Umstellung.

Zur Vollendung der Aufgabe, die wir uns gestellt haben, bleibt nun nichts mehr übrig, als das Vorhergehende auf Aufgaben mit Brüchen anzuwenden. Wir brauchen hier nur die Fälle aufzustellen, in welchen der Divisor ein Bruch ist, weil die Bruchdividenden keine neue Bestimmung liefern.

Die zu besprechenden Fälle sind, in Beispielen aufgestellt:

1) $\frac{3}{4}$: 15; 2) $\frac{3}{4}$: 15 Thlr.; 3) $\frac{3}{4}$ Thlr. : 15 Thlr.

Zu 1.) Ist der Divisor ein Bruch, so kann ich nicht fragen: welches ist der $\frac{3}{4}$te Theil von 15, weil sich Niemand dabei etwas denkt. Kommt dennoch das richtige Facit heraus, so hat man dieses nur dem, nach der Analogie richtigen Verfahren, nicht dem richtigen Gedanken zu verdanken. Denn was soll „der $\frac{3}{4}$te Theil" heißen? Etwa, was am nächsten liegt, 3mal der 5te

Theil, welches 9 wäre? Antwort: nein. Oder: 5mal der dritte Theil, welches 25 wäre? Hier ist das Resultat zwar richtig, aber bei $\frac{3}{5}$ denkt man sich zunächst nicht 5mal den 3ten Theil. Denn $\frac{3}{5}$ heißt entweder 3mal $\frac{1}{5}$ von 1, oder 1mal $\frac{1}{5}$ von 3. Weder aus der einen, noch aus der andern Ansicht wird die Vorstellung gewonnen, daß, „mit $\frac{3}{5}$ dividiren“ heiße: 5mal den dritten Theil nehmen. Folglich bleibt unmittelbar nur der Begriff des Enthaltenseins übrig. $\frac{3}{5}$ ist in 15 25mal enthalten, woraus denn folgt, daß $25 \times \frac{3}{5} = 15$. Und daraus folgt, daß $\frac{3}{5} \times 25 = 15$, d. h. daß 3mal der 5te Theil von 25 = 15. Man hätte daher bei der vorliegenden Aufgabe auch fragen können: von welcher Zahl ist 3mal der 5te Theil = 15; aber nur in Folge einer Umkehrung, indem man von dem gesuchten Quottienten ausginge. Dieses ist aber jederzeit eine Umkehrung. Will man diese zulassen, so kann also auf den Fall, wenn Divisor und Dividend unbenannte Zahlen sind, sowohl der Begriff des Enthaltenseins, als der Begriff des Theilens angewandt werden. Will man dieses aber nicht, so bleibt nur der Begriff des Enthaltenseins als ursprünglicher übrig. Denn wenn ich sage: mit $\frac{3}{5}$ in 15 theilen, heißt eine Zahl suchen, welche mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt 15 gibt, so habe ich die Divisionsaufgabe in eine Multiplicationsaufgabe verwandelt. Dagegen ist nichts zu erinnern; aber die Ausführung, auf die es hier aukommt, gebietet, wenn alles Rathen ausgeschlossen bleiben soll, die Rückkehr auf die Theilung oder das Enthaltensein.

Zu 2.) Wendet man auf den zweiten Fall den Begriff des Enthaltenseins an, so erkennt man leicht das Ungereimte dieses Versuchs. Es soll eine Zahl gefunden werden, die mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt 15 Thlr. gibt. Dies kann nur eine benannte Zahl sein, nämlich 25 Thlr. Aber $\frac{3}{5}$ 25 Thlr.-mal nehmen, ist Unsinn. Folglich müssen wir den Begriff des Theilens zu Hülfe nehmen, und die Aufgabe kann keinen andern Sinn haben, als den: von welcher Zahl ist 3mal der 5te Theil = 15 Thlr. Dem eigentlichen Sinn nach ist dieses eine Multiplicationsaufgabe, die aber auf eine Theilung zurückläuft.

Zu 3.) Bei der dritten Aufgabe stellt sich gleich der Begriff des Enthaltenseins ein. $\frac{3}{5}$ Thlr. ist in 15 Thlr. 25mal enthalten, folglich ist $25 \times \frac{3}{5}$ Thlr. = 15 Thlr., also auch $\frac{3}{5} \times 25$ Thlr. = 15 Thlr., weßhalb man auch, aber nur durch Schluß und Umkehrung, die Aufgabe auch so verstehen kann: der wie vielste Theil ist $\frac{3}{5}$ Thlr. von 25 Thlr. Ursprünglich gilt also hier nur der Begriff des Enthaltenseins.

Das Resultat der Division mit Brüchen stimmt also im Wesentlichen mit dem Resultate der Division mit ganzen Zahlen überein.

Sechste Uebung.

Die Behandlung der Brüche in der Verwandlung höherer und niederer Einheiten in den vier Grundrechnungsarten mit angewandten Zahlen, und in der (sogenannten) Multiplications- und Divisions-Regel-de-Tri.

Vorbemerkung. Die 4 Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen, welche in den fünf ersten Stufen dieser Anleitung behandelt worden sind, haben bereits in der sechsten, siebenten und achten Stufe ihre Anwendung auf die Verwandlung höherer und niederer Einheiten in niedere und höhere, und auf die Behandlung benannter ganzer Zahlen gefunden. In diesen Uebungen konnte zwar nicht überall das Erscheinen von Brüchen vermieden werden; es war dies aber auch nicht unsere Absicht. Denn im Leben selbst scheiden sich die

Gegenstände nicht so streng von einander; auch scheint es oft wohlgethan, Manches voraus zu nehmen, wenn die Kraft des Schülers daran reicht, und gewissermaßen die Ahnung des in der Zukunft erst in seiner Ganzheit Erscheinenden durch einzelne Andeutungen zu erwecken. Auf solche Weise nähert sich der Unterricht dem Gange jeder organischen Entwickelung und erreicht dadurch den wichtigen Zweck, theils für den künftigen umfassenderen, Alles in's Klare setzenden Unterricht gehörig vorzubereiten, theils auch durch Anregung, aber nicht volle Befriedigung des Wissenstriebes die Lernlust stets rege zu erhalten, und zugleich den Schüler für die rein geistige und sittliche Freude empfänglich zu machen, welche in der Befriedigung des Wissenstriebes, falls derselbe die Stärke eines wirklichen Bedürfnisses erreicht hat, jeder Zeit gefunden wird.

Nunmehr aber, nach Beendigung der Lehre von den Brüchen, können in die, in der Ueberschrift dieser Uebung genannten Aufgaben auch Brüche aufgenommen werden, um ihre vollständige Behandlung zu zeigen. Zwar ist dadurch eine Trennung dieser Gegenstände herbeigeführt worden, indem jetzt z. B. dasjenige erst vollendet und ergänzt wird, was oben begonnen worden ist. Allein wir beabsichtigen ja auch hier gar nicht wissenschaftliche Aufstellungen, sondern wir ordnen den Stoff unserem Hauptzwecke: Bildung der Geisteskraft durch den Zahlunterricht und Anbildung der Fertigkeit in der Behandlung derselben, unter. Darum meinen wir, bedürfe die vorgenommene Zerspaltung der, in anderer Hinsicht, wegen ihrer Gleichartigkeit, zusammengehörigen Gegenstände weder hier, noch an irgend einer andern Stelle einer besondern Rechtfertigung, vielmehr möchte, außer den angegebenen, noch aus andern wichtigen pädagogischen Gründen, die Behandlung eines Theils eines Ganzen und die spätere Rückkehr zu demselben, sehr zu empfehlen sein, indem dadurch die, das Interesse der Schüler erhaltende Mannigfaltigkeit und zugleich, ohne alle andere Veranstaltung, von selbst die Gelegenheit zu Wiederholung des früher Geübten herbeigeführt wird.

Uebrigens können wir uns, eben weil Manches zu dem Folgenden Gehörige früher schon vorweggenommen ist, hier kurz fassen.

A. Das Auflösen (Resolviren) benannter Bruchzahlen.

I. Mündlich.

§. 115. **Verwandlung der Theile einer höheren Sorte in die nächste oder entfernte niedere Sorte.**

Beispiel 1. $^4/_5$ Thlr., wie viel Sgr.?

$^4/_5$ Thlr. ist sowohl = 4 mal $^1/_5$ von 1 Thlr., als = $^1/_5$ von 4 Thlr. Daraus fließen zwei Auflösungsweisen.

Auflösung 1. 1 Thlr. = 30 Sgr.; $^1/_5$ Thlr. also = $^1/_5$ von 30 Sgr. = $^{30}/_5$ Sgr.; $^4/_5$ Thlr. also $4 \times {}^{30}/_5$ Sgr. = 24 Sgr.

Auflösung 2. 1 Thlr. = 30 Sgr., 4 Thlr. also = 4×30 Sgr., folglich $^4/_5$ Thlr. = $\frac{4 \times 30}{5}$ Sgr. = $^{120}/_5$ Sgr. = 24 Sgr.

Regel. Um Theile einer höheren Sorte in einer niederen Sorte auszudrücken, theilt man die Zahl, welche die Anzahl der Theile einer Einheit der höheren Sorte in der niederen angibt, (die Resolutionszahl) mit dem Nenner des Bruches, und vervielfacht den Quotienten mit dem Zähler; oder man vervielfacht zuerst die Resolutionszahl mit dem Zähler, und theilt dieses Product durch den Nenner des Bruches.

Aufgaben.

$^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$, $^6/_5$, $2^1/_5$, $6^4/_5$ Thlr. — wie viel Sgr? (Antw. 6, 12, 18 Sgr. u. s. w.

$^1/_{10}$, $^3/_{10}$, $^4/_{10}$, $^7/_{10}$, $1^3/_{10}$, $5^7/_{10}$ Thlr. — wie viel Sgr? (Antw. 3, 9, 12 Sgr. u. s. w.)

$^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$, $1^3/_8$, $10^2/_8$ Pfd. — wie viel Loth? (Antw. 4, 12, 20 Loth u. s. w.)

$^1/_4$, $^3/_4$, $3^1/_4$, $10^3/_4$, $50^3/_4$ Loth, wie viel Quentchen? (Antw. 1, 3, 13 Quentchen u. s. w.)

u. s. w.

Diese Aufgaben sind so gewählt, daß bei der Resolution der Brüche nicht wieder neue Brüche entstehen. Dieses ist bei folgender Aufgabe der Fall.

Beispiel 2 $^4/_7$ Thlr., wie viel Sgr. und Pfennige? (A. 17 Sgr. $1^5/_7$ Pf.)

Auflösung. $^1/_7$ Thlr. = $^{30}/_7$ Sgr. = $4^2/_7$ Sgr.; $^4/_7$ Thlr. also sind $4 \times 4^2/_7$ Sgr. = $17^1/_7$ Sgr.; $^1/_7$ Sgr. = $^{12}/_7$ Pf. = $1^5/_7$ Pf.; also sind $^4/_7$ Thlr. = 17 Sgr. $1^5/_7$ Pf.

Regel. Entsteht bei der Auflösung der Theile einer höheren Einheit in niedere Einheiten ein Bruch, so löset man denselben, wo möglich, auf dieselbe Weise, wie die Theile der höheren Einheit in noch niedrigere Einheiten auf.

Anmerkung. Eine andere Auflösung entsteht, wenn man $^4/_7$ Thlr. als $^1/_7$ von 4 Thlr. betrachtet.

Aufgaben.

$^1/_4$, $^3/_4$, $8^1/_4$ Thlr., wie viel Sgr. und Pf.? Antw. 7 Sgr. 6 Pf., 22 Sgr. 6 Pf., 247 Sgr. 6 Pf.

$^1/_9$, $^2/_9$, $^7/_9$, $3^8/_9$ Thlr. wie viel Sgr. und Pf.? (Antw. 3 Sgr. 4 Pf., 6 Sgr. 8 Pf., 23 Sgr. 4 Pf., 116 Sgr. 8 Pf.)

$^1/_3$, $^2/_3$, $^4/_3$, $20^2/_3$ Pfd., wie viel Loth und Quentchen? (Antw. 10 L. $2^2/_3$ Qt., 21 L. $1^1/_3$ Qt., 42 L. $2^2/_3$ Qt., 661 L. $1^1/_3$ Qt.)

$^1/_3$, $^2/_3$, $4^1/_3$ Dukaten, wie viel Thlr., Sgr. und Pf. wenn 1 Duk. = 3 Thlr. 5 Sgr.? (Antw. 1 Thlr. 1 Sgr. 8 Pf., 2 Thlr. 3 Sgr. 4 Pf., 13 Thlr. 21 Sgr. 8 Pf.)

II. Schriftlich.

§. 116. Schriftliches Verfahren.

Dasselbe ist dem der Vervielfachung ganzer Zahlen mit Brüchen ganz gleich.

Beispiel 1. $^{22}/_{27}$ Ctnr., wie viel Pfd.? (A. 89 Pfd. 20 L. $^{16}/_{27}$ Qt.)

Ansatz und Ausrechnung:

a. $^{22}/_{27}$ Ctnr. = $\frac{22 \times 110}{27}$ Pfd.

```
      22
     110
    ----
     220
     22
    ----
27 | 2420 | 89 Pfd.
   | 216  |
    ----
     260
     243
    ----
    17/27
```

b. $^{17}/_{27}$ Pfd = $\frac{17 \times 32}{27}$ Loth.

```
      17
      32
    ----
      34
     51
    ----
27 | 544 | 20 Loth.
   | 54  |
    ----
    4/27
```

c. $^4/_{27}$ Loth = $\frac{4 \times 4}{27}$ Quentchen.
= $^{16}/_{27}$ Quentchen.

In a. wurden die Centnertheile in Pfd., in b. die Pfundtheile in Loth, in c. die Loththeile in Quentchen verwandelt.

Beispiel 2. $\frac{48}{59}$ Jahr, wie viel Monate, Wochen und Tage? (Antw. 9 M. 3 W. $\frac{21}{59}$ T.)

Ansatz und Berechnung:

$\frac{48 \times 12}{59}$ Monate.

```
      48
      12
    ----
      96
     48
    ----
59 | 576 | 9 Monate.
   | 531 |
    ----
      45
       4
    ----
59 | 180 | 3 Wochen.
   | 177 |
    ----
       3
       7
    ----
    21/59 Tage.
```

Die Ausrechnung ist für sich klar. Hätten die $\frac{21}{59}$ Tage in Stunden, Minuten rc. ausgedrückt werden sollen, so hätte man mit 24 vervielfachen müssen:

$\frac{21 \times 24}{59}$

```
       21
       24
     ----
       84
      42
     ----
59 |  504 | 8 Stunden.
   |  472 |
     ----
       32
       60
     ----
59 | 1920 | 32 32/59 Min.
   |  177 |
     ----
      150
      118
     ----
       32 u. s. w.
```

B. Das Zurückführen (Reduciren) benannter Zahlen in Brüchen.

I. Mündlich.

§. 117. Das mündliche Verfahren.

Hier gibt es mehrere Fälle; entweder ist die zu reducirende Zahl einheitlich oder aus mehreren Einheiten gemischt — entweder soll eine Zahl auf die nächst höhere, oder auf die entfernte höhere reducirt werden. Diese verschiedenen Fälle sollen durch Beispiele erläutert werden.

Beispiel 1. 11 Pf., wie viel Sgr. und wie viel Thlr.? (Antw. $\frac{11}{12}$ Sgr.; $\frac{11}{360}$ Thlr.)

Auflösung. 1 Sgr. = 12 Pf.; 1 Thlr. = 30 × 12 = 360 Pf.; also ist 1 Pf. = $\frac{1}{12}$ Sgr. = $\frac{1}{360}$ Thlr.; also 11 Pf. = $\frac{11}{12}$ Sgr. = $\frac{11}{360}$ Thlr.

Beispiel 2. 47 Pf., wie viel Sgr. und wie viel Thlr.? (Antw. $3\frac{11}{12}$ Sgr.; $\frac{47}{360}$ Thlr.)

Auflösung. 12 Pf. = 1 Sgr.; also 1 Pf. = $\frac{1}{12}$ Sgr., 47 Pf. = $\frac{47}{12}$ = $3\frac{11}{12}$ Sgr.; 1 Pf. = $\frac{1}{360}$ Thlr., also 47 Pf. = $\frac{47}{360}$ Thlr.

Beispiel 3. 68 Bogen, wie viel Buch? (Antw. $2\frac{5}{6}$ Buch.)

Auflösung. 1 Buch = 24 Bogen; 68 Bogen = 2 × 24 + 20 Bogen = 2 Buch + 20 Bogen; 1 Bogen = $\frac{1}{24}$ Buch, 20 Bogen = $\frac{20}{24}$ = $\frac{5}{6}$ Buch; also sind 68 Bogen = $2\frac{5}{6}$ Buch.

Beispiel 4. 1 Pfd. 10 Loth, wie viel Ctnr.? (Antw. $^{21}/_{1760}$ Ctnr.)

Auflösung. 1 Ctnr. = 110 Pfd.; 1 Pfd. = $^{1}/_{110}$ Ctnr.; 1 Ctnr. = 110 × 32 = 3520 Loth; also ist 1 Loth = $^{1}/_{3520}$ Ctnr.; 10 L. = $^{10}/_{3520}$ Ctnr.; folglich 1 Pfd. 10 L. = $^{1}/_{110}$ Ctnr. + $^{10}/_{3520}$ Ctnr. = $\frac{32 + 10}{3520}$ = $^{42}/_{3520}$ Ctnr. = $^{21}/_{1760}$ Ctnr.

Auflösung 2. 1 Pfd. 10 Loth = 42 Loth; 1 Loth = $^{1}/_{3520}$ Ctnr.; 42 Loth also = $^{42}/_{3520}$ = $^{21}/_{1760}$ Ctnr.

Beispiel 5. 3 Stunden 20 Minuten 2 Sekunden — wie viel Tag? (Antw. $^{6001}/_{43200}$ Tag.)

Auflösung. 1 Stunde = 60 Minuten, 3 Stunden = 3 × 60 = 180 Minuten; 180 Min. + 20 Min. = 200 Min.; 1 Min. = 60 Sek.; 200 Min. = 200 × 60 = 12000 Sek.; 12000 + 2 = 12002 Sek. 1 Tag = 24 Stunden = 24 × 60 Min. = 24 × 3600 Sek. = 86400 Sekunden; also ist 1 Sek. = $^{1}/_{86400}$ Tag; 12002 Sek. also $^{12002}/_{86400}$ = $^{6001}/_{43200}$ Tag.

Beispiel 6. $7^1/_3$ Pf. wie viel Sgr.? (Antw. $^{11}/_{18}$ Sgr.)

Auflösung. $7^1/_3$ Pf. = $^{22}/_3$ Pf.; $^1/_3$ Pf. = $^1/_{36}$ Sgr.; $^{22}/_3$ Pf. also = $^{22}/_{36}$ Sgr. = $^{11}/_{18}$ Sgr.

Anmerkung. Die aus den Auflösungen dieser Aufgaben zu entwickelnden Regeln springen in die Augen, wenn man ihre Aufstellung für nöthig erachten sollte.

Aufgaben.

$10^3/_4$, $15^4/_5$, $18^3/_7$, $20^3/_8$ Pf., wie viel Sgr.? (Antw. $^{43}/_{48}$, $1^{19}/_{60}$, $1^{45}/_{84}$, $1^{67}/_{96}$ Sgr.)

6 Sgr. 5 Pf., 10 Sgr. 3 Pf., 36 Sgr. 2 Pf. ꝛc. — wie viel Thlr.? Antw. $^{77}/_{360}$, $^{123}/_{360}$, $1^{37}/_{180}$.)

150 Pfd., 200 Pfd., 360 Pfd. ꝛc. — wie viel Ctnr.? (Antw. $1^4/_{11}$, $1^9/_{11}$, $3^3/_{11}$ Ctnr.)

7 Pfd. 5 Loth, 20 Pfd. 9 Loth ꝛc. — wie viel Ctnr.? (Antw. $^{229}/_{3520}$, $^{649}/_{3520}$ Ctnr.)

Mehr dergleichen Aufgaben!

II. Schriftlich.

§. 118. Das schriftliche Verfahren.

Beispiel 1. 1874 Bogen, wie viel Buch? (Antw. $78^1/_{12}$ Buch.)

Ansatz und Ausrechnung:

1874 Bogen = $^{1874}/_{24}$ Buch.

```
24 | 1874 | 78 1/12 Buch.
   | 168  |
   ------
     194
     192
   ------
     2/24 = 1/12.
```

Beispiel 2. 70439 Loth, wie viel Ctnr.? (Antw. $20^{39}/_{3520}$ Ctnr.)

Ansatz und Ausrechnung:

$\frac{70439}{110 \times 32} = \frac{70439}{3520}$ Ctnr.

```
3520 | 70439 | 20 Ctnr.
     | 70400 |
     -------
       39/3520.
```

Beispiel 3. 46 Pfd. 17 Loth 3 Quentchen, wie viel Ctnr? (Antw. $\frac{5959}{14080}$ Ctnr.)

Ansatz und Ausrechnung:

46 Pfd. 17 Loth 3 Qt.	1 Ctnr. = 110 Pfd.
× 32	× 32
109	220
138	33
1489 Loth	3520 Loth
× 4	× 4
5959 Qt. $\frac{5959}{14080}$ Ctnr.	14080 Qt.

Die Pfd., Loth und Qt. sind in Quentchen, 1 Ctnr. ist ebenfalls in Quentchen verwandelt worden. Jene, 5959 Qt., bilden den Zähler, diese, 14080 Qt., den Nenner des gesuchten Bruches.

Beispiel 4. 59 Wochen, 15 Tage, 20 Stunden, 15 Minuten, wie viel Theile vom Jahr? (Antw. $1\frac{2043}{11680}$ J.)

Ansatz und Ausrechnung:

59 Wochen 15 T. $20\frac{1}{4}$ St.	365 Tage
× 7	× 24
428	1460
× 24	730
1732	8760
856	× 4
10292	35040 Viertelst.
× 4	
41169 Viertelst.	$\frac{41169}{35040} = 1\frac{2043}{11680}$ Jahr.

Die Wochen ꝛc. sind in Viertelstunden ausgedrückt, das Jahr ebenfalls.

C. Das Auflösen und Zurückführen oder die Verwandlung gleichartiger, aber ungleich benannter Einheiten.

Vorbemerkung. In der sechsten Stufe sind schon einige der hier vorkommenden Aufgaben berechnet worden. Da aber bei denselben in der Regel Brüche vorkommen, so gehören sie eigentlich hierher. Ihre Auflösung erfordert in der Regel Reduciren und Resolviren zugleich, wie aus nachfolgenden Beispielen erhellen wird.

II. Mündlich.

§. 119. Ansicht des Gegenstandes und Behandlung desselben.

In den hier zu behandelnden Aufgaben ist eine gewisse Menge einer Geldsorte, eines Gewichts ꝛc. gegeben; man verlangt zu wissen, wie viel diese Menge in einer andern Geldsorte, in einem andern Gewichte ꝛc. beträgt; es sollen z. B. Silbergroschen in gute Groschen, kölnische Thlr. in preußische, Thlr. in Gulden ꝛc. verwandelt werden. Die Auflösungsweise wird aus folgenden Beispielen erhellen.

Beispiel 1. 12 gute Groschen (Ggr.), wie viel Silbergroschen? (Antw. 15 Sgr.)

Auflösung. 24 Ggr. = 30 Sgr.; also ist 1 Ggr. = $^{30}/_{24}$ = $^{5}/_{4}$ = $1^{1}/_{4}$ Sgr.; folglich 12 Ggr. = 12 × $1^{1}/_{4}$ = 15 Sgr.

Beispiel 2. 20 Sgr., wie viel Ggr.? (Antw. 16 Ggr.)

Auflösung. 30 Sgr. = 24 Ggr., also 1 Sgr. = $^{24}/_{30}$ Ggr. = $^{4}/_{5}$ Ggr.; folglich 20 Sgr. = 20 × $^{4}/_{5}$ = $^{80}/_{5}$ = 16 Ggr.

Beispiel. 3. 24 Gulden (Fl.), wie viel preuß. Thlr.? (Antw. $13^{5}/_{7}$ Thlr.). 1 Fl. = $^{4}/_{7}$ Thlr. = $17^{1}/_{7}$ Sgr.

Auflösung. 1 Fl. = $^{4}/_{7}$ Thlr.; 24 Fl. = 24 × $^{4}/_{7}$ = $^{96}/_{7}$ = $13^{5}/_{7}$ Thlr. Oder: 1 Fl. = $17^{1}/_{7}$ Sgr.; 24 Fl. = 24 × $17^{1}/_{7}$ = $411^{3}/_{7}$ Sgr.; 1 Thlr. = 30 Sgr.; 30 Sgr. sind in $411^{3}/_{7}$ Sgr. oder in $^{2880}/_{7}$ Sgr. $^{2880}/_{210}$mal oder $^{96}/_{7}$ = $13^{5}/_{7}$mal enthalten.

Beispiel 4. 25 Fl., wie viel köln. Thlr.? (Antw. $16^{2}/_{3}$ Thlr.)

Auflösung. 1 Fl. = $^{2}/_{3}$ köln. Thlr.; 25 Fl. also = 25 × $^{2}/_{3}$ Thlr. = $^{50}/_{3}$ = $16^{2}/_{3}$ Thlr.

Beispiel 5. $10^{1}/_{2}$ Speciesthlr., wie viel preuß. Thlr.? (Antw. 14 preuß. Thlr.) 1 Spc. = 32 Ggr.

Auflösung. 1 Spc. = 32 Ggr., $10^{1}/_{2}$ Spc. = $10^{1}/_{2}$ × 32 Ggr. = 336 Ggr.; 24 ist in 336 $^{336}/_{24}$ = 14mal enthalten; also sind $10^{1}/_{2}$ Spc. = 14 preuß. Thlr.

Beispiel 6. 10 Thlr. 5 Sgr., wie viel Fl.? (Antw. $17^{3}/_{7}$ Fl.)

Auflösung. 10 Thlr. 5 Sgr. = 305 Sgr.; 1 Fl. = $17^{1}/_{2}$ Sgr. $17^{1}/_{2}$ Sgr. sind in 305 Sgr. so oft enthalten, wie 35 in 610, d. h. $17^{3}/_{7}$ mal; also sind 10 Thlr. 5 Sgr. = $17^{3}/_{7}$ Fl.

Beispiel 7. 12 Dukaten (à 3 Thlr. 5 Sgr.), wie viel Friedrichsd'or (à $5^{1}/_{2}$ Thlr.)? (Antw. $6^{10}/_{11}$ Friedrichsd'or oder 6 Friedrichsd'or + 5 Thlr.)

Auflösung. 1 Duk. = $3^{1}/_{6}$ Thlr. also 12 Duk. = 12 × $3^{1}/_{6}$ = 38 Thlr.; $5^{1}/_{2}$ oder $^{11}/_{2}$ Thlr. sind in $^{76}/_{2}$ Thlr. $6^{10}/_{11}$ mal enthalten; also sind 12 Duk. = $6^{10}/_{11}$ Friedrichsd'or.

Sollen nun die $^{10}/_{11}$ Friedrichsd'or noch in Thlr. verwandelt werden, so fährt man fort:

1 Frd'or. = $5^{1}/_{2}$ Thlr., also $^{10}/_{11}$ Frd'or. = $^{10}/_{11}$ × $5^{1}/_{2}$ = $^{10}/_{11}$ × $^{11}/_{2}$ = 5 Thlr.

Beispiel 8. 24 köln. Ellen, wie viel brabanter? (Antw. 20 brab. Ellen.)

Auflösung. 6 köln. Ellen = 5 brab., also 1 köln. Elle = $^{5}/_{6}$ brab.; folglich 24 köln. = 24 × $^{5}/_{6}$ = 4 × 5 = 20 brab.

Beispiel 9. 29 brab. Ellen, wie viel köln.? (Antw. $34^{4}/_{5}$ köln. Ellen.)

Auflösung. 1 brab. Elle = $1^{1}/_{5}$ köln. Ellen; also 29 brab. = 29 × $1^{1}/_{5}$ köln. = 29 + $5^{4}/_{5}$ = $34^{4}/_{5}$ köln. Ellen.

Mehr dergleichen Aufgaben, aufgegeben von dem Lehrer und den Schülern! Wir wollen noch einige zur mündlichen Berechnung hersetzen. In der Regel eignen sich die meisten dieser Aufgaben, welche im Leben vorkommen, mehr zur schriftlichen Behandlung.

Aufgaben.

1) Jemand empfängt 17 Rthlr. 23 Ggr.; wie viel macht's in Thalern und Silbergroschen? (Antw. 17 Thlr. $28^{3}/_{4}$ Sgr.)

2) Ein Anderer nimmt 100 Sgr. ein; wie viel Ggr. sind's? (Antw. 80 Ggr. = 3 Thlr. 8 Ggr.)
3) 52 Sgr. — 31 Ggr. sind wie viel Ggr.? (Antw. $10^3/_5$ Ggr.)
4) 49 Ggr. — 49 Sgr., wie viel Sgr.? (Antw. $12^1/_4$ Sgr. = 12 Sgr. 3 Pf.)
5) 20 Ggr. + 20 Sgr., wie viel Thlr.? (Antw. 1 Thlr. 15 Sgr.)
6) 1 Thlr. 7 Ggr. + 4 Thlr. 18 Sgr., wie viel Thlr., Sgr. und Pf.? (Antw. 5 Thlr. 26 Sgr. 9 Pf.)

II. Schriftlich.

§. 120. Schriftliches Verfahren.

Beispiel 1. 364 Thlr., wie viel Fl.? (Antw. 637 Fl.)

Ansatz und Ausrechnung:

```
                364
               × 30
              -----
              10920
  17¹/₇        × 7
  -----       -----
   120  |    76440  | 637
              72
             ----
              44
              36
             ----
              84
              84
             ----
              ::
```

1 Thlr. = 30 Sgr., 364 Thlr. = 364×30 Sgr. = $\frac{364 \times 30 \times 7}{7}$ Sgr. = $^{76440}/_7$ Sgr.; 1 Fl. = $17^1/_7$ Sgr. = $^{120}/_7$ Sgr.; $^{120}/_7$ in $^{76440}/_7$ 637 mal; also sind 364 Thlr. = 637 Fl.

Regel. Man multiplicirt die gegebene Zahl einer Sorte mit der Reductionszahl, und theilt das Product durch die Reductionszahl der gesuchten Sorte; der Quotient ist die gesuchte Zahl.

Beispiel 2. 1004 Thlr. 26 Sgr., wie viel Fl. und Kreuzer? (Antw. 1758 Fl. 31 Kr.)

Ansatz und Ausrechnung:

```
  17¹/₇        1004 Thlr. 26 Sgr.
  -----          × 30
   120         ------
               30146
                 × 7
  120  |     211022  | 1758 Fl. 31 Kreuzer.
              12
             ----
              91
              84
             ----
              70
              60
             ----
             102
              96
             ----
```

$^{62}/_{120} = ^{31}/_{60}$ Fl. = $^{31}/_{60} \times 60$ Kr. = 31 Kr.

Beispiel 3. 875 Dukaten (à 3 Thlr. 7 Sgr.), wie viel Friedrichsd'or (à 5 Thlr. 18 Sgr.)? (Antw. 505 Fr. 1 Thlr. 5 Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung:

3 Thlr. 7 Sgr. = 1 Duk.
× 30
97
× 875
485
679
776
168 | 84875 | 505 Fr. 1 Thlr. 5 Sgr.
840
875
840
$^{35}/_{168}$ = $^{5}/_{24}$ Fr. = $^{5}/_{24}$ × 168 Sgr. = $^{840}/_{24}$ = 35 Sgr.
= 1 Thlr. 5 Sgr.

5 Thlr. 18 Sgr.
× 30
168

Beispiel 4. Wie viel Reichsthaler sind 413 Rubel, wenn 1 Rubel = $^{5}/_{14}$ Dukaten, 1 Duk. = $2^{5}/_{6}$ Thlr. sächs., und 1 Thlr. sächs. = $1^{1}/_{20}$ Thlr. preuß. ist? (Antw. 438 Thlr. 24 Sgr. $4^{1}/_{2}$ Pf.)

Ansatz und Ausrechnung:

413 Rub. = 413 × $^{5}/_{14}$ Duk.
= $\frac{413 \times 5}{14}$
= $\frac{59 \times 5}{2}$
= $^{295}/_{2}$
= $147^{1}/_{2}$ Duk.

$148^{1}/_{2}$ Duk. = $147^{1}/_{2}$ × $2^{5}/_{6}$ Thlr. sächs.
$^{295}/_{2}$ × $^{17}/_{6}$
295
× 17
2065
295
12 | 5015 | $417^{11}/_{12}$ Thlr. s.
48
21
12
95
84
11

$417^{11}/_{12}$ Thlr. sächs. = $417^{11}/_{12}$ × $1^{1}/_{20}$ Thlr. preuß.
845
417
$^{5015}/_{12}$ × $^{21}/_{20}$ = $^{5015}/_{4}$ × $^{7}/_{20}$ = $^{1003}/_{4}$ × $^{7}/_{4}$ = $^{7021}/_{16}$ Thlr. preuß.

16 | 7021 | 438 Thlr.
64
62
48
141
128
13
× 30 Sgr.
390

16 | 390 | 24 Sgr.
32
70
64
6
× 12 Pf.
16 | 72 | $4\frac{1}{2}$ Pf.
64
$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Zuerst wurden die Rubel in Dukaten, die gefundenen Dukaten in sächsische Thaler, und diese in preuß. Thaler verwandelt. Die Lehrer wissen, daß dergleichen Aufgaben gewöhnlich nach der sogenannten Kettenregel berechnet werden. Allein jeder bis hieher geführte Schüler kann diese Aufgaben auflösen. Es möchte daher für manche Schüler, welche nicht bis zur Einübung der eigentlichen Kettenregel gelangen, gerathen sein, mehrere solcher Aufgaben hier dem Schüler vorzulegen, was dem Lehrer überlassen bleibt.

D. Das Zusammenzählen ungleichbenannter Zahlen in Brüchen.

Anmerkung. Die Mehrzahl der hierher gehörigen Uebungen eignet sich mehr für das schriftliche, als für das mündliche Rechnen. Will man letzteres gebrauchen, so darf man nicht zu große Zahlen wählen.

I. Mündlich.

§. 121. Mündliche Behandlung der Aufgaben.

Beispiel 1. $16\frac{1}{2}$ Sgr. + $19\frac{3}{4}$ Sgr., wie viel zusammen? (Antw. 1 Thlr. $6\frac{1}{4}$ Sgr.)

Auflösung. 16 + 19 = 35 Sgr. = 1 Thlr. 5 Sgr.; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ Sgr. = $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ Sgr.; 1 Thlr. 5 Sgr. + $1\frac{1}{4}$ Sgr. = 1 Thlr. $6\frac{1}{4}$ Sgr.

Beispiel 2. $24\frac{3}{4}$ Loth + 1 Pfund $16\frac{5}{8}$ Loth, wie viel zusammen? (Antw. 2 Pfd. 9 L. $1\frac{1}{2}$ Qt.)

Auflösung. $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$ Loth; 24 + 16 + $1\frac{3}{8}$ Loth = $41\frac{3}{8}$ Loth = 1 Pfd. 9 Loth + $\frac{3}{8}$ Loth = 1 Pfund 9 Loth $1\frac{1}{2}$ Quentchen.

Regel. Man bringt die Brüche auf gleiche Benennung, addirt sie nun, die Summe der ganzen zu den gleichartigen Ganzen, und verwandelt sie in höhere Einheiten.

Beispiel 3. 4 Thlr. $7\frac{5}{6}$ Sgr. + 15 Thlr. $16\frac{3}{8}$ Sgr., wie viel zusammen? (Antw. 19 Thlr. 24 Sgr. $2\frac{1}{2}$ Pf.)

Auflösung. 4 Thlr. + 15 Thlr. = 19 Thlr.; 7 Sgr. + 16 Sgr. = 23 Sgr.; $\frac{5}{6}$ Sgr. + $\frac{3}{8}$ Sgr. = $\frac{20}{24} + \frac{9}{24} = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$ Sgr.; 23 Sgr. + $1\frac{5}{24} = 24\frac{5}{24}$ Sgr.; also sind 4 Thlr. $7\frac{5}{6}$ Sgr. + 15 Thlr. $16\frac{3}{8}$ Sgr. = 19 Thlr. $24\frac{5}{24}$ Sgr. = 19 Thlr. 24 Sgr. $2\frac{1}{2}$ Pf.

Mehr dergleichen Aufgaben!

II. Schriftlich.

§. 122. Schriftliches Verfahren.

Man schreibt die gleichnamigen Größen unter einander, fängt das Zusammenzählen bei der niedrigsten Sorte und zwar bei den

Brüchen an, indem man diese zuerst gleichnamig macht, verwandelt die niedere Sorte in die höhere u. s. w.

Ansatz und Berechnung:

Beispiel 1.	7 Thlr.	$15\frac{3}{4}$	Sgr.	(21)	$6 \times 3 = 18$
	19 »	$4\frac{1}{2}$	»		$12 \times 1 = 12$
	124 »	$16\frac{5}{8}$	»		$3 \times 5 = 15$
	99	$12\frac{1}{3}$	»		$8 \times 1 = 8$
	—	$26\frac{5}{6}$	»		$4 \times 5 = 20$
		(3)			
Summe:	251 Thlr.	$16\frac{1}{24}$	Sgr.		$\frac{73}{24} = 3\frac{1}{24}$ Sgr.

Beispiel 2. 97 Ctnr. $8\frac{3}{4}$ Pfd., 12 Ctnr. 27 Pfd. 18 Loth, 104 Ctnr. $94\frac{11}{16}$ Pfd., $18\frac{4}{55}$ Ctnr., $12\frac{3}{4}$ Pfd., $15\frac{3}{4}$ Loth, 36 Ctnr. 19 Loth 3 Quentchen sollen zusammengezählt werden.

Hier verwandelt man zuerst die Bruchtheile Centner in Pfund, die Bruchtheile Pfund in Loth, die Bruchtheile Loth in Quentchen.

Ansatz und Berechnung:

97	Ctnr.	8	Pfd.	24	Loth		
12	»	27	»	18	»		
104	»	94	»	22	»		
18	»	8	»	—	»		
—	»	12	»	24	»		
—	»	—	»	15	»	3	Quent.
36	»	—	»	19	»	3	»
268	Ctnr.	42	Pfd.	27	Loth	2	Quent.

Beispiel 3. 9 Thlr. 16 Sgr., 104 Thlr. 7 Sgr. 3 Pf., 12 Thlr. 27 Sgr. 10 Pf., 109 Thlr. 21 Sgr. 8 Pf., 18 Sgr. 1 Pf. zusammenzuzählen. (Antw. 237 Thlr. 10 Pf.)

Ansatz und Berechnung geschehen wie vorher. Man kann aber auch die niederen Sorten in Brüchen höherer Sorten ausdrücken.

Ansatz und Berechnung:

$9\frac{16}{30}$	Thlr.		
$104\frac{7}{30}$	»	$\frac{3}{12}$	Sgr.
$12\frac{27}{30}$	»	$\frac{10}{12}$	»
$109\frac{21}{30}$	»	$\frac{8}{12}$	»
$\frac{18}{30}$	»	$\frac{1}{12}$	»

Summe: $236\frac{29}{30}$ Thlr. $1\frac{10}{12}$ Sgr. = 237 Thlr. 10 Pf.

Beispiel 4. Zusammengesetzte Aufgabe. Jemand kauft 4 Kisten Waaren, schwer: $416\frac{7}{8}$ Pfd., $893\frac{2}{3}$ Pfd., $512\frac{2}{5}$ Pfd., $814\frac{5}{6}$ Pfd.; jedes Pfd. kostet $1\frac{2}{3}$ Thlr. Er verkauft das Pfd zu $1\frac{7}{8}$ Thlr. Die Waare in der vierten Kiste ist aber so beschädigt, daß er $224\frac{3}{4}$ Pfd. zu 1 Thlr. 5 Sgr. verkaufen muß. Wie viel beträgt der Gewinn überhaupt? Wie groß ist der Verlust, den er durch die Beschädigung der Waare erleidet, wenn derselbe nach dem Einkaufspreise, und wenn derselbe nach dem Verkaufspreise berechnet wird? (Antw. 390 Thlr. $10\frac{5}{32}$ Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung:

$416\frac{7}{8}$ Pfd.	$15 \times 7 = 105$
$893\frac{2}{3}$ »	$40 \times 2 = 80$
$512\frac{2}{5}$ »	$24 \times 2 = 48$
$814\frac{5}{6}$ »	$20 \times 5 = 100$
a. $2637\frac{31}{40}$ »	$\frac{333}{120} = \frac{111}{40} = 2\frac{31}{40}$ Pfd. (Hauptnenner 120)

$2637\frac{31}{40} \times 1\frac{7}{8}$ Thlr.

$\frac{105511}{40} \times \frac{15}{8}$

$105511 \times 15 = 527555 + 105511 = 1582665$; $40 \times 8 = 320$

b. $1582665 : 320 = 4945$ Thlr. $24\frac{27}{32}$ Sgr.

1582665 − 1280 = 302; 302 − 288 = 146; 146 − 128 = 186; 186 − 160 = 265

$265 \times 30 = 7950$; $7950 : 320 = 24\frac{27}{32}$

7950 − 640 = 1550; 1550 − 1280 = 270; $\frac{270}{320} = \frac{27}{32}$

c. $224\frac{3}{4} \times$ (1 Thlr. $26\frac{1}{4}$ Sgr. — 1 Thlr. 5 Sgr. =) $21\frac{1}{4}$ Sgr.

$224\frac{3}{4} \times 21\frac{1}{4}$ Sgr.

$\frac{899}{4} \times \frac{85}{4}$

$899 \times 85 = 4495 + 7192 = 76415$

$76415 : 16 = 4775$; $4775 : 30 = 159$ Thlr. $5\frac{15}{16}$ Sgr.

76415 − 64 = 124; 124 − 112 = 121; 121 − 112 = 95; 95 − 80 = $\frac{15}{16}$

4775 − 3 = 17; 17 − 15 = 27; 27 − 27 = 5

d. 4945 Thlr. $24\frac{27}{32}$ Sgr.
159 » $5\frac{15}{16}$ »
4786 Thlr. $18\frac{29}{32}$ Sgr.

e. $224\frac{3}{4} \times$ (1 Thlr. 20 Sgr. — 1 Thlr. 5 Sgr. =) 15 Sgr.

$224\frac{3}{4} \times 15$ Sgr.

$\frac{899}{4} \times 15$ Sgr. $= \frac{899}{4} \times \frac{1}{2}$ Thlr.

$= \frac{899}{8}$ Thlr. $= 112\frac{3}{8}$ Thlr.

f. $2637\frac{31}{40} \times 1\frac{2}{3}$ Thlr.

$\frac{105511}{40} \times \frac{5}{3}$

105511
5

120 | 527555 | 4396 Thlr. $8\frac{3}{4}$ Sgr.
48

47
36

115
108

75
72

35
30

120 | 1050 | $8\frac{3}{4}$ Sgr.
96

$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

g. 4786 Thlr. $18\frac{29}{32}$ Sgr.
4396 » $8\frac{3}{4}$ »

390 Thlr. $10\frac{5}{32}$ Sgr.

a. Die Summe aller Pfunde; b. die einzunehmende Summe, ohne Beschädigung der Waare; c. der Verlust nach dem Verkaufspreise; d. die wirkliche Verkaufssumme; e. der Verlust nach dem Einkaufspreise; f. der Einkaufspreis; g. der Gewinn.

E. Das Abziehen ungleichbenannter Zahlen in Brüchen.

I. Mündlich.

§. 123. Das mündliche Verfahren in Beispielen.

Beispiel 1. Wie viel bleibt übrig, wenn man von 25 Thlr. 7 Sgr. wegnimmt: 19 Thlr. $17\frac{4}{5}$ Sgr.? (Antw. 5 Thlr. $19\frac{1}{5}$ Sgr.)

Auflösung. Um $17\frac{4}{5}$ Sgr. abziehen zu können, nehme ich von den 25 Thlr. einen Thlr. = 30 Sgr. zu den 7 Sgr. hinzu; 30 Sgr. + 7 Sgr. = 37 Sgr.; 37 Sgr. — $17\frac{4}{5}$ Sgr. = $19\frac{1}{5}$ Sgr.; 19 Thlr. von 24 Thlr. bleiben 5 Thlr.; also sind 25 Thlr. 7 Sgr. — 19 Thlr. $17\frac{4}{5}$ Sgr. = 5 Thlr. $19\frac{1}{5}$ Sgr.

Oder man zieht $17\frac{4}{5}$ Sgr. von 1 Thlr. = 30 Sgr. ab, Rest $12\frac{1}{5}$ Sgr.; $12\frac{1}{5}$ Sgr. + 7 = $19\frac{1}{5}$ Sgr. u. s. w.

Beispiel 2. 39 Thlr. $18\frac{3}{5}$ Sgr. — 20 Thlr. $10\frac{3}{4}$ Sgr., was bleibt? (Antw. 19 Thlr. $7\frac{17}{20}$ Sgr.)

Auflösung. 39 — 20 Thlr. = 19 Thlr.; $18\frac{3}{5}$ Sgr. — $10\frac{3}{4}$ Sgr. = $18\frac{12}{20} - 10\frac{15}{20} = 17\frac{32}{20} - 10\frac{15}{20} = 7\frac{17}{20}$; also sind 39 Thlr. $18\frac{3}{5}$ Sgr. — 20 Thlr. $10\frac{3}{4}$ Sgr. = 19 Thlr. $7\frac{17}{20}$ Sgr.

Beispiel 3. 16 Ctnr. 46$^3/_8$ Pfd. — 9 Ctnr. 8 Pfd. 15$^2/_7$ Loth, was bleibt übrig? (Antw. 7 Ctnr. 37 Pfd. 28$^5/_7$ Loth.)

Auflösung. 16 Ctnr. — 9 Ctnr. = 7 Ctnr.; 46$^3/_8$ Pfd. — 8 Pfd. = 38$^3/_8$ Pfd. = 38 Pfd. + 12 Loth = 37 Pfd. + 44 Loth; 37 Pfd. 44 Loth — 15$^2/_7$ Loth = 37 Pfd. 28$^5/_7$ Loth; also ist 16 Ctnr. 46$^3/_8$ Pfd. — 9 Ctnr. 8 Pfd. 15$^2/_7$ Loth = 7 Ctnr. 37 Pfd. 28$^5/_7$ Loth.

Mehr dergleichen Aufgaben!

Man kann auch in Reihenfolgen üben lassen. Z. B.

50 Thlr. 6$^1/_2$ Sgr. — 3 Thlr. 4$^3/_4$ Sgr. = 47 Thlr. 1$^3/_4$ Sgr.
47 Thlr. 1$^3/_4$ Sgr. — 3 Thlr. 4$^3/_4$ Sgr. = 43 Thlr. 27 Sgr.
43 Thlr. 27 Sgr. — 3 Thlr. 4$^3/_4$ Sgr. = u. s. w.

Oder abwechselnd abziehen und zusammenzählen. Z. B.

100 Thlr. 15$^3/_4$ Sgr. — 2 Thlr. 18$^3/_8$ Sgr. = 97 Thlr. 27$^3/_8$ Sgr.
97 Thlr. 27$^3/_8$ Sgr. + 1 Thlr. 16$^1/_2$ Sgr. ꝛc.

1) Jemand gibt von 16 Thlr. 14 Sgr. 7$^2/_5$ Pf. aus: 8 Thlr. 10 Sgr. 9$^7/_{10}$ Pf.; wie viel behält er übrig? (Antw. 8 Thlr. 3 Sgr. 9$^7/_{10}$ Pf.)
2) Jemand hat 16 Thlr. 15$^3/_8$ Sgr.; davon gibt er eine Woche lang täglich 1$^{17}/_{20}$ Thlr. aus; wie viel hat er nun noch? (Antw. 3 Thlr. 16$^7/_8$ Sgr.)
3) Jemand nimmt ein: 7 Thlr. 14$^1/_2$ Sgr., 8 Thlr. 20$^3/_4$ Sgr. und 4$^5/_8$ Sgr., und gibt aus: 8$^7/_{12}$ Sgr. und 1 Thlr. 5$^3/_4$ Sgr.; wie viel bleibt ihm noch übrig? (Antw. 14 Thlr. 25$^{13}/_{24}$ Sgr.)
4) Wie viel muß man zu 24 Sgr. 10 Pf. hinzuthun, um 1$^7/_{12}$ Thlr. zu erhalten? (Antw. 22 Sgr. 8 Pf.)
5) Von 12$^7/_8$ Pfd, werden 7 Pfd. 4$^1/_2$ Loth verkauft; wie viel bleibt übrig? (Antw. 5 Pfd. 23$^1/_2$ Loth.)
6) Ein Schüler hatte 6$^3/_4$ Buch Papier, wovon er 3 Buch 21$^1/_2$ Bogen verbraucht; wie viel Bogen hat er nun noch? (Antw. 2 Buch 20$^1/_2$ Bogen.)
7) Ein Landwirth verkaufte 20 Schafe, à 3 Thlr. 5$^3/_8$ Sgr., und kauft 7 Schweine à 6 Thlr. 20 Sgr. 3 Pf.; wie viel Geld behielt er noch übrig? (Antw. 16 Thlr. 25$^3/_4$ Sgr.)
8) Wie groß ist der Unterschied von 10$^3/_5$ Ctnr. und 1 Ctnr. 87 Pfd. 9$^3/_4$ Loth? (Antw. 8 Ctnr. 88 Pfd. 22 Loth 1 Quent.)

Mehr dergleichen Aufgaben!

II. Schriftlich:

§. 124. Das schriftliche Verfahren.

Beispiel 1. Wie viel hat derjenige ausgegeben, welcher von 100 Thlr. 27$^3/_4$ Sgr. noch 72 Thlr. 29 Sgr. 8$^3/_4$ Pf. übrig hat? (Antw. 27 Thlr. 28 Sgr. $^1/_4$ Pf.)

Ansatz und Ausrechnung:

100 Thlr.	27 Sgr.	9	Pf.
72 »	29 »	8$^3/_4$	»
27 Thlr.	28 Sgr.	$^1/_4$	Pf.

Beispiel 2. Von 309 Ctnr. 14 Pfd. $18\frac{2}{3}$ Loth werden verkauft: 37 Ctnr. 97 Pfd. $15\frac{5}{8}$ Loth; wie viel bleiben übrig? (Antw. 271 Ctnr. 27 Pfd. $3\frac{1}{24}$ Loth.)

Ansatz und Ausrechnung:

309	Ctnr.	14 (110)	Pfd.	$18\frac{2}{3}$ (24)	Loth	|	16
37	»	97	»	$15\frac{5}{8}$	»	|	15
271	Ctnr.	27	Pfd.	$3\frac{1}{24}$	Loth	|	$\frac{1}{24}$

Beispiel 3. (Zusammengesetzte Aufgabe.) Jemand besitzt 1009 Thlr. $15\frac{3}{4}$ Sgr.; davon gibt er aus: 118 Thlr. 17 Sgr. 3 Pf., $40\frac{7}{10}$ Thlr., 64 Thlr. $9\frac{1}{2}$ Sgr., 408 Thlr. 19 Sgr. $10\frac{3}{4}$ Pf.; wie viel bleibt ihm übrig? (Antw. 377 Thlr. 8 Sgr. $1\frac{1}{4}$ Pf.)

Ansatz und Ausrechnung:

	118	Thlr.	17	Sgr.	3	Pf.
	40	»	21	»	—	»
	64	»	9	»	6	»
	408	»	19	»	$10\frac{3}{4}$	»
Ausgabe =	632	Thlr.	7	Sgr.	$7\frac{3}{4}$	»
Besitz =	1009	Thlr.	15	Sgr.	9	Pf.
Ausgabe =	632	»	7	»	$7\frac{3}{4}$	»
Rest =	377	Thlr.	8	Sgr.	$1\frac{1}{4}$	Pf.

Beispiel 4. Jemand war 1648 den 13. April Abends $9\frac{3}{4}$ Uhr geboren, und lebte 87 Jahre 5 Monate 7 Tage $11\frac{4}{5}$ Stunden. Wann ist er gestorben, und wie viel Zeit war schon damals seit 1700 den 31. Januar Abends 9 Uhr 50 Minuten verflossen?

Ansatz und Ausrechnung:

1648	Jahre	3	Monate	12	Tage	$21\frac{3}{4}$	Stunden	=	$\frac{15}{20}$
87	»	5	»	7	»	$11\frac{4}{5}$	»	=	$\frac{16}{20}$
1735	Jahre	8	Monate	20	Tage	$9\frac{11}{20}$	»	=	$\frac{11}{20}$

Er starb also 1735 den 21. Sept. Morgens 33 Minuten nach 9 Uhr.

1735	J.	8	M.	20	T.	9	St.	33	Min.
1700	»	0	»	30	»	21	»	50	»

Verflossen: 35 J. 7 M. 20 T. 11 St. 43 Min.

F. Das Vervielfachen ungleich benannter Zahlen in Brüchen.

I. Mündlich.

§. 125. Das mündliche Verfahren.

Beispiel 1. Wie viel Thlr. erhält man, wenn man 16 Sgr. $3\frac{3}{8}$ mal nimmt? (Antw. 1 Thlr. 24 Sgr.)

Auflösung 1. $16 \times 3 + 16 \times \frac{3}{8}$; $16 \times 3 = 48$; $16 \times \frac{3}{8} = 2 \times 3 = 6$; $48 + 6 = 54$ Sgr. = 1 Thlr. 24 Sgr.

Auflösung 2. $16 \times 3\frac{3}{8} = 16 \times \frac{27}{8} = \frac{16}{8} \times 27 = 2 \times 27 = 54$ Sgr. = 1 Thlr. 24 Sgr.

Beispiel 2. Wie viel Pfund und Loth erhält man, wenn man $17\frac{3}{5}$ Loth $2\frac{3}{4}$ mal nimmt? (Antw. 1 Pfd. $16\frac{2}{5}$ Loth.)

Auflösung. $17\frac{3}{5} \times 2\frac{3}{4} = \frac{88}{5} \times \frac{11}{4} = \frac{22}{5} \times 11 = \frac{242}{5} = 48\frac{2}{5}$ Loth = 1 Pfd. $16\frac{2}{5}$ Loth.

Beispiel 3. Wie viel kommt heraus, wenn man 8 Rthlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr. $\frac{2}{3}$ mal nimmt? (Antw. 5 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf.)

Auflösung. 8 Thlr. $\times \frac{2}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ Thlr. = 5 Thlr. 10 Sgr.; 12 Sgr. $\times \frac{2}{3} = 8$ Sgr.; 5 Thlr. 10 Sgr. + 8 Sgr. = 5 Thlr. 18 Sgr.; $\frac{3}{4}$ Sgr. $\times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Sgr.; 5 Thlr. 18 Sgr. + $\frac{1}{2}$ Sgr. = 5 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf.; also sind 8 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr. $\frac{2}{3}$ mal genommen = 5 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf.

Oder: $\frac{2}{3} \times 8$ Thlr. $= \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ Thlr.; $12\frac{3}{4}$ Sgr. $= \frac{51}{4}$ Sgr.; $\frac{2}{3} \times \frac{51}{4}$ Sgr. $= \frac{1}{3} \times \frac{51}{2} = \frac{51}{6} = 8\frac{1}{2}$ Sgr.; $\frac{1}{3}$ Thlr. oder 10 Sgr. + $8\frac{1}{2}$ Sgr. = 18 Sgr. 6 Pf.; also sind $\frac{2}{3}$ mal 8 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr. = 5 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf.

Beispiel 4. Welches Product kommt heraus, wenn man 20 Pfd. $7\frac{3}{8}$ Loth $1\frac{3}{4}$ mal nimmt? (Antw. 35 Pfd. $12\frac{29}{32}$ Loth.)

Auflösung. $1\frac{3}{4} \times 20$ Pfd. = 20 Pfd. + 15 Pfd. = 35 Pfd.; $1\frac{3}{4} \times 7\frac{3}{8}$ Loth $= \frac{7}{4} \times \frac{59}{8} = \frac{413}{32} = 12\frac{29}{32}$ Loth; also sind 20 Pfd. $7\frac{3}{8}$ Loth $1\frac{3}{4}$ mal genommen 35 Pfd. $12\frac{29}{32}$ Loth.

Beispiel 5. $60\frac{2}{3}$ Pfd., $8\frac{4}{15}$ mal genommen, gibt welches Product? (Antw. $501\frac{23}{45}$ Pfd.)

Auflösung. $8 \times 60 = 480$ Pfd.; $8 \times \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$ Pfd.; 480 + $5\frac{1}{3}$ Pfd. $= 485\frac{1}{3}$ Pfd.; $\frac{4}{15} \times 60$ Pfd. $= 4 \times 4 = 16$ Pfd.; $485\frac{1}{3}$ Pfd. + 16 Pfd. $= 501\frac{1}{3}$ Pfd.; $\frac{4}{15} \times \frac{2}{3}$ Pfd. $= \frac{8}{45}$ Pfd.; $501\frac{1}{3} + \frac{8}{45}$ Pfd. $= 501\frac{15}{45} + \frac{8}{45} = 501 + \frac{23}{45}$ Pfd. Wollte man die beiden mit einander zu vervielfachenden Brüche einrichten und dann mit einander vervielfachen, so hätte man $\frac{182}{3}$ und $\frac{124}{15}$ mit einander zu vervielfachen, welches aber mündlich einige Schwierigkeiten hat.

Mehr Beispiele!

Auch Reihenfolgen, z. B. $1\frac{1}{2}$ Qt. $\frac{2}{3}$ mal $= \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ Qt.;

$\frac{2}{3} \times 1$ Quent. $= \frac{2}{3}$ Quent.;
$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ Quent. $= \frac{4}{9}$ Quent.;
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{9}$ Quent. $= \frac{8}{27}$ Quent. u. s. w.

Oder: $\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{2}$ Pf. $= \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ Pf.;
$1\frac{1}{4} \times 1\frac{7}{8}$ Pf. $= \frac{5}{4} \times \frac{15}{8} = \frac{75}{32} = 2\frac{11}{32}$ Pf.;
$1\frac{3}{4} \times 2\frac{11}{32}$ Pf. = ꝛc.

II. Schriftlich.

§. 126. Das schriftliche Verfahren.

Beispiel 1. Vervielfache $16\frac{2}{3}$ Thlr. mit $5\frac{4}{11}$! (Antw. 89 Thlr. 11 Sgr. $9\frac{9}{11}$ Pf.)

Ansatz und Berechnung:

$5\frac{4}{11} \times 16\frac{2}{3}$ Thlr. = $\frac{59}{11} \times \frac{50}{3}$ Thlr.

59
× 50
33 | 2950 | 89 Thlr. 11 Sgr. $9\frac{9}{11}$ Pf.
| 264 |
310
297
13
× 30 Sgr.
33 | 390 | 11 Sgr.
| 33 |
60
33
27
× 12 Pf.
54
27
33 | 324 | $9\frac{9}{11}$ Pf.
| 297 |
$\frac{27}{33} = \frac{9}{11}$.

Beispiel 2. Vervielfache 924 Thlr. $12\frac{3}{5}$ Sgr. mit $8\frac{2}{21}$! (Antw. 7483 Thlr. 12 Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung:

924 Thlr. $12\frac{3}{5}$ Sgr. × $8\frac{2}{21}$.
924 Thlr. $\frac{63}{5}$ Sgr. × $\frac{170}{21}$.

924
170
64680
924
21 | 157080 | 7480 Thlr.
| 147 |
100
84
168
168
0

63
170
4410
63
105 | 10710 | 102 Sgr. = 3 Thlr. 12 Sgr.
| 105 |
210
210
===

7480 Thlr.
3 Thlr. 12 Sgr.
Summe 7483 Thlr. 12 Sgr.

Man kann auch die 924 Thlr. $12\frac{3}{5}$ Sgr. in lauter 5tel Sgr. verwandeln:

```
      924 Thlr. 12⅗ Sgr.
       × 30
      27732
        × 5
     138663 × 170/21
         170
    9706410
   138663
                     5             30
21 | 23572710 | 1122510 | 224502 | 7483 Thlr. 12 Sgr.
     21         10          21
     25         12          14
     21         10          12
     47         22          25
     42         20          24
      52        25          10
      42        25           9
     107        10          12 Sgr.
     105        10
      21
      21
       0
```

Beispiel 3. 73 Ctnr. 26 Pfd. 4⅗ Loth × 5/9? (Antw. 40 Ctnr. 75 Pfd. 20⅓ Loth.)

Entweder multiplicirt man hier jeden Theil der zu vervielfachenden Zahl mit 5/9, oder man bringt Alles auf 5tel Loth und multiplicirt nun mit dem Zähler 5; dadurch erhält man, wegen des Divisors 9, 45stel Loth; man muß daher zuerst mit 45 dividiren, um Loth zu erhalten, die dann in Pfd. und Ctnr. verwandelt werden. Wir wählen die letztere Verfahrungsweise. Die Rechnung sieht so aus:

```
 73 Ctnr. 26 Pfd. 4⅗ Loth × 5/9         32          110
× 110                  45 | 6444915 | 143220 | 4475 | 40 Ctr.
   756                        45        128      440
   73                         194       152     75 Pfd.
  8056                        180       128
  × 32                        144       242    Product: 40 Ctnr.
 16116                        135       224      75 Pfd. 20⅓ L.
 24168                         99       180
257796                         90       160
   × 5                          91      20 Loth.
1288983                         90
   × 5                         15/45 = ⅓ Loth.
6444915
```

G. Das Theilen gleich und ungleich benannter Zahlen in Brüchen.

I. Mündlich.

§. 127. Das mündliche Verfahren.

Beispiel 1. Wie oft sind 4 Sgr. in 1 Thlr. 17 Sgr. enthalten? (Antw. $11\frac{3}{4}$ mal.)

Auflösung. 1 Thlr. 17 Sgr. = 30 + 17 = 47 Sgr.; 4 Sgr. sind in 47 Sgr. $\frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$ mal enthalten.

Beispiel 2. Wie oft sind 3 Thlr. 18 Sgr. in 28 Sgr. enthalten? (Antw. $\frac{7}{27}$ mal.)

Auflösung. 3 Thlr. 18 Sgr. = 108 Sgr.; 108 Sgr. sind in 28 Sgr. $\frac{28}{108} = \frac{7}{27}$ mal enthalten.

Beispiel 3. Wie oft sind $2\frac{3}{4}$ Pfd. in 36 Pfd. enthalten? (Antw. $13\frac{1}{11}$ mal.)

Auflösung. $2\frac{3}{4}$ Pfd. = $\frac{11}{4}$ Pfd.; 36 Pfd. = $\frac{36 \times 4}{4} = \frac{144}{4}$; $\frac{11}{4}$ sind in $\frac{144}{4}$ so oft enthalten, wie 11 in 144; 11 ist in 144 $13\frac{1}{11}$ mal enthalten.
Oder: $\frac{11}{4} : 36 = \frac{4}{11} \times 36 = \frac{144}{11} = 13\frac{1}{11}$.

Beispiel 4. Wie oft sind 7 Loth in $18\frac{2}{5}$ Loth enthalten? (Antw. $2\frac{22}{35}$ mal.)

Auflösung. $18\frac{2}{5}$ L. = $\frac{92}{5}$ L.; 7 ist in $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{35}$ mal, folglich in $\frac{92}{5} = \frac{92}{35}$ mal oder $2\frac{22}{35}$ mal enthalten.

Beispiel 5. Wie oft sind $2\frac{3}{5}$ Pfd. in $3\frac{7}{10}$ Ctnr. enthalten? (Antw. $156\frac{7}{13}$ mal.)

Auflösung. $2\frac{3}{5}$ Pfd. = $\frac{13}{5}$ Pfd.; $3\frac{7}{10}$ Ctnr. = $3\frac{7}{10} \times 110$ Pfd. = 330 + 7 . 11 = 330 + 77 = 407 Pfd.; 407 Pfd. = $\frac{407 \,.\, 5}{5} = \frac{2035}{5}$ Pfd.; $\frac{13}{5}$ Pfd. sind in $\frac{2035}{5}$ Pfd. $\frac{2035}{13}$ oder $156\frac{7}{13}$ mal enthalten.

Beispiel 6. Wie oft sind $7\frac{2}{3}$ Sgr. in 38 Sgr. $5\frac{1}{2}$ Pf. enthalten? (Antw. $5\frac{3}{184}$ mal enthalten.)

Auflösung. $7\frac{2}{3}$ Sgr. = $7\frac{2}{3} \times 12$ Pf. = 84 + 8 = 92 Pf. = $\frac{184}{2}$ Pf.; 38 Sgr. $5\frac{1}{2}$ Pf. = 38 . 12 + $5\frac{1}{2}$ Pf. = 456 + $5\frac{1}{2}$ = $461\frac{1}{2} = \frac{923}{2}$ Pf.; $\frac{184}{2}$ Pf. sind in $\frac{923}{2}$ Pf. $\frac{923}{184}$ = $5\frac{3}{184}$ mal enthalten; folglich rc.

Beispiel 7. Wie oft sind $\frac{7}{9}$ Pfd. in $\frac{4}{5}$ Pfd. enthalten? (Antw. $1\frac{1}{35}$ mal.)

Auflösung. Neuntel und Fünftel kommen in 45steln zusammen; $\frac{1}{9} = \frac{5}{45}$, $\frac{7}{9} = \frac{35}{45}$; $\frac{1}{5} = \frac{9}{45}$, $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$; $\frac{35}{45}$ sind in $\frac{36}{45}$ $\frac{36}{35}$ oder $1\frac{1}{35}$ mal enthalten; also rc.

Beispiel 8. In 12 Sgr. 10 Pf. sind wie oft $\frac{7}{8}$ Sgr. enthalten? (Antw. $14\frac{2}{3}$ mal.)

Auflösung. 10 Pf. = $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ Sgr.; Sechstel und Achtel kommen in 24steln zusammen; $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$; $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$; $12\frac{20}{24}$ = 288 + 20 = $\frac{308}{24}$; $\frac{21}{24}$ sind in $\frac{308}{24}$ $\frac{308}{21} = 14\frac{2}{3}$ mal enthalten; folglich rc.

Beispiel 9. Welches ist der 9te Theil von 3 Thlr. 25 Sgr.? (Antw. $12\frac{7}{9}$ Sgr.)

Auflösung. 3 Thlr. 25 Sgr. = $3 \times 30 + 25 = 115$ Sgr.; $\frac{1}{9}$ von 115 Sgr. = $12\frac{7}{9}$ Sgr.

Oder: $\frac{1}{9}$ von 3 Thlr. = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ Thlr. = 10 Sgr.; $\frac{1}{9}$ von 25 Sgr. = $\frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$ Sgr.; 10 Sgr. + $2\frac{7}{9}$ Sgr. = $12\frac{7}{9}$ Sgr.; folglich rc.

Beispiel 10. Welches ist der 12te Theil von 100 Ctnr.? (Antw. 8 Ctnr. 36 Pfd. 21 Loth $1\frac{1}{3}$ Qt.)

Auflösung. $\frac{1}{12}$ von 100 Ctnr. sind $8\frac{1}{3}$ Ctnr. = 8 Ctnr. $36\frac{2}{3}$ Pfd. = 8 Ctnr. 36 Pfd. $21\frac{1}{3}$ Loth = 8 Ctnr. 36 Pfd. 21 Loth $1\frac{1}{3}$ Quentchen.

Beispiel 11. Was kommt heraus, wenn man 29 Ctnr. durch $\frac{3}{4}$ theilt? (Antw. $38\frac{2}{3}$ Ctnr.)

Auflösung. 29 Ctnr. durch $\frac{3}{4}$ theilen, heißt, untersuchen, von welcher Zahl 29 Ctnr. 3 mal der 4te Theil sind; diese Zahl muß derjenigen Theile also 4 haben, deren 29 Ctnr. 3 haben; deßhalb muß man 29 Ctnr. durch 3 theilen und den Quotienten mit 4 vervielfachen; $\frac{29}{3}$ Ctnr. = $9\frac{2}{3}$ Ctnr.; $9\frac{2}{3}$ Ctnr. $\times 4$ = $36 + \frac{8}{3} = 38\frac{2}{3}$ Ctnr.; folglich sind 29 Ctnr., durch $\frac{3}{4}$ getheilt = $38\frac{2}{3}$ Ctnr.

Oder: 29 Ctnr. durch $\frac{3}{4}$ theilen, heißt, 29 Ctnr. mit $\frac{4}{3}$ vervielfachen; also haben wir zu nehmen $\frac{4}{3}$ mal 29 Ctnr. = $4 \times 9\frac{2}{3} = 38\frac{2}{3}$ Ctnr.

Oder: 29 Ctnr. durch 3 getheilt, gibt $\frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$ Ctnr. Nun ist aber durch eine 4 mal so große Zahl getheilt worden, als es hätte geschehen sollen; folglich ist ein 4 mal so kleines Product entstanden, als hätte entstehen sollen; die gesuchte Zahl ist also $4 \times 9\frac{2}{3} = 38\frac{2}{3}$ Ctnr.

Beispiel 12. Theilet 9 Pfd. 10 Loth durch $4\frac{2}{3}$! (Antw. 1 Pfd. 31 Loth $3\frac{3}{7}$ Qt.)

Auflösung. 9 Pfd. 10 L. = $9 \times 32 + 10 = 288 + 10$ = 298 L. = $\frac{298 \times 3}{3}$ = $\frac{894}{3}$ Loth; $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$; $\frac{14}{3}$ in $\frac{894}{3}$ = 14 in 894 = $63\frac{6}{7}$; also sind 9 Pfd. 10 Loth, durch $4\frac{2}{3}$ getheilt, = $63\frac{6}{7}$ Loth = 1 Pfd. 31 Loth $3\frac{3}{7}$ Quentchen.

Beispiel 13. Theilet 3 Pfd. 8 Loth in 12 gleiche Theile! (Antw. 8 Loth $2\frac{2}{3}$ Quentchen.)

Auflösung. $\frac{1}{12}$ von 3 Pfd. = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ Pfd. = 8 Loth; $\frac{1}{12}$ von 8 Loth = $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Loth; 8 Loth + $\frac{2}{3}$ Loth = $8\frac{2}{3}$ L.; also ist $\frac{1}{12}$ von 3 Pfd. 8 Loth = $8\frac{2}{3}$ Loth = 8 Loth $2\frac{2}{2}$ Qt.

Oder: 3 Pfd. 8 Loth = $3 \times 32 + 8$ = 104 Loth; $\frac{1}{12}$ von 104 Loth ist = $\frac{104}{12} = 8\frac{8}{12} = 8\frac{2}{3}$ Loth.

Beispiel 14. 24 Sgr. 11 Pf. in 9 gleiche Theile zu theilen! (Antw. 2 Sgr. $9\frac{2}{9}$ Pf.)

Auflösung. $\frac{1}{9}$ von 24 Sgr. = $\frac{24}{9} = 2\frac{6}{9} = 2\frac{2}{3}$ Sgr. = 2 Sgr. 8 Pf.; $\frac{1}{9}$ von 11 Pf. = $\frac{11}{9}$ Pf. = $1\frac{2}{9}$ Pf.; 2 Sgr. 8 Pf. + $1\frac{2}{9}$ Pf. = 2 Sgr. $9\frac{2}{9}$ Pf.

Oder: 24 Sgr. 11 Pf. = 24 × 12 + 11 = 288 + 11 = 299 Pf.; $\frac{1}{9}$ von 299 Pf. = $\frac{299}{9}$ = $33\frac{2}{9}$ Pf. = 2 Sgr. $9\frac{2}{9}$ Pf.

Beispiel 15. Theilet 16 Pfd. 15 Loth durch $\frac{5}{7}$! (Antw. 23 Pfd. 1 Loth $3\frac{1}{5}$ Quentchen.)

Auflösung. 16 Pfd. 15 L. durch $\frac{5}{7}$ theilen, heißt, diese Menge durch 5 theilen und den Quotienten durch 7 vervielfachen. 16 Pfd. getheilt durch 5 ist = 3 Pfd. mit einem Reste von 1 Pfd. = 32 Loth, welche mit 15 Loth vereinigt, 47 Loth ausmachen; $\frac{1}{5}$ von 47 Loth = $9\frac{2}{5}$ Loth; $\frac{1}{5}$ von 16 Pfd. 15 Loth ist also 3 Pfd. $9\frac{2}{5}$ Loth; diese 7 mal genommen gibt 21 Pfd. $65\frac{4}{5}$ Loth = 23 Pfd. 1 Loth $3\frac{1}{5}$ Quentchen.

Beispiel 16. Theile 21 Thlr. 4 Sgr. durch $8\frac{2}{3}$! (Antw. 2 Thlr. 13 Sgr. $1\frac{11}{13}$ Pf.)

Auflösung. $8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}$; 21 Thlr. 4 Sgr. = 21 × 30 + 4 = 630 + 4 = 634 Sgr.; diese müssen also mit 26 getheilt und der Quotient mit 3 vervielfacht werden; $\frac{1}{26}$ von 634 Sgr. = 24 Sgr. mit dem Reste 10 Sgr.; diese zu Pf. gemacht, gibt 120 Pf.; $\frac{1}{26}$ von 120 Pf. = $4\frac{16}{26}$ = $4\frac{8}{13}$ Pf.; $\frac{1}{26}$ von 21 Thlr. 4 Sgr. ist also 24 Sgr. $4\frac{8}{13}$ Pf.; diese müssen 3 mal genommen werden; 3 × 24 = 72 Sgr. = 2 Thlr. 12 Sgr.; 3 × $4\frac{8}{13}$ Pf. = $13\frac{11}{13}$ Pf. = 1 Sgr. $1\frac{11}{13}$ Pf.; 2 Thlr. 12 Sgr. + 1 Sgr. $1\frac{11}{13}$ Pf. = 2 Thlr. 13 Sgr. $1\frac{11}{13}$ Pf.; folglich ꝛc.

Anmerkung. Diese Beispiele mögen hinreichen, einige Anleitung zu geben. Man muß viele solcher Beispiele geben und geben lassen, und, wo möglich, es so lenken, daß jede Aufgabe auf eine mehrfache Weise aufgelöset wird. Will man bei der Entwerfung der Aufgaben einen bestimmten Stufengang verfolgen, so wähle man z. B. diesen:

A. Benannte Zahlen durch benannte zu theilen:

1) eine einfach benannte durch eine gleichartige einfach-benannte; z. B.: wie oft sind 2 Sgr. in 3 Thlr., oder umgekehrt 2 Thlr. in 2 Sgr. enthalten?
2) eine mehrfach benannte durch eine gleichartige einfach-benannte; z. B. wie oft sind 5 Sgr. in 7 Thlr. 26 Sgr. enthalten?
3) eine mehrfach-benannte durch eine gleichartige mehrfach-benannte; z. B.: wie oft sind 2 Sgr. 3 Pf. in 20 Sgr. 4 Pf., oder in 4 Thlr. 20 Sgr. 4 Pf. enthalten?

B. Benannte Zahlen durch unbenannte zu theilen.

1) Eine einfach benannte Zahl zu theilen durch ganze, gebrochene und gemischte Zahlen; z. B. 10 Rthlr. ($10\frac{3}{4}$ Rthlr.) durch 4, $\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{5}$ zu theilen.
2) Eine mehrfach benannte Zahl eben also zu theilen; z. B. 7 Thlr. 8 Sgr. (7 Thlr. $8\frac{3}{4}$ Sgr.) durch 6, $\frac{4}{7}$, $5\frac{2}{5}$ zu theilen.

In letzterem Falle sind noch die Aufgaben, in welchen die einzelnen Theile sich ohne Rest durch den Divisor theilen lassen, von denjenigen zu trennen, in welchen dieses nicht der Fall ist. Nach dieser Klassifikation kann man nun eine Menge Aufgaben, welche den Kräften der Schüler angemessen sind, bilden; man wähle dieselben aber nicht zu zusammengesetzt. Solche eignen sich mehr zur schriftlichen Behandlung.

II. Schriftlich.

§. 128. Das schriftliche Verfahren.

Beispiel 1. Wie oft sind 39 Sgr. in 183 Thlr. enthalten? (Antw. $140\frac{10}{13}$ mal.)

Ansatz und Ausrechnung:

183
× 30
39 | 5490 | $140\frac{10}{13}$ mal.
   | 39 |
159
156
$\frac{30}{39} = \frac{10}{13}$.

Beispiel 2. Wie oft sind $2\frac{3}{4}$ Loth in $104\frac{2}{5}$ Pfd. enthalten? (Antw. $1214\frac{46}{55}$ mal.)

Ansatz und Ausrechnung:

$104\frac{2}{5}$
522
32
1044
$2\frac{3}{4}$ 1566
11 16704
5 4
55 | 66816 | $1214\frac{46}{55}$.
   | 55 |
118
110
81
55
266
220
$\frac{46}{55}$

$104\frac{2}{5}$ Pfd. wurden eingerichtet, also zu 5teln gemacht, dann in Loth verwandelt; $2\frac{3}{4}$ wurden eingerichtet, also zu 4teln gemacht. Da 4tel und 5tel in 20steln zusammen kommen, so wurden jene mit 5, diese mit 4 multiplicirt, um sie gleichnamig zu machen. Hierauf wurde der Dividend mit dem Divisor getheilt, wodurch $1214\frac{46}{55}$ entstand.

Beispiel 3. Wie oft sind 7 Thlr. $16\frac{2}{3}$ Sgr. in 49 Thlr. $7\frac{4}{9}$ Sgr. enthalten? (Antw. $6\frac{1057}{2040}$ mal.)

Ansatz und Ausrechnung:

7 Thlr. $16\frac{2}{3}$ Sgr.
× 30
226
× 3
680
× 3
2040

49 Thlr. $7\frac{4}{9}$ Sgr.
× 30
1477
× 9
2040 | 13297 | $6\frac{1057}{2040}$
     | 12240 |
1057

Erläuterung. Der Divisor wurde zu 3tel Sgr., der Dividend zu 9tel Sgr. gemacht, hierauf jener, um ihn diesem gleichnamig zu machen, noch mit 3 multiplicirt; hierauf dividirt.

Beispiel 4. Wie oft sind 3 Ctnr. 97 Pfd. $2\frac{4}{5}$ Loth in $84\frac{2}{11}$ Ctnr. enthalten? (Antw. $21\frac{23293}{34167}$ mal.)

Ansatz und Ausrechnung:

3 Ctnr. 97 Pfd. $2\frac{4}{5}$ L.	$84\frac{2}{11}$ Ctnr.	
× 110	86	
427	84	
× 32	926	
856	× 110	
1281	9260	3259520
13666	926	× 5
× 5	101860	751674 | 16297600 | $21\frac{23293}{34167}$
68334	× 32	1503348
× 11	203720	1264120
68334	30558	751674
68334	3259520	$\frac{512446}{751674} = \frac{256223}{375837} = \frac{23293}{34167}$.
751674		

Erläuterung. Die 3 Ctnr. ꝛc. wurden in 5tel Loth verwandelt, die $84\frac{2}{11}$ Ctnr. zuerst in 11tel Ctnr., dann in Loth; diese waren also 11tel, jene 5tel; um sie gleichnamig zu machen, wurde der Divisor mit 11, der Dividend mit 5 multiplicirt, dann dividirt.

Beispiel 5. Welches ist der 63ste Theil von 800 Thlr.? (Antw. 12 Thlr. 20 Sgr. $11\frac{3}{7}$ Pf.)

Ansatz und Ausrechnung:

63 | 800 | 12 Thlr.
63
170
126
44
× 30
63 | 1320 | 20 Sgr.
126
60
× 12
63 | 720 | $11\frac{3}{7}$ Pf.
63
90
63
$\frac{27}{63} = \frac{3}{7}$.

Erläuterung. Zuerst wurden 800 Thlr. durch 63 getheilt, = 12 Thlr., mit dem Reste 44 Thlr.; derselbe wurde mit 30 in Sgr. verwandelt, hierauf wieder mit 63 getheilt, = 20 Sgr.; der Rest 60 wurde in Pfennige verwandelt, dann abermals mit 63 getheilt, wodurch der Quotient $11\frac{3}{7}$ Pf. entstand.

Anmerkung. Beträgt ein Pfennigbruch mehr als $\frac{1}{2}$, so nimmt man statt seiner 1 Pf.; beträgt er weniger, so läßt man ihn weg. In vorliegendem Falle fällt er also weg.

Beispiel 6. Wie viel Thlr., Sgr. ꝛc. sind 89429 Pf.? (Antw. 248 Thlr. 12 Sgr. 5 Pf.

Ansatz und Ausrechnung:

```
            30
12 | 89429 | 7452 | 248 Thlr. 12 Sgr. 5 Pf.
   | 84    | 6    |
     54      14
     48      12
      62      25
      60      24
       29      12 Sgr.
       24
        5 Pf.
```

Erläuterung. Zuerst dividirte man die Pfennige mit 12, um sie in Sgr. zu verwandeln, dann den Quotienten durch 30, um die Sgr in Thlr. auszudrucken.

Beispiel 7. Was kommt heraus, wenn man 104 Ctnr. $27^4/_5$ Pfd. durch $7^3/_4$ theilt? (Antw. 13 Ctnr. 49 Pfd. 22 L. $3^{103}/_{155}$ Qt.)

Ansatz und Ausrechnung:

```
        104 Ctnr. 27⁴/₅ Pfd.
        × 110
         1067
        104
        11467
 7³/₄      × 5
  31     57339
 × 5       × 4   110
 155 | 229356 | 1479 | 13 Ctnr. 49 Pfd. 22 Loth 3¹⁰³/₁₅₅ Qt.
     | 155    | 110  |
        743      379
        620      330
        1235      49
        1085
         1506
         1395
          111
         × 32
          222
         333
 155 | 3552 | 22
     | 310  |
        452
        310
        142
        × 4
 155 | 568 | 3
     | 465 |
       103/155.
```

Erläuterung. Die Ctnr. wurden in Pfd., diese in 5tel Pfd. verwandelt, der Divisor eingerichtet. Hierauf brachte man beide Zahlen durch Multiplication mit den Nennern auf gleiche Benennung, hierauf dividirte man. Der Quotient 1479 gab die Anzahl der Pfd., welche in Ctnr. verwandelt wurden. Der vorher gebliebene Rest war 111 Pfd.; dieselben wurden mit 32 zu Loth gemacht, hierauf abermals durch 155 getheilt = 22 mit dem Reste 142, welche mit 4 zu Quentchen gemacht und nochmals durch 155 getheilt wurden. So fand man den Quotienten 13 Ctnr. 49 Pfd. 22 Loth $3^{103}/_{155}$ Quentchen.

Beispiel 8. Wie groß ist der Quotient, welcher herauskommt, wenn man 84 Ballen 5 Ries $7\frac{4}{5}$ Buch durch $4\frac{3}{7}$ theilt? (Antw. 19 Ballen 17 Buch $21\frac{57}{155}$ Bogen.)

Ansatz und Ausrechnung:

```
          84 Ballen 5 Ries 7 4/5 Buch
           × 10
          ------
           845
            × 20
          ------
          16907
  4 3/7     × 5
  -----  -------
   31     84539
   × 5      × 7   20     10
  -----  -------
  155 | 591773 | 3817 | 190 | 19 Ballen 17 Buch 21 57/155 Bog.
      | 465    | 2
         ------  -----
          1267     18
          1240     18
         ------  -----
           277     17
           155
         ------
          1223
          1085
         ------
           138
           × 24
         ------
           552
           276
         ------
  155  | 3312 | 21 57/155
       | 310
         ------
           212
           155
         ------
            57
```

Anmerkung. Es bleibt dem Lehrer überlassen, diese Aufgaben zu vermehren. Im ersten Uebungsbuche findet sich als Anhang zu den Brüchen eine Anzahl gemischter Aufgaben welche dem Schüler hinreichende Uebung und Beschäftigung darbieten werden. Schwache Schüler verschont man mit allen zusammengesetzten Aufgaben, die im Leben doch nur selten vorkommen. Das mechanische Verfahren muß um jeden Preis vermieden werden. Es ist Regelrechnen. Gibt man keine Regeln, so entsteht es nicht.

II. Die Behandlung der Brüche in der (sogenannten) Multiplications- und Divisions-Regel-de-Tri.

Vorbemerkung. Dieselbe schließt sich an die letzte Uebung vor den Brüchen an. Sollte der Lehrer dieselbe überschlagen haben, so füge er sie hier ein, und reihe dann an sie das jetzt Folgende an.

I. Mündlich.

§. 129. Das mündliche Verfahren.

Wenige Beispiele werden hinreichen, das Erforderliche auseinander zu setzen. — Die meisten der hieher gehörigen Aufgaben eignen sich mehr für die schriftliche Behandlung.

Beispiel 1. Ein Pfd. Waare kostet $\frac{3}{4}$ Sgr., wie viel kosten 22 Pfd.? (Antw. $16\frac{1}{2}$ Sgr.)

Auflösung. $22 \times \frac{3}{4} = \frac{66}{4} = 16\frac{1}{2}$ Sgr.

Beispiel 2. Wie viel kosten 10 Pfd. Obst, wenn 1 Pfd. $2\frac{3}{5}$ Sgr. kostet? (Antw. 26 Sgr.)

Auflösung. $10 \times 2\frac{3}{5} = 20 + \frac{30}{5} = 20 + 6 = 26$ Sgr.

Beispiel 3. Ein Malter Roggen kostet 4 Thlr. $6\frac{3}{4}$ Sgr.; wie viel kosten 18 Malter? (Antw. 76 Thlr. $1\frac{1}{2}$ Sgr.)

Auflösung. 18×4 Thlr. $6\frac{3}{4}$ Sgr. $= 72$ Thlr. $+ 108$ Sgr. $+ 13\frac{1}{2}$ Sgr. $= 72$ Thlr. $+ 121\frac{1}{2}$ Sgr. $= 76$ Thlr. $1\frac{1}{2}$ Sgr.

Beispiel 4. Wie viel kosten 7 Buch Papier, wenn ein Buch $5\frac{4}{11}$ Sgr. kostet? (Antw. 1 Thlr. 7 Sgr. 7 Pf.)

Auflösung. $7 \times 5\frac{4}{11}$ Sgr. $= 35 + \frac{28}{11} = 37\frac{6}{11}$ Sgr. $= 1$ Thlr. 7 Sgr. $\frac{6}{11} = 7$ Pf.

Beispiel 5. Wie viel kostet 1 Gebund Federn, wenn 12 Gebund 10 Thlr. 4 Sgr. kosten? (Antw. 25 Sgr. 4 Pf.)

Auflösung. $\frac{1}{12} \times 10$ Thlr. 4 Sgr. $= \frac{5}{6}$ Thlr. $+ \frac{1}{3}$ Sgr. $= 25$ Sgr. 4 Pf.

Beispiel 6. Wie viel kostet 1 Malter Gerste, wenn 6 Malter 29 Thlr. 27 Sgr. kosten? (Antw. 4 Thlr. 29 Sgr. 6 Pf.)

Auflösung. $\frac{1}{6} \times 29$ Thlr. 27 Sgr. $= 4\frac{5}{6}$ Thlr. $+ 4\frac{1}{2}$ Sgr. $= 4$ Thlr. 29 Sgr. 6 Pf.

Beispiel 7. Wie viel kostet 1 Elle Zeug, wenn $\frac{3}{4}$ Ellen 4 Thlr. 12 Sgr. kosten? (Antw. 5 Thlr. 26 Sgr.)

Auflösung. 1 Elle $= \frac{4}{4}$ Ellen, also kostet eine Elle 4 mal das, was $\frac{1}{4}$ Elle kostet; ich suche daher zuerst, was $\frac{1}{4}$ Elle kostet. $\frac{1}{4}$ Elle ist der 3te Theil von $\frac{3}{4}$ Ellen, also kostet $\frac{1}{4}$ Elle $\frac{1}{3} \times 4$ Thlr. 12 Sgr. $= 1$ Thlr. 10 Sgr. $+ 4$ Sgr. $= 1$ Thlr. 14 Sgr.; folglich 1 Elle 4×1 Thlr. 14 Sgr. $= 4$ Thlr. $+ 56$ Sgr. $= 5$ Thlr. 26 Sgr.

Oder: 1 Elle $= \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$ Ellen; also kostet auch 1 Elle $\frac{4}{3}$ mal das, was $\frac{3}{4}$ Ellen kosten, d. h. $\frac{4}{3} \times 4$ Thlr. 12 Sgr. $= \frac{16}{3}$ Thlr. $+ \frac{48}{3}$ Sgr. $= 5$ Thlr. 10 Sgr. $+ 16$ Sgr. $= 5$ Thlr 26 Sgr.

Beispiel 8. $8\frac{1}{2}$ Pfd. Zucker kosten 3 Thlr. 26 Sgr., wie viel kostet 1 Pfd.? (Antw. 13 Sgr. $7\frac{13}{17}$ Pf.)

Auflösung. $8\frac{1}{2}$ Pfd. $= \frac{17}{2}$ Pfd.; also kostet $\frac{1}{2}$ Pfd. den 17ten Theil von 3 Thlr. 26 Sgr. $= \frac{3}{17}$ Thlr. $+ \frac{26}{17}$ Sgr. $= \frac{90}{17}$ Sgr. $+ \frac{26}{17}$ Sgr. $= \frac{116}{17}$ Sgr. $= 6$ Sgr. $+ \frac{14}{17}$ Sgr. $= 6$ Sgr. $+ \frac{168}{17}$ Pf. $= 6$ Sgr. $9\frac{15}{17}$ Pf.; folglich kostet $2 \times \frac{1}{2}$ oder 1 Pfd. 2×6 Sgr. $9\frac{15}{17}$ Pf. $= 12$ Sgr. $+ 18\frac{30}{17}$ Pf. $= 13$ Sgr. $7\frac{13}{17}$ Pf.

Oder: 1 Pfd. $= \frac{2}{2}$ Pfd.; $8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ Pfd.; $\frac{2}{2}$ Pfd. sind von $\frac{17}{2}$ Pfd. der $8\frac{1}{2}$te Theil, also kostet 1 Pfd. den $8\frac{1}{2}$ten Theil von 3 Thlr. 26 Sgr.; ich muß also mit $8\frac{1}{2}$ in 3 Thlr. 26 Sgr. dividiren oder mit $\frac{2}{17}$ multipliciren: 2×3 Thlr. 26 Sgr. $= 6$ Thlr. 52 Sgr.; $= 180 + 52 = 232$ Sgr.; $\frac{1}{17} \times 232$ Sgr. $= \frac{232}{17}$ Sgr. $= 13\frac{11}{17}$ Sgr. $= 13$ Sgr. $+ \frac{132}{17} =$ 13 Sgr. $7\frac{13}{17}$ Pf.

Beispiel 9. Jemand kauft für $\frac{2}{3}$ Sgr. 1 Loth Schnupftabak; wie viel erhält er für $25\frac{1}{2}$ Sgr.? (Antw. $38\frac{1}{4}$ Loth.)

Auflösung. So oft er $\frac{2}{3}$ Sgr. ausgibt, so oft erhält er 1 Loth; wie oft daher $\frac{2}{3}$ Sgr. in $25\frac{1}{2}$ Sgr. enthalten sind, so viel mal erhält 1 Loth. Wir machen die Brüche gleichnamig: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; $25\frac{1}{2} = \frac{153}{6}$; $\frac{4}{6}$ in $\frac{153}{6}$ = 4 in 153 = $38\frac{1}{4}$ mal; also erhält er für $25\frac{1}{2}$ Sgr. $38\frac{1}{4}$ mal 1 Loth = $38\frac{1}{4}$ Loth.

Beispiel 10. Wie viel Pfd. Kleesaamen erhält man für 2 Thlr. 10 Sgr., wenn man für $6\frac{4}{5}$ Sgr. $8\frac{1}{2}$ Pfd. erhält? (Antw. $87\frac{1}{2}$ Pfd.)

Auflösung. Wie oft man $6\frac{4}{5}$ Sgr. ausgibt, so oft erhält man $8\frac{1}{2}$ Pfd.; wie oft daher $6\frac{4}{5}$ Sgr. in 2 Thlr. 10 Sgr. enthalten sind, so oft erhält man $8\frac{1}{2}$ Pfd.; wie oft $6\frac{4}{5}$ Sgr. in 2 Thlr. 10 Sgr. enthalten sind, wird gefunden, wenn man mit $6\frac{4}{5}$ Sgr. in 2 Thlr. 10 Sgr. dividirt. $6\frac{4}{5}$ Sgr. = $\frac{34}{5}$ Sgr.; 2 Thlr. 10 Sgr. = 70 Sgr.;

$\frac{34}{5} : 70 = 10\frac{5}{17}$; also erhält man auch $10\frac{5}{17} \times 8\frac{1}{2}$ Pfd. = $87\frac{1}{2}$ Pfd.

Beispiel 11. Für $2\frac{3}{4}$ Thlr. erhält man $9\frac{1}{3}$ Pfd. einer Waare; wie viel Thlr. kosten $20\frac{1}{8}$ Pfd.? (Antw. 5 Thlr. $27\frac{57}{64}$ Sgr.)

Auflösung. Wie oft $9\frac{1}{3}$ Pfd. in $20\frac{1}{8}$ Pfd. enthalten sind, so oft bezahlt man $2\frac{3}{4}$ Thlr.; $9\frac{1}{3} : 20\frac{1}{8} = \frac{28}{3} : \frac{161}{8} = 224 : 483 = 2\frac{35}{224} = 2\frac{5}{32}$; also bezahlt man für $20\frac{1}{8}$ Pfd. $2\frac{5}{32} \times 2\frac{3}{4}$ Thlr. = $\frac{69}{32} \times \frac{11}{4} = \frac{759}{128} = 5\frac{119}{128}$ Thlr. = 5 Thlr. + $\frac{3570}{128}$ Sgr. = 5 Thlr. $27\frac{57}{64}$ Sgr.

Beispiel 12. Für $\frac{2}{3}$ Sgr. erhält man, wenn das Malter Weizen 8 Thlr. 4 Sgr. kostet, 6 Loth Weißbrod; wie viel für $\frac{2}{3}$ Sgr., wenn das Malter Weizen 12 Thlr. 6 Sgr. kostet? (Antw. 4 Loth.)

Auflösung. Je theurer der Weizen, desto leichter das Brod für dasselbe Geld; doppelter Preis des Weizens, halbe Schwere des Brodes; wie oft daher 8 Thlr. 4 Sgr. in 12 Thlr. 6 Sgr. enthalten sind, den so vielsten Theil von 6 Loth wiegt das für $\frac{2}{3}$ Sgr. zu kaufende Weißbrod; 8 Thlr. 4 Sgr. = $8 \times 30 + 4 = 244$ Sgr.; 12 Thlr. 6 Sgr. = $12 \times 30 + 6 = 366$ Sgr.; 244 in 366 = $\frac{366}{244} = 1\frac{122}{244} = 1\frac{1}{2}$ mal; also erhält man für $\frac{2}{3}$ Sgr. den $1\frac{1}{2}$ten Theil von 6 Loth (der Kürze wegen so zu sprechen), welcher gefunden wird, indem man mit $1\frac{1}{2}$ in 6 Loth dividirt: $1\frac{1}{2} : 6 = \frac{3}{2} : \frac{12}{2} = 3 : 12 = 4$; d. h. man erhält nun für $\frac{2}{3}$ Sgr. 4 Loth Weißbrod.

Beispiel 13. Wie weit kann ein Fuhrmann eine Ladung für 16 Thlr. 24 Sgr. fahren, wenn er für 3 Meilen 2 Thlr. 3 Sgr. erhält? (Antw. 24 Meilen.)

Auflösung. Wie oft er 2 Thlr. 3 Sgr. erhält, so oft fährt er 3 Meilen weit, wie oft daher 2 Thlr. 3 Sgr. in 16 Thlr. 24 Sgr. enthalten sind, so oft fährt er 3 Meilen; 2 Thlr. 3 Sgr. = 63 Sgr.; 16 Thlr. 24 Sgr. = 504 Sgr.; 63 : 504 Sgr. = $\frac{504}{63} = 8$; also fährt er für 16 Thlr. 24 Sgr. 8×3 Meilen = 24 Meilen.

Beispiel 14. Wie viel Ellen Leinwand webt ein Weber für 10 Thlr. 3 Sgr. 2 Pf., wenn er für 4 Sgr. 7 Pf. $8\frac{1}{2}$ Ellen webt? (Antw. $562\frac{13}{55}$ Ellen.)

Auflösung. Wie oft er 4 Sgr. 7 Pf. erhält, so oft webt er $8\frac{1}{2}$ Ellen; wie oft daher 4 Sgr. 7 Pf. in 10 Thlr. 3 Sgr. 2 Pf. enthalten sind, so oft webt er $8\frac{1}{2}$ Ellen; 4 Sgr. 7 Pf. = 55 Pf.; 10 Thlr. 3 Sgr. 2 Pf. = 3600 + 36 + 2 = 3638 Pf.; 55 in 3638 = $\frac{3638}{55}$ = $66\frac{8}{55}$; also $66\frac{8}{55} \times 8\frac{1}{2}$ Ellen = $66 \times 8 + \frac{66}{2} + \frac{64}{55} + \frac{4}{55} = 528 + 33 + \frac{68}{55}$ $=561 + 1\frac{13}{55} = 562\frac{13}{55}$ Ellen.

Beispiel 15. 10 Arbeiter werden mit einer Arbeit in $1\frac{3}{4}$ Tagen fertig; wie bald werden 19 Arbeiter damit fertig? (Antw. in $\frac{35}{38}$ Tagen.)

Auflösung. 10 Arbeiter vollenden die Arbeit in $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ Tagen, also 1 Arbeiter in $10 \times \frac{7}{4} = \frac{70}{4} = 17\frac{1}{2}$ Tagen; 19 Arbeiter also in dem 19ten Theile von $17\frac{1}{2}$ Tagen; 19 in $17\frac{1}{2}$ $= 19 \times 2$: in 35 = 38 : in 35 = $\frac{35}{38}$; also in $\frac{35}{38}$ Tagen.

Beispiel 16. Wie viel verdient ein Arbeiter täglich, wenn er in 30 Tagen 18 Thlr. 12 Sgr. verdient? (Antw. $18\frac{2}{5}$ Sgr.)

Beispiel 17. Wie viel Menschen vollenden ein Werk in 7 Tagen, welches von 3 Menschen in 21 Tagen vollendet wird? (Antw. 9 Mann.)

Beispiel 18. Auf wie viel Jahre kann ein Landmann für 300 Rthlr. ein Gut pachten, wenn er jährlich $42\frac{6}{7}$ Rthlr. bezahlt? (Antw. 7 Jahre.)

Beispiel 19. Ein Bürger bezahlt in $5\frac{1}{2}$ Jahren 36 Thlr. 20 Sgr. Gewerbesteuer; wie viel jährlich? (Antw. 6 Thlr. 20 Sgr.)

Beispiel 20. Wie viel Scheffel Hafer verzehren 8 Pferde in 9 Tagen, wenn 2 Pferde in 3 Tagen $24\frac{1}{2}$ Scheffel verzehren? (Antw. 294 Scheffel.)

Auflösung. So oft 2 Pferde vorhanden sind, so oft verzehren sie in 3 Tagen $24\frac{1}{2}$ Scheffel, d. h. 4 mal; und wie oft sie 3 Tage ausreichen sollen, so oft brauchen sie $24\frac{1}{2}$ Scheffel, d. h. 3 mal; also verzehren 8 Pferde in 9 Tagen $4 \times 3 = 12$ mal $24\frac{1}{2}$ Scheffel = 294 Scheffel.

Beispiel 21. Wie viel Malter Frucht werden in einer Mühle mit 3 Gängen in 12 Tagen gemahlen, wenn in einer andern, ihr gleichgebauten Mühle, mit 1 Gang in 4 Tagen $16\frac{3}{4}$ Malter gemahlen werden? (Antw. $150\frac{3}{4}$ Malter.)

Auflösung. Mit 3 Gängen in 4 Tagen $3 \times 16\frac{3}{4} = 50\frac{1}{4}$ Malter; in 12 Tagen = 3×4 Tagen auch $3 \times 50\frac{1}{4}$ Malter = $150\frac{3}{4}$ Malter.

Beispiel 22. Ein Bote legt in 10 Tagen $75\frac{3}{4}$ Meilen zurück; wie viel in 3 Tagen? (Antw. $22\frac{29}{40}$ Meilen.)

Auflösung. In 10 Tagen $75\frac{3}{4}$ Meilen, also in 1 Tag $\frac{1}{10}$ von $75\frac{3}{4}$ Meilen = $7\frac{1}{2} + \frac{9}{40} = 7 + \frac{29}{40}$ Meilen; folglich in 3 Tagen $3 \times 7\frac{29}{40}$ Meilen = $21 + \frac{69}{40} = 22\frac{29}{40}$ Meilen.

Beispiel 23. Ein Graben von 20 Ruthen (à 10 Fuß) 3 Fuß Länge wird in 5 Tagen gereinigt; wie viel Ruthen und Fuß sind in 2 Tagen fertig geworden? (Antw. 8 Ruthen $8\frac{1}{5}$ Fuß.)

Auflösung. $\frac{2}{5}$ von 20 Ruthen 3 Fuß = $\frac{2}{5} \times 203$ Fuß = $\frac{2}{5} \times \frac{406}{2} = \frac{406}{5} = 81\frac{1}{5}$ Fuß = 8 Ruthen $1\frac{1}{5}$ Fuß.

Beispiel 24. Wie viel Flaschen Bier trinkt derjenige in 1 Jahre, welcher täglich $2\frac{1}{5}$ Flaschen trinkt? (Antw. 803 Flaschen.)

Auflösung. $365 \times 2\frac{1}{5} = 730 + 73 = 803$ Flaschen.

Anmerkung. Dergleichen Aufgaben sind sehr übend; sie gehören zu den wichtigsten und bildendsten. Der Lehrer wird sie nach Belieben vermehren können.

II. Schriftlich.

§. 130. Das schriftliche Verfahren.

Beispiel 1. Wie viel kosten 36 Ellen, wenn 1 Elle 4 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr. kostet? (Antw. 159 Thlr. 9 Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung:

a. 4 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr. × 36

144 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr.
+ 15 » 36
159 » 72
36
27
30 | 459 | 15 Thlr.
30
159
150
9 Sgr.

159 Thlr. 9 Sgr.

Oder: b. 1 Elle = 4 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr.; 36 Ellen = ?

36
144 72
+ 15 36
159 Thlr. 27
30 | 459 | 15 Thlr.
9 Sgr.

Oder: c. durch Zerfällung des Factors 36 in 2 . 3 . 6:

× 2) 4 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr.
× 3) 8 Thlr. $25\frac{1}{2}$ Sgr.
× 6) 24 Thlr. $76\frac{1}{2}$ Sgr.
144 Thlr. 459 Sgr.
= 144 Thlr. + 15 Thlr. 9 Sgr.
= 159 Thlr. 9 Sgr.

Oder: d. durch Auflösung der höheren Sorten in niedere:

4 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr. = 4 Thlr. 12 Sgr. 9 Pf.

```
 × 30
 ────
 132 Sgr.
 × 12
 ────
 273
 132
 ────
 1593 Pf.
 × 36
 ────
 9558
4779                30
12 | 57348 |  | 4779 | 159 Thlr. 9 Sgr.
   | 48    |  |──────
   ────         9 Sgr.
     93
     84
   ────
     94
     84
   ────
    108
    108
   ────
    ===
```

Erläuterung. In der Ausrechnung a. sind die beiden Theile des Multiplicanden mit dem Multiplicator 36 einzeln multiplicirt. Der Ansatz in b. ist zu lesen: 1 Elle kostet 4 Thlr. $12\frac{3}{4}$ Sgr., wie viel kosten 36 Ellen? Weil der Preis einer Elle gegeben war, so gehörte diese Aufgabe in die Multiplications-Regel-de-Tri. In c. ist der Multiplicator in seine Factoren zerlegt, und mit demselben sind die Producte nach einander multiplicirt worden. d. endlich ist für sich verständlich.

Beispiel 2. Wie viel kosten 20 Pfd., wenn 1 Pfd. 8 Thlr. $21\frac{1}{2}$ Sgr. kostet? (Antw. 174 Thlr. 10 Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung:

```
1)   8 Thlr. 21½ Sgr. × 20
   × 20       × 20
   ────       ────
    160       430 Sgr. = 14 Thlr. 10 Sgr.
   + 14
   ────
    174 Thlr. 10 Sgr.
```

2) Durch Zerfällung des Multiplicators in die Factoren 4 × 5:

```
      8 Thlr. 21½ Sgr.
 4)  ─────────────────
     34 Thlr. 26  Sgr.
 5)  ─────────────────
    174 Thlr. 10  Sgr.
```

3) Durch Zerfällung des Multiplicanden in einzelne Summanden:
8 Thlr. + 20 Sgr. + 1 Sgr. + $\frac{1}{2}$ Sgr.

```
20 ×  8 Thlr. = 160 Thlr.
20 × 20 Sgr. =  13 Thlr. 10 Sgr.
20 ×  1 Sgr. =  —   »    20 Sgr.
20 × ½ Sgr. =  —   »    10 Sgr.
──────────────────────────────
                174 Thlr. 10 Sgr.
```

4) Durch Auflösung der höheren Sorte in niedere:

$$8 \text{ Thlr. } 21\tfrac{1}{2} \text{ Sgr.}$$

```
      × 30
      ----
       261
       × 2
      ----
       523
      × 20
     -----
60 | 10460 | 174 Thlr. 10 Sgr.
   | 6     |
     -----
      44
      42
     ----
       26
       24
     ----
```

$\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ Thlr. = 10 Sgr.

Erläuterung. In 1) sind die Theile des Multiplicanden einzeln mit dem Multiplicator multiplicirt, dann dieselben in eine Summe gebracht.

In 2) ist die Multiplication nach einander durch die Factoren des Multiplicators gemacht

In 3) sind, durch die Zerlegung des Multiplicanden in 4 Summanden, 4 Multiplications- und eine Additionsaufgabe entstanden:

Wenn 1 Pfd. 8 Thlr. kostet, wie viel kosten 20 Pfd.?	160	Thlr.	—	Sgr.
„ „ „ 20 Sgr. „ „ „ „ „ „ ?	13	„	10	„
„ „ „ 1 „ „ „ „ „ „ „ ?	—	„	20	„
„ „ „ ½ „ „ „ „ „ „ „ ?	—	„	10	„
Zusammen?	174	Thlr.	10	Sgr.

In 4) wurden die Thaler und Sgr. in halbe Sgr. verwandelt; nach der Multiplication mit 20 hätte daher, um die halben Sgr. wieder in Ganze umzuwandeln, mit 2 getheilt werden müssen. Da man nun zugleich mit 30 zu theilen hatte, um die Sgr. auf Thlr. zu reduciren, so theilte man sogleich mit $2 \times 30 = 60$, statt nacheinander mit 2 und 30. Hierbei war denn nicht zu übersehen, daß der Rest = 20 nicht ganze, sondern halbe Sgr. ausdrückte.

Beispiel 3. Ein Kaufmann kauft 3 Stück Tuch für 27 Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr.; in demselben Preise später noch 104 Stück; was kosten dieselben? (Antw. 955 Thlr. $12\frac{2}{5}$ Sgr.)

Ansatz und Ausrechnung:

1) $3 : 104 = 34\frac{2}{3}$

$34\frac{2}{3} \times 27$ Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr.

34×27	Thlr.	=	918	Thlr.			
$\frac{2}{3} \times 27$	»	=	18	»			
34×16	Sgr.	=	18	»	4	Sgr.	
$\frac{2}{3} \times 16$	»	=			$10\frac{2}{3}$	» =	$\frac{10}{15}$
$34 \times \frac{4}{5}$	»	=			$27\frac{1}{5}$	» =	$\frac{3}{15}$
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$	»	=			$\frac{8}{15}$	» =	$\frac{8}{15}$
Summe:			955	Thlr.	$12\frac{2}{5}$	» =	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

2) $34\frac{2}{3} \times 27$ Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr.

$\frac{104}{3}$ $\times 30$

826 4134
$\times 5$ $\times 104$

4134 16536
4134

15	429936	28662	955 Thlr.
	30	27	
	129	16	
	120	15	
	99	16	
	90	15	
	93	12 Sgr.	
	90		
	36		
	30		
	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ Sgr.		

955 Thlr. $12\frac{2}{5}$ Sgr.

3) 3 St. = 27 Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr.; 104 = St.?

5 30
15 826
5
4134
104
16536
4134
15 | 429936 | u. s. w., wie in 2).

Erläuterung. In 1) wurde zuerst untersucht, wie oft 3 Stück gekauft wurden, welches man durch Theilung der 104 Stück durch 3 fand $= 34\frac{2}{3}$ mal. Also mußte auch der Preis der 3 Stücke, d. h. 27 Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr., $34\frac{2}{3}$ mal bezahlt werden. Dieses Product wurde in 1) durch Vervielfachung aller einzelnen Theile gefunden; in 2) nach vorhergegangener Resolution auf die niedere Einheit Sgr. Der Ansatz in 3) ist zu lesen: 3 Stück kosten (sind gleich — nämlich an Werth) 27 Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr.; wie viel kosten (welcher Geldsumme sind gleich) 104 Stück?

Hier sehen wir, was auch aus dem Vorhergehenden bekannt ist, daß die 27 Thlr. $16\frac{4}{5}$ Sgr. mit 104 multiplicirt und das entstehende Product durch 3 dividirt werden muß. Da die Thlr. und Sgr. auf 5tel gebracht wurden, so ist die, durch die Multiplication entstehende Menge Fünftel-Sgr. durch 5 zu theilen. Da dieses Product nun auch durch 3 zu theilen ist, so theilt man gleich durch 5×3. Man setzt daher den Nenner 5 des mittleren Gliedes als Factor zu dem ersten Gliede und dividirt durch das dadurch entstehende Product $5 \times 3 = 15$.

Beispiel 4. $\frac{3}{4}$ Pfd. kosten $6\frac{2}{3}$ Thlr., wie viel kosten $19\frac{1}{2}$ Pfd.?

Hier theilt man aus vorher angegebenen Gründen $19\frac{1}{2}$ Pfd. durch $2\frac{3}{4}$, und multiplicirt $6\frac{2}{3}$ Thlr. mit dem Quotienten. Oder man multiplicirt $6\frac{2}{3}$ zuerst mit $19\frac{1}{2}$, und dividirt dieses

Product durch $2^3/_4$. Wenn wir den im vorigen Beispiel gebrauchten Ansatz wählen wollen, so sieht die Ausrechnung so aus:

$2^3/_4$ Pfd. = $6^2/_3$ Thlr.; $19^1/_2$ Pfd. = ?

Hier stehen 3 Glieder; das zweite und dritte müssen mit einander multiplicirt, und ihr Product durch das erste dividirt werden. Vorher richtet man die Glieder ein. Dann werden, wenn man das zweite mit dem dritten multiplicirt, 2 Brüche mit einander multiplicirt, welches geschieht, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. Das Product der Zähler wird also durch das Product der Nenner dividirt. Hierauf wird mit dem ersten Gliede $2^3/_4 = {}^{11}/_4$ dividirt. Durch einen Bruch dividirt man aber, indem man mit dem Zähler dividirt und mit dem Nenner multiplicirt. Die Zahl 11 ist also für das Product der beiden letzten Glieder ein Divisor, die Zahl 4 ein Factor. Als Factoren der gesuchten Zahl erscheinen daher, nach der Einrichtung der 3 Glieder (Brüche) des Ansatzes, die Zähler des zweiten und dritten Gliedes und der Nenner des ersten, und als Divisoren der gesuchten Zahl die Nenner des zweiten und dritten und der Zähler des ersten Gliedes. Da es nun auf die Größe des Products und des Quotienten keinen Einfluß hat, ob man mit den einzelnen Factoren nach einander, oder gleich mit dem Producte aller Factoren multiplicirt, und ob man mit den Divisoren einzeln nach einander oder mit ihrem Producte dividirt, so kann man hiernach die Rechnung abkürzen. Thut man dies, so sieht die Rechnung so aus:

$2^3/_4$ Pfd. = $6^2/_3$ Thlr.; $19^1/_2$ Pfd. = ? (= x)

${}^{11}/_4$ ${}^{20}/_3$ ${}^{39}/_2$

Die gesuchte Zahl, welche man x nennen kann, ist also:

$$x = \frac{20 \times 39 \times 4}{3 \times 2 \times 11}$$

Hieraus leitet man die practische Regel ab: Richte die Brüche ein, setze die Nenner des zweiten und dritten Gliedes als Factoren zum Zähler des ersten Gliedes, und den Nenner des ersten Gliedes als Factor zu den Zählern des zweiten und dritten Gliedes; multiplicire letztere mit einander, und dividire das Product durch das Product der bei dem ersten Gliede stehenden Zahlen, so hast du die gesuchte Zahl, hier die gesuchten Thlr. Dies geschieht also:

$2^3/_4$ Pfd. = $6^2/_3$ Thlr.; $19^1/_2$ Pfd. = x Thlr.

11	20	39
4	3	2
3	4	
2.		

Nun kann man sich noch eine Abkürzung erlauben. Man kann nämlich ohne Veränderung des Werthes eines Bruches, Zähler und Nenner desselben durch dieselbe Zahl dividiren. Bestehen Zähler und Nenner eines Bruches, wie in vorliegendem Falle, aus Factoren, so theilt man jedes mal irgend einen Factor des Zählers gegen irgend einen Factor des Nenners. Also hat man irgend eine Zahl des zweiten oder dritten Gliedes gegen irgend eine Zahl des

ersten Gliedes aufzuheben. Denn die Zahlen des zweiten und dritten Gliedes stehen auf der Multiplicationsseite, die Zahlen des ersten Gliedes auf der Divisionsseite. In vorliegendem Falle lassen sich 3 im ersten Gliede und 39 im dritten Gliede durch 3 aufheben; eben so 2 im ersten Gliede und 20 oder 4 im zweiten. Hat man auf diese Weise die Glieder (nämlich das erste gegen das zweite oder dritte) gegen einander aufgehoben, bis die Zahlen jenes und dieser Glieder keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, so multiplicirt man die noch übrigen Zahlen des zweiten und dritten Gliedes, und dividirt das entstehende Product durch das Product der noch übrigen Zahlen des ersten Gliedes. Die ganze Ausrechnung ist also diese:

$2\frac{3}{4}$ Pfd. = $6\frac{2}{3}$ Thlr.; $19\frac{1}{2}$ Pfd. = x Thlr.

11	20	39
4	3	2
3	4	
2		
	2	13

$$x = \frac{20 \times 2 \times 13}{11} = {}^{520}/_{11} = 47\,{}^{3}/_{11} \text{ Thlr.}$$

Anmerkung. Die vorstehende Entwickelung begründet das bekannte practische Verfahren der alten Rechenbücher und Rechenmeister, welches sie bei Regel-de-Tri-Aufgaben anwenden. Wir stellen noch einige Exempel auf, da wir nun kurz und rein practisch ausrechnen, nachdem die Gründe vorhergegangen sind.

Beispiel. 5. Wie viel Pfd. erhält man für $104\frac{2}{3}$ Thlr., wenn man für $6\frac{4}{5}$ Thlr. $24\frac{5}{6}$ Pfd. erhält? (Antw. 382 Pfd. 7 Loth $2\,{}^{82}/_{153}$ Quentchen.)

Ansatz und Ausrechnung:

$6\frac{4}{5}$ Thlr. = $24\frac{5}{6}$ ℔; $104\frac{2}{3}$ = x ℔.

34	149	314
5	6	3
6	5	
3		
3		157
9		149
34		1413
306		628
		157
		23393
		5
		116965

```
306 | 116965 | 382 ℔ 7 Loth 2 82/153 Qt.
      918
      2516
      2448
       685
       612
        73
      × 32 Loth
       146
      219
306 | 2336 | 7 Loth
      2142
       194
      × 4 Qt.
306 |  776 | 2 82/153 Qt.
       612
       164
```

Beispiel 6. Für 10 Thlr. 18 Sgr. erhält man 3 Ctnr. 47 Pfd. einer gewissen Waare, wie viel von derselben Waare für 90 Thlr. 20 Sgr. 10 Pf.? (Antw. 29 Ctnr. $35\,{}^{1225}/_{1908}$ Pfd.)

Ansatz und Ausrechnung:

10 Thlr. 18 Sgr. = 3 Ctnr. 47 ℔; 90 Thlr. $20^5/_6$ Sgr. = x ℔.

```
  30             110        30
 ----           -----     -----
  318           377 Pfd.   2720
    6                         6
 ----                     -----
 1908                     16325
                            377
                          -----
                         114275
                        114275
                        48975        110
                     ----------
              1908 | 6154525 | 3225 | 29 Ctnr. 35 1225/1908 ℔.
                   | 5724    | 22
                    -------   ----
                      4305     102
                      3816      99
                    -------   ----
                      4892      35
                      3816
                    -------
                      10765
                       9540
                    -------
                      1225/1908
```

Beispiel 7. Was kosten $7^1/_2$ Pfd. Thee, wenn $12^3/_4$ Pfd. $90^4/_5$ Thlr. kosten? (Antw. 53 Thlr. 12 Sgr. $4^4/_{17}$ Pf.)

Ansatz und Ausrechnung:

$12^3/_4$ Pfd. $90^4/_5$ Thlr.
$7^1/_2$ » ?

$12^3/_4 = {}^{51}/_4$ Pfd. kosten $90^4/_5 = \frac{454}{5}$ Thlr

Also $^1/_4$ Pfd. kostet $\frac{454}{5\,.\,51}$ Thlr.

1 » « $\frac{454\,.\,4}{5\,.\,51}$ «

Folglich $7^1/_2 = {}^{15}/_2$ Pfd. $\frac{15}{2} \times \frac{454\,.\,4}{5\,.\,51} = \frac{15\,.\,454\,.\,4}{2\,.\,5\,.\,51}$

$= \frac{3\,.\,454\,.\,2}{51}$

$= \frac{454\,.\,2}{17}$

$= \frac{908}{17}$

= 53 Thlr. 12 Sgr. 4 Pf.

Zusatz. Die Auflösung und Ausrechnung dieser und ähnlicher Aufgaben ergibt sich von selbst. Sie beruht auf einfachem

Räsonnement, und es gehört dazu nur simpler Hausverstand. Bei einiger Uebung kommt man auf allerhand praktische Vortheile. — Die Auflösungsweise selbst zeigt, daß es hier der Proportionslehre nicht bedarf, was schon früher angedeutet wurde. Um diese Wahrheit auch in Betreff zusammengesetzterer Aufgaben, z. B. solcher, die nach herkömmlichem Brauche zur zusammengesetzten Regel-de-Tri gerechnet werden, in's gehörige Licht zu setzen, wollen wir noch einige Beispiele ausrechnen.

Beispiel 8. Eine Mauer, welche 20 Fuß lang, 10 Fuß hoch, 3 Fuß breit ist, kostet 144 Thlr.; was wird unter gleichen Verhältnissen eine 24 Fuß lange, 16 Fuß hohe, 5 Fuß breite Mauer kosten?

	F. l.	F. h.	F. b.	Thlr.
Ansatz:	20	10	3	144
	24	16	5	?

Ausrechnung: 1 F. l. würde kosten $\frac{144}{20}$ Thlr.

24 — — — $\frac{24 . 144}{20}$ Thlr.

1 F. h. — $\frac{24 . 144}{10 . 20}$ Thlr.

16 — — $\frac{16 . 24 . 144}{10 . 20}$ Thlr.

1 F. b. $\frac{16 . 24 . 144}{3 . 10 . 20}$ Thlr.

5 — $\frac{5 . 16 . 24 . 144}{3 . 10 . 20}$ Thlr. ꝛc.

Die kurze Praxis, der aber stets das klare Bewußtsein der Gründe vorhergehen muß, ist:

Ansatz:	20	10	3	144 Thlr.
	24	16	5	?

$\frac{24 . 16 . 5 . 144}{20 . 10 . 3}$ Thlr. = $460\frac{4}{5}$ Thlr.

Nachdem nun die Factoren im Zähler und Nenner, welche sich gegen einander aufheben lassen, aufgehoben worden sind, vollzieht man die Ausrechnung.

Die gegebene Auflösung selbst ist für sich klar. Durch das Zurückgehen auf die Einheit fassen die Schüler die Sache auch sehr leicht. Kostet die Mauer bei 20 Fuß Länge 144 Thlr., so kostet sie, wenn alles Andere (Höhe und Breite) bleibt, bei einer Länge von 1 Fuß nur den 20sten Theil, d. h. $\frac{144}{20}$ Thlr., folglich bei 24 Fuß Länge $\frac{24 . 144}{20}$ Thlr. Ebenso schließt man bei der Höhe und Breite. — Man kann auch erst den Preis einer Mauer von 1 Fuß Länge, 1 Fuß Höhe, 1 Fuß Breite berechnen, welche $\frac{144}{20 . 10 . 3}$ Thlr. kostet, u. s. w.

Beispiel 9. Eine Wiese von 180 Fuß Länge und 36 Fuß Breite wird von 10 Arbeitern bei täglich 12stündiger Arbeit in 4 Tagen abgemähet; wie lange werden 16 Arbeiter bei täglich 14stündiger Arbeit an einer Wiese, die 150 Fuß-lang, 40 Fuß breit ist, zu thun haben?

	F. l.	F. b.	Arb.	Std.	Tage
Ansatz:	180	36	10	12	4
	150	40	16	14	?

Antwort: $\frac{150 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 4}{180 \cdot 36 \cdot 16 \cdot 14}$ Tage.

Dieser Antwort liegt folgende Beurtheilung zu Grunde:

Wäre die Wiese unter übrigens gleichen Umständen nur 1 Fuß lang, so würde an derselben gearbeitet werden $^1/_{180}$ der Zeit.
— — — — 1 Fuß breit . . . . $^1/_{36}$ der Zeit.
Arbeitete an ihr 1 Arb., so würde derselbe nöthig haben 10mal die Zeit.
— — — — 1 Stunde . . . . 12mal die Zeit.
Da aber die Wiese 150 F. l. ist, so wird dadurch nöthig 150mal die Zeit.
— — — — 40 Fuß breit . . . 40mal die Zeit.
Da 16 Arbeiter beschäftigt sind, so gebrauchen sie $^1/_{16}$ der Zeit.
— — — — 14 Stunden . . . $^1/_{14}$ der Zeit.

Ohne eine verständige Beurtheilung aller Momente ist natürtürlich die Auflösung einer solchen Aufgabe nicht möglich. Es lohnt aber auch der Mühe, sie anstellen zu lassen. Denn es ist eine wahre Freude, zu sehen, wie sehr dadurch die Intelligenz der Schüler gewinnt.

Beispiel 10. 10000 Nähnadeln werden von 25 Knaben in 12 Tagen verfertigt, wenn sie täglich 15 Stunden arbeiten; wie viel Knaben werden in 30 Tagen, wenn sie täglich nur (nur?) 8 Stunden arbeiten, 12000 Nähnadeln fertig machen?

Nachweisung. Um die Aufgabe gut übersehen zu können, stellt man die gleichnamigen Größen senkrecht unter einander. Also:

10000 N.	12 T.	15 St.	25 K.
12000	30	8	?

Beurtheilung. 1) Wie oft 10000 Nadeln, so oft (unter übrigens gleichen Umständen, d. h. gleicher Anzahl der Tage und der Stunden) 25 Knaben; also $\frac{12000}{10000} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ mal 25 Knaben.

2) Doppelte Anzahl der Tage, halbe Anzahl (Hälfte) der Knaben; 30 Tage = $2^1/_2 \times 12$ T., also nur der $2^1/_2$te (man erlaube!) Theil der Knaben = $\frac{25}{2^1/_2}$ Knaben.

3) Halbe Anzahl der Stunden, doppelte Anzahl der Knaben; 8 = $\frac{8}{15} \times 15$ St., also $\frac{15}{8} \times 25$ Knaben.

Resultat: $\frac{6}{5} \times \frac{1}{2^1/_2} \times \frac{15}{8} \times 25$ Knaben.

Oder auf die Einheiten reducirt.

10000 N.	12 T.	15 St.	25 K.
12000	30	8	?

1 N.	$\frac{25}{10000}$
12000	$\frac{12000}{10000} \times 25$
1 T.	$12 \times \frac{12000}{10000} \times 25$
30	$\frac{12}{30} \times \frac{12000}{10000} \times 25$
1 St.	$15 \times \frac{12}{30} \times \frac{12000}{10000} \times 25$
8	$\frac{15}{8} \times \frac{12}{30} \times \frac{12000}{10000} \times 25$ K.

Schluß. Aus den Beispielen 7 bis 10 sollen die Leser ersehen, nach welchen Schlüssen, Ansätzen ꝛc. man dergleichen Exempel zu berechnen hat. Der gemeine Hausverstand reicht vollkommen dazu hin. Er löset durch schlichte Beurtheilung leicht nicht nur die Aufgaben der einfachen, sondern auch die der zusammengesetzten Regel-de-Tri, und zwar die der sogenannten geraden und der umgekehrten. Darum begnüge man sich mit solchen Auflösungsweisen in der Volksschule und überlasse die Proportionsrechnung den höheren Anstalten!

Daß übrigens die Beispiele 7 bis 10 nicht auf möglichst kurze Weise ausgerechnet sind, bedarf keines Beweises. Es kam hier hauptsächlich auf eine kurze, dem denkenden Lehrer genügende Anweisung an. Eine längere Uebung führt den Lehrer von selbst auf mancherlei Vortheile. In der Aufgabe vorkommende Brüche ändern den Gang der Rechnung nicht. Der Einfachheit wegen blieben sie daher aus den letzten drei Aufgaben weg. — Die Vortheile müssen immer das Letzte sein. Von Anfang an kennt man nicht immer den kürzesten Weg. Wer aber eine Gegend oft durchwandert, findet ihn, sobald es Zeit ist.

„Noth lehrt beten", gilt auch hier.

Intelligenz! immer und überall. Nicht erlangte Fertigkeit ist zwar ein Uebel, aber nicht der Uebel größtes. Denn wessen Verhältnisse vieles Rechnen fordern, gewinnt nach und nach die (ursprünglich fehlende) Fertigkeit. Aber wie holt man das Nachdenken nach, wenn man es in der Schule nicht gelernt hat? Nur sehr selten gelingt es Einem. Denn dem Kaufmann liegt nichts daran, ob sein Lehrling oder Commis seinen Geist ausbildet; er sieht allein auf das Facit. Daß dieses richtig und demnächst schnell gefunden werde, daran liegt ihm Alles. Der Schule muß daher an dem Andern, nämlich an dem Denken, Alles liegen.

Anhang I.

Von den Primzahlen und einigen Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen.

Bei dem Aufheben der Brüche kommt die Aufgabe vor, Zahlen anzugeben, durch welche sich Zähler und Nenner des Bruches ohne Rest theilen lassen. Man erkennt die verlangten Zahlen nicht immer auf den ersten Blick; oft sind sie auch gar nicht vorhanden. Wir ersehen daraus die Nothwendigkeit, diesen Gegenstand etwas näher zu untersuchen. Wir handeln daher hier zuerst von den Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen, dann von einigen Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen.

A. Von Prim- und zusammengesetzten Zahlen.

§. 131. Begriff der Primzahlen und der zusammengesetzten Zahlen, der Theiler und des Maßes der Zahlen.

Wir suchen die Factoren einer Zahl auf, z. B. der Zahl 12:

$$12 = 4 \times 3 = 6 \times 2 = 2 . 2 . 3.$$

Die Zahl 11 kann nicht in Factoren zerlegt werden; denn 11 ist in ganzen Zahlen nur $= 1 \times 11$; allein dieses ist keine Zerlegung in Factoren.

Aus diesen Beispielen erkennen wir, daß alle Zahlen eingetheilt werden können in solche, welche sich in Factoren zerlegen lassen oder welche aus Factoren entstanden gedacht werden können, und in solche, welche sich nicht in Factoren zerlegen lassen. Jene heißen zusammengesetzte Zahlen. (Das Wort »zusammengesetzt« wird hier im engeren Sinne genommen, = zusammengesetzt aus Factoren, nicht = zusammengesetzt aus Summanden, welches letztere von allen Zahlen gilt.) Diese heißen nicht-zusammengesetzte oder Primzahlen. (Prim- oder ursprüngliche, nicht weiter in Factoren zerlegbare Zahlen.) Alle ganzen Zahlen zerfallen daher in zusammengesetzte und Primzahlen.

Primzahlen sind demnach solche, welche nicht aus ganzen Zahlen, als Factoren, entstanden gedacht werden können. Da eine Zahl durch jeden ihrer Factoren, durch deren Multiplication sie entstanden ist, ohne Rest getheilt werden kann, so kann man die Primzahlen auch so erklären: Primzahlen sind solche Zahlen, welche durch keine andern (ganzen — nur von solchen ist hier die Rede) Zahlen ohne Rest getheilt werden können, als durch sich selbst und die Eins.

$$11 = 11 \times 1;\ 7 = 7 \times 1;\ 5 = 5 \times 1 \text{ ꝛc.}$$

Jede Nicht-Primzahl läßt sich in Factoren zerlegen. Oft lassen sich diese Factoren abermals zerlegen, und so fort. Setzt man diese Zerlegung in Factoren weit genug fort, d. h. so lange als möglich, so stößt man zuletzt auf Zahlen, welche keiner weitern Zerlegung mehr fähig sind, d. h. auf Primzahlen. Die letzten, kleinsten, ursprünglichsten Factoren der Zahlen sind also Primzahlen. Z. B.

60 wird zuerst zerlegt in 2 × 30; dann 30 in 2 × 15; hierauf 15 in 3 × 5. Nun findet keine weitere Zerlegung mehr statt. 60 ist nun in 2 × 2 × 3 × 5 zerlegt worden; jede dieser Zahlen ist eine Primzahl. Die letzten, einfachsten Theiler aller zusammengesetzten Zahlen sind also Primzahlen.

60
2 × 30
2 × 15
3 × 5

Da jede zusammengesetzte Zahl sich durch jeden ihrer Factoren ohne Rest theilen läßt, so findet man bei Zerlegung einer Zahl in ihre Factoren die einfachsten Theiler derselben. Theiler einer Zahl sind diejenigen Zahlen, durch welche sie sich ohne Rest theilen läßt. Solche Theile heißen auch Maße der Zahlen. Es läßt sich angeben, wie oft ein solches Maß in derjenigen Zahl, von welcher sie ein Maß ist, enthalten ist, ohne daß ein Bruch entsteht. Die Theiler oder die Maße von 60 sind z. B. 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30; die einfachsten (kleinsten) Theiler oder Maße von 60 sind 4, 3, 2; das größte Maß von 60 ist 30.

Aufgaben.

1) Nennet alle Primzahlen von 1 bis 100! (Antw. 1, 2, 3, 5, 7, 11, u. s. w.)
2) Nennet alle zusammengesetzten Zahlen von 1 bis 100! (Antw. 4, 6, 8, 9 u. s. w.)
3) Zerleget die Zahlen 16, 20, 24, 30, 36, 48, 64, 90, 150, 270, 360 in alle ihre möglichen Theiler! Z. B.

360
2 × 180
2 × 90
2 × 45
3 × 15
3 × 5

Die einfachsten, nicht weiter zerlegbaren Theiler von 360 sind also 2, 3 und 5, indem 360 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 ist. Nun aber sind noch nicht alle möglichen Theiler von 360 angegeben. Es gibt ihrer noch mehr, außer den eben gefundenen. Man findet alle möglichen Maße von 360, wenn man die einfachsten Theiler als erste Maße hinstellt und deren Verbindungen bildet.

2 2 2 3 3 5 letzte (einfache) Theiler von 360.

a.	b.	c.
2 × 2 = 4	2 × 2 × 2 = 8	2 × 2 × 2 × 3 = 24
2 × 3 = 6	2 × 2 × 3 = 12	2 × 2 × 2 × 5 = 40
2 × 5 = 10	2 × 2 × 5 = 20	2 × 2 × 3 × 3 = 36
3 × 3 = 9	2 × 3 × 3 = 18	2 × 2 × 3 × 5 = 60
3 × 5 = 15	2 × 3 × 5 = 30	2 × 3 × 3 × 5 = 90
	3 × 3 × 5 = 45	

d. 2 × 2 × 2 × 3 × 3 = 72
2 × 2 × 2 × 3 × 5 = 120
2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 180

In a. wurden die einfachen Theiler zu je 2 zusammengesetzt, in b. zu je 3, in c. zu je 4, in d. zu je 5. Man erhielt dadurch für 360 die Factoren: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 9, 15, 8, 12, 20, 18, 30, 45, 24, 40, 36, 60, 90, 72, 120, 180, oder nach ihrer Größe geordnet:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180.

Man findet dieselben auch durch fortgesetzte, möglichst vielfache Zerlegung der Theiler, oder durch einfache Anschauung bei einiger Uebung.

4) Nennet die einfachsten Theiler der Zahlen 18, 20, 21, 22, 24, 25!
5) Nennet diejenigen Zahlen, in welchen 2 ohne Rest enthalten ist?
6) — — — — — 3 — — — —
7) — — — — — 4 — — — —
8) — — — — — 5 — — — —
u. s. w. bis 20.

§. 132. Primzahlen an und unter sich und gemeinschaftliches Maß der Zahlen.

Hat eine Zahl außer sich selbst und der Einheit keine Theiler, so ist sie eine Primzahl und zwar eine Primzahl an und für sich, an sich, ohne daß sie deßhalb mit einer andern Zahl verglichen zu werden brauchte. Vergleiche ich sie mit einer andern in der Beziehung, ob beide durch irgend eine Zahl zugleich getheilt werden können, oder, ob sie einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kommt man auf den Begriff der Primzahlen gegen oder unter einander, unter sich. Haben nämlich zwei oder mehr Zahlen keinen gemeinschaftlichen Theiler, so nennt man sie Primzahlen unter einander = unter sich; z. B. 2 und 5, 3 und 8, 4 und 9, 10 und 11. Aus diesen Beispielen und aus dem gegebenen Merkmale erhellet, daß Zahlen, welche Primzahlen an sich sind, auch Primzahlen unter sich sein müssen, daß aber Primzahlen unter sich nicht nothwendig Primzahlen an sich sind. Was ein Ding für sich (absolut) ist, das ist es auch im Verhältniß zu andern Dingen (relativ); aber was ein Ding im Verhältniß zu andern ist (relativ), das ist es nicht nothwendig auch an sich (absolut).

5 und 7 sind Primzahlen an sich, folglich auch Primzahlen unter sich; 8 und 9 sind nicht Primzahlen an sich, aber Primzahlen unter sich, denn sie haben keinen gemeinschaftlichen Theiler oder kein gemeinschaftliches Maß. Unter dem gemeinschaftlichen Maße zweier Zahlen versteht man diejenige Zahl, durch welche sie sich beide ohne Rest theilen lassen, also ihren gemeinschaftlichen Theiler. Zahlen, welche kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen Primzahlen unter einander, oder (um das Wort sich, des Gegenstandes wegen, wieder zu gebrauchen) unter sich.

Die Zahlen 24 und 30 haben die gemeinschaftlichen Theiler 2, 3, 6, weil sich, sowohl 24 als auch 30, durch jede dieser Zahlen ohne Rest theilen läßt. Der kleinste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 24 und 30 ist also 2, der größte 6. Den möglich größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen nennt man auch das größte gemeinschaftliche Maß derselben.

Aufgaben.

1) Nennet Zahlenpaare, welche Primzahlen an sich und zugleich Primzahlen unter sich sind! (!)
2) Nennet Zahlenpaare, welche Primzahlen unter sich, nicht Primzahlen an sich sind!

3) Nennet Zahlenpaare, welche ein gemeinschaftliches Maß haben!
4) Nennet Zahlenpaare, deren größtes gemeinschaftliches Maß 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc. ist!
5) Nennet je 3 Zahlen, deren größtes gemeinschaftliches Maß 5, 8, 10, 12 ꝛc. ist!
6) Nennet das möglich kleinste Maß aller Zahlen, folglich auch das kleinste gemeinschaftliche Maß aller Zahlen!
7) Nennet Zahlen, von welchen 5 und 6, 2 und 7, 5 und 7, 2, 3 und 4 — 5, 6 und 8 — 3, 9, 10 ꝛc. nothwendig zugleich Theiler sind!

§. 133. Sätze über die Theilbarkeit der Zahlen.

1) Wenn eine Zahl mehrere Zahlen einzeln theilt (= ohne Rest theilt), so theilt sie auch ihre Summe; oder: das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihrer Summe.

5 theilt 10
5 theilt auch 15

folglich theilt 5 auch 10 + 15 = 25.

5 ist in 10 2 mal, in 15 3 mal enthalten; also muß 5 in (10 + 15) 2 mal + 3 mal, d. h. 5 mal, ohne Rest, enthalten sein.

2) Wenn eine Zahl zwei andere theilt, so theilt sie auch ihren Unterschied; oder: das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihres Unterschiedes.

7 ist ein Maß von 28
7 ist auch ein Maß von 7

folglich ist 7 auch ein Maß von 28 — 7, d. h. von 21. 7 ist in 28 4 mal, in 7 1 mal enthalten; also muß 7 in (28 — 7), d. h. in 21, 4 mal weniger 1 mal, d. h. 3 mal enthalten sein.

3) Wenn eine Zahl eine andere mißt, so mißt sie auch jedes Vielfache von ihr.

4 mißt 8

also mißt 4 auch 2 × 8, 3 × 8, 4 × 8, 10 × 8 u. s. w.

	4 ist in 8 2 mal enthalten,
also in 2 × 8	2 × 2 = 4 mal.
— — 3 × 8	3 × 2 = 6 mal.
— — 4 × 8	4 × 2 = 8 mal u. s. w.

Wenn also eine Zahl einen der Factoren eines Products mißt, so mißt sie auch das Product selbst. 6 mißt z. B. von 60 = 12 × 5 den Factor 12; also mißt 6 auch 60; 8 mißt von 336 = 6 × 7 × 8 den Factor 8, also mißt 8 auch 336 selbst.

Frage. Mißt eine Zahl, welche ein Product mißt, auch nothwendig die Factoren des Products?

Z. B. 10 mißt 20; 20 ist = 4 × 5: folglich — ?

4) In den vorhergehenden drei Sätzen wandten wir den Satz vom gemeinschaftlichen Maße auf die Addition, Subtraction und Multiplication an, nun soll er auf die Division angewandt werden. Dieses ist ebenfalls ganz leicht, wenn auch nicht so einfach.

In einem Divisionsexempel kommen vor: der Dividend, der Divisor, der Quotient, und, wenn die Division nicht aufgeht, der Rest.

a. Die Division gehe auf.

Erster Satz. Wenn eine Zahl den Divisor mißt, so mißt sie auch den Dividenden.

Denn der Dividend ist gleich dem Producte des Divisors in den Quotienten; wenn aber eine Zahl einen der Factoren eines Products mißt, so mißt sie auch das Product selbst.

```
6 | 30 | 5
  | 30 |
  ----
    0
```

3 mißt den Divisor 6, also mißt 3 auch 5×6, d. h. den Dividenden 30.

Zweiter Satz. Wenn eine Zahl den Quotienten mißt, so mißt sie auch den Dividenden.

Aus denselben Gründen.

```
3 | 30 | 10
  | 30 |
  ----
    0
```

5 mißt 10, also mißt 5 auch 3×10, d. h. 30.

Fragen. Mißt diejenige Zahl, welche den Dividenden mißt, auch den Divisor und den Quotienten?

Mißt diejenige Zahl, welche den Divisor mißt, auch den Quotienten?

Mißt diejenige Zahl, welche den Quotienten mißt, auch den Divisor?

Mißt diejenige Zahl, welche den Quotienten nicht mißt, auch den Dividenden und den Divisor nicht?

Mißt diejenige Zahl, welche den Dividenden nicht mißt, auch den Divisor und den Quotienten nicht?

Mißt diejenige Zahl, welche den Divisor und den Dividenden mißt oder nicht mißt, den Quotienten, oder nicht? u. s. w.

b. Die Division gehe nicht auf.

Erster Satz. Eine Zahl, welche den Divisor und den Rest mißt, mißt auch den Dividenden.

Denn: der Dividend ist = Divisor × Quotient + Rest. Diejenige Zahl, welche den Divisor mißt, mißt auch Divisor × Quotient; dieselbe Zahl mißt auch (nach der Bedingung oder Voraussetzung) den Rest; wenn aber eine Zahl zwei andere mißt, so mißt sie auch ihre Summe; also mißt dieselbe Zahl auch Divisor × Quotient + Rest, d. h. den Dividenden.

Beispiel.

```
8 | 44 | 5
  | 40 |
  ----
    4
```

2 mißt 8 und 4; also mißt 2 auch $5 \times 8 + 4 = 44$.

Zweiter Satz. Eine Zahl, welche den Quotienten und den Rest mißt, mißt auch den Dividenden.

Aus denselben Gründen.

Beispiel.

```
7 | 60 | 8
  | 56 |
  ----
    4
```

4 mißt 8 und 4, also auch $7 \cdot 8 + 4 = 60$.

Dritter Satz. Eine Zahl, welche den Dividenden und den Divisor mißt, mißt auch den Rest.

Denn: der Rest ist gleich Dividend — Divisor × Quotient. Nun mißt die Zahl den Dividenden und den Divisor, folglich auch Divisor × Quotient. Wenn aber eine Zahl zwei andere mißt, so mißt sie auch ihren Unterschied, also Dividend — Divisor × Quotient, d. h. den Rest.

Beispiel. 12 | 80 | 6
| 72 |
8

4 mißt 80 und 12, also auch 80 — 6 × 12 = 80 — 72 = 8, d. h. den Rest.

Vierter Satz. Eine Zahl, welche den Dividenden und Quotienten mißt, mißt auch den Rest.

Aus denselben Gründen.

Beispiel. 15 | 100 | 6
| 90 |
10

2 mißt 100 und 6, also auch 100 — 15 × 6 = 100 — 90 = 10, d. h. den Rest.

Fragen. Mißt eine Zahl, welche den Dividenden und Rest mißt, auch den Divisor und den Quotienten?

Mißt eine Zahl, welche den Divisor und Rest nicht mißt, auch den Dividenden nicht?

Mißt eine Zahl, welche den Dividenden und den Divisor nicht mißt, auch den Rest nicht?

Mißt eine Zahl, welche den Dividenden und den Quotienten mißt, auch den Divisor? u. s. w.

§. 134. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Will man einen Bruch in den möglich kleinsten Zahlen ausdrücken, so muß man Zähler und Nenner des Bruches durch die größte Zahl theilen, durch welche sie sich beide ohne Rest theilen lassen; d. h. man muß sie durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß theilen. Man muß also dieses größte gemeinschaftliche Maß zu finden wissen. In vielen Fällen erkennt man dasselbe gleich auf den ersten Blick. Es gibt aber auch ein bestimmtes sicheres Verfahren, dieses größte gemeinschaftliche Maß zweier und mehrerer Zahlen zu finden, oder zuverlässig zu entdecken, daß sie kein gemeinschaftliches Maß, folglich auch kein größtes gemeinschaftliches Maß haben, also Primzahlen unter sich sind. In dem letzteren Falle kann der Werth eines Bruches, nicht durch kleinere ganze Zahlen ausgedrückt, d. h. nicht gehoben werden.

Das Verfahren, das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden, ist folgendes:

Man dividirt mit der kleineren Zahl in die größere; geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl selbst das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen. Geht die Division nicht auf, bleibt also ein Rest, so dividirt man den Divisor durch diesen Rest; geht nun die Division auf, so ist der Rest das größte gemeinschaftliche Maß. Geht die Division abermals nicht auf, bleibt also ein Rest, so dividirt man mit diesem Rest in den letzten Divisor, und so fort,

bis die Division aufgeht. Sobald dieses der Fall ist, so hat man das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen. Es ist diejenige Zahl, durch welche die Division aufging. War dieselbe Zahl 1, so ist diese das größte gemeinschaftliche Maß, d. h. die beiden Zahlen sind Primzahlen unter sich.

Beispiel 1. Das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 210 und 1260 zu finden.

Verfahren: 210 | 1260 | 6
| 1260 |
= = = =

Hier ist 210 selbst das größte gemeinschaftliche Maß, denn die Division geht auf. Ein größeres, als eine der beiden Zahlen selbst, kann es begreiflicher Weise nicht geben.

Beispiel 2. Das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 210 und 792 zu finden.

Verfahren: 210 | 792 | 3
| 630 |
162 | 210 | 1
| 162 |
48 | 162 | 3
| 144 |
18 | 48 | 2
| 36 |
12 | 18 | 1
| 12 |
6 | 12 | 2
| 12 |
= =

Also 6 ist das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen 210 und 792.
6 in 210 = 35
6 in 792 = 132

Der Bruch $^{210}/_{792}$ ist also, in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt, $= {}^{35}/_{132}$.

Beweis. Um das angegebene Verfahren, das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden, zu rechtfertigen, und zwar an dem eben ausgeführten Beispiele, muß zweierlei bewiesen werden: 1) daß 6 sowohl für 210, als für 792 ein Maß ist; 2) daß 6 das größte Maß der Zahlen 210 und 792 ist.

a. Daß 6 ein Maß der beiden Zahlen 210 und 792 ist! 6 mißt, wie wir zuletzt gesehen haben, 12; 6 mißt sich auch selbst, also auch die Summe von 12 und 6, d. h. 12 + 6 = 18.
6 mißt 18 und 12, also auch 2 × 18 + 12 = 48.
6 mißt 48 und 18, also auch 3 × 48 + 18 = 162.
6 mißt 162 und 18, also auch 162 + 48 = 210.
6 mißt 210 und 162, also auch 3 × 210 + 162 = 792.

Folglich ist 6 sowohl ein Maß für 210, als auch für 792.

b. Daß 6 das größte gemeinschaftliche Maß für 210 und 792 ist!

Angenommen, es gäbe eine größere Zahl als 6, welche x heißen mag, die 792 und 210 messe, so würde x auch $792 - 3 \times 210$, d. h. 162 messen.

Wenn x 210 und 162 mißt, so mißt x auch $210 - 162$, d. h. 48.
Wenn x 162 und 48 mißt, so mißt x auch $162 - 3 \times 48 = 18$.
Wenn x 48 und 18 mißt, so mißt x auch $48 - 2 \times 18 = 12$.
Wenn x 18 und 12 mißt, so mißt x auch $18 - 12 = 6$.

Also müßte x auch 6 messen. x ist aber, wie angenommen wurde, größer als 6; folglich müßte eine Zahl, welche größer als 6 ist, diese Zahl ohne Rest theilen können. Dieses ist unmöglich, denn eine größere Zahl mißt keine kleinere. Aus der Annahme, daß die Zahlen 210 und 792 ein größeres Maß hätten, als 6, folgt also etwas Unmögliches (Absurdes); ein angenommener Satz aber, aus welchem etwas Unmögliches folgt, ist selbst unmöglich, d. h. falsch. Folglich ist es falsch, daß 210 und 792 ein größeres gemeinschaftliches Maß, als 6 ist, haben; 6 ist also das größte gemeinschaftliche Maß.

Beispiel 3. Das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 120 und 847 zu finden.

```
Verfahren:  120 | 847 | 7
                | 840 |
            ---------
                  7 | 120 | 17
                    |   7 |
                    -------
                       50
                       49
                    -------
                        1
```

Da, bevor die Division aufgeht, 1 zum Reste bleibt, so ist, nach dem vorigen Beweise, 1 das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen 120 und 847, d. h. die beiden Zahlen 120 und 847 sind Primzahlen unter sich. Der Bruch $^{120}/_{847}$ kann also in kleineren ganzen Zahlen nicht dargestellt werden.

Aufgaben.

1) Das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlenpaare 45 und 245, 36 und 942, 451 und 1216, 8204 und 94032 zu finden, wenn sie anders ein gemeinschaftliches Maß haben.

2) Den Werth der Brüche $^{26}/_{72}$, $^{17}/_{54}$, $^{64}/_{910}$, $^{2931}/_{8433}$, $^{18469}/_{27312}$, wo möglich, in den kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken.

Beispiel 4. Das größte gemeinschaftliche Maß der drei Zahlen, 16, 28 und 58 zu finden.

Man sucht zuerst das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen, und dann das größte gemeinschaftliche Maß dieses Maßes und der dritten Zahl.

Verfahren:

```
16 | 28 | 1          4 | 58 | 14
   | 16 |              |  4 |
   -------             -------
     12 | 16 | 1           18
        | 12 |             16
        -------           -------
           4 | 12 | 3      2 | 4 | 2
             | 12 |          | 4 |
             -------         -------
               ..              .
```

Das größte gemeinschaftliche Maß von 16 und 28 ist 4, und das größte gemeinschaftliche Maß von 4 und 58 ist 2; folglich ist 2 das größte gemeinschaftliche Maß der drei Zahlen 16, 28 und 58.

Der Beweis läßt sich auf dieselbe Art führen, wie in Beispiel 2.

Hat man nun das größte gemeinschaftliche Maß des Zählers und des Nenners eines Bruches gefunden, so dividirt man beide durch dasselbe, um den Werth des Bruches in den kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken.

B. Von einigen Kennzeichen, aus welchen man entnimmt, ob und durch welche Zahlen sich eine gegebene Zahl ohne Rest theilen läßt.

§. 135. Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

1) Welche Zahlen sind durch 1 ohne Rest theilbar?

Antw. Durch 1 sind alle Zahlen ohne Unterschied, sowohl ganze als gebrochene, ohne Rest theilbar. Denn der Werth jeder Zahl besteht ja darin, wie viel mal eins sie ist. 4 heißt 4×1, und $\frac{3}{4}$ heißt $\frac{3}{4} \times 1$. Folglich muß die 1 in jeder Zahl so oft enthalten sein, als die Zahl selbst Einheiten hat, d. h. als sie selbst groß ist. Jede Zahl durch 1 dividirt, gibt also sich selbst zum Quotienten. Durch die Division mit 1 ändern sich daher die Zahlen gar nicht, was man auch so ausdrückt: 1 dividirt nicht. (Es ist bekannt, daß 1 auch nicht multiplicirt.) Deßhalb theilt man auch nie mit der Eins, und darum kann man jede Zahl als einen Bruch ansehen, deren Nenner 1 ist; $4 = \frac{4}{1}$; $\frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{1}$. So kann man auch jede Zahl als ein Product ansehen, dessen einer Factor sie selbst und dessen anderer Factor die Eins ist; $4 = 4 \times 1$; $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 1$. (Dieser letzte Satz brauchte, wenn immer festgehalten würde, daß der Werth jeder Zahl in ihrem Verhältniß zur Einheit liegt, eigentlich hier gar nicht zu stehen. Er liegt in der ursprünglichen Vorstellung jeder Zahl.) — Also: die Eins multiplicirt und dividirt nicht.

$$4 = 4 \times 1 = \frac{4}{1} = \frac{4 \cdot 1}{1}.$$

2) Welche Zahlen sind durch 2 ohne Rest theilbar?

Antw. Alle geraden Zahlen sind durch 2 ohne Rest theilbar, und keine andern. Also pflegt man zu antworten. Erwidert man diese Antwort mit Gegenfragen, aber welche Zahlen sind (heißen) gerade Zahlen — so erhält man zur zweiten Antwort: diejenigen, welche durch 2 ohne Rest aufgehen.

So haben wir uns denn in einem Cirkel herumgedreht: ohne Rest theilbar durch 2 sind die geraden Zahlen, und diejenigen Zahlen sind gerade, welche sich durch 2 ohne Rest theilen lassen. Wir geben ein genaues Kennzeichen an. Durch 2 ohne Rest theilbar sind alle diejenigen Zahlen, deren Einer sich durch 2 ohne Rest theilen lassen. Diese Einer sind 2, 4, 6 und 8. Irgend eine Zahl bestehe aus Einern, Zehnern, Hundertern rc., also, da die Hunderter, Tausender rc. in Zehnern ausgedrückt werden können, aus Einern und Zehnern. Jeder Zehner aber ist durch 2 ohne Rest theilbar. Also hängt die Theilbarkeit einer Zahl durch 2 nur von den Einern ab. Sind dieselben durch 2 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl; sind dieselben nicht durch 2 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl nicht. Jene sind 2, 4, 6, 8, diese 1, 3, 5, 7, 9. Zu jenen gehören noch die Zahlen, welche keine Einer haben, also mit einer Null endigen. Man nennt dieselben gerade, die andern ungerade Zahlen, (vermuthlich weil sich jene paarweise aufstellen lassen — : : :, diese nicht — : ˙, : : ˙ u. s. w.)

Frage: Wenn man „gerade oder ungerade" (pair et impair) spielt: ist die Wahrscheinlichkeit mehr für gerade, oder mehr für ungerade?

Antw.: Derjenige, welcher die zu rathenden Stücke in der verschlossenen Hand hält, hat in derselben:

1
1 oder 2
1 oder 2 oder 3
1, 2, 3, 4
1, 2, 3, 4, 5
1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w.

Denkt man sich einen der beiden ersten Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit für paar oder unpaar gleich; denkt man sich einen der 3 ersten Fälle (1, 2, 3), so ist die Wahrscheinlichkeit für unpaar; denkt man sich einen der 4 ersten Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich; denkt man sich die 5 ersten Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit für unpaar u. s. w.; also ist die Wahrscheinlichkeit im Allgemeinen für unpaar. Dieses kommt daher, daß die Zahlenreihe mit 1 anfängt und 1 in dem genannten Spiele für unpaar gilt.

3) Welche Zahlen sind durch 3 ohne Rest theilbar?

Antw. Durch 3 sind alle Zahlen ohne Rest theilbar, deren Quersumme durch 3 theilbar ist — womit zugleich gesagt ist, daß alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 nicht theilbar ist, auch selbst nicht durch 3 getheilt werden können. Quersumme wird hier die Summe aller Zahlen genannt, welche durch ihre einzelnen Ziffern dargestellt sind, ohne Berücksichtigung ihres Stellenwerthes (die Ziffernsumme); die Quersumme der Zahl 7323 ist z. B. 7 + 3 + 2 + 3 = 15. Die Gründe der gege-

benen Antwort sind folgende: Jede Zahl besteht, nach der Einrichtung unseres Zahlensystems, aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern 2c. Theilt man nun einen Zehner, d. h. die Zahl 10 durch 3, so bleibt 1 zum Reste ($10 = 3 \times 3 + 1$). Theilt man einen Hunderter, d. h. die Zahl 100, durch 3, so bleibt auch 1 zum Reste ($100 = 33 \times 3 + 1$). Dasselbe gilt, wenn man einen Tausender, Zehntausender 2c. durch 3 theilt, immer bleibt 1 zum Reste. Sind nun 2, 3, 4, 5 2c. Zehner, Hunderter, Tausender vorhanden, so bleiben auch 2, 3, 4, 5 2c. zum Reste, zu welchen noch die Anzahl der Einer kommt. Ist nun die Summe dieser Reste noch durch 3 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl; ist sie es nicht, so ist es auch die ganze Zahl nicht. Die Zahl 543 besteht z. B. aus 5 Hundertern $= 5 \times 100$, 4 Zehnern $= 4 \times 10$, und 3 Einern. Theile ich 100 durch 3, so bleibt 1 zum Reste, bei 5×100 also 5×1; bei 4×10 bleibt 4×1, bei 3×1 auch 3×1 (wie es wenigstens angesehen werden kann). Ist nun die Summe dieser Reste, d. h. die Quersumme $5 + 4 + 3 = 12$ durch 3 ohne Rest theilbar, welches der Fall ist, so ist es auch die Zahl selbst, d. h. 543; $^{543}/_{3} = 181$.

$$543 = 5 . 99 + 5 + 4 . 9 + 4 + 3$$
$$= 5 . 99 + 4 . 9 + 5 + 4 + 3$$

$5 . 99 + 4 . 9$ sind durch 3 ohne Rest theilbar; also kommt es nur auf die Summe $5 + 4 + 3$ d. h. auf die Quer- oder Ziffernsumme der Zahl 543 an.

Soll daher ein Bruch durch 3 verkürzt werden, so untersucht man vorher die Möglichkeit (welche hier, wie in mathematischen Gegenständen überhaupt, zugleich Wirklichkeit ist) nach dem oben angegebenen Kennzeichen.

$$\frac{642}{942} \overset{3}{\Big|} \frac{214}{314}$$

4) Welche Zahlen sind durch 4 ohne Rest theilbar?

Antw. Alle diejenigen, deren Einer und Zehner (in eine Summe vereinigt, oder als eine Summe angesehen, nämlich in Einern ausgedrückt) durch 4 ohne Rest theilbar sind. Nicht alle Einer sind durch 4 theilbar, auch nicht alle Zehner, denn nicht jeder Zehner ist es, da $^{10}/_{4} = 2$ mit dem Reste 2. Aber ein Hunderter ist durch 4 theilbar, also auch alle Hunderter, folglich auch alle Tausender, wie alle Einheiten noch höherer Ordnung, weil dieselben in Hundertern ausgedrückt werden können. Es kommt also nur auf die Einer und Zehner an. Ist deren Summe, in Einern ausgedrückt, wie es ohnedies gewöhnlich geschieht, durch 4 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl; sonst nicht. Die Zahl 924 kann z. B. durch 4, ohne Rest zu lassen, getheilt werden, da sich 24 durch 4 theilen läßt; die Zahl 925 aber nicht, weil 25 nicht durch 4 theilbar ist.

5) Welche Zahlen sind durch 5 ohne Rest theilbar?

Antw. Alle diejenigen (und keine andern) deren niedrigste Ziffer, welche bekanntlich in der Stelle der Einer steht, 5 oder 0 ist.

Denn der Zehner, folglich auch alle Zehner und darum auch alle höheren Einheiten, welche in Zehnern ausgedrückt werden können, lassen, durch 5 dividirt, keinen Rest. Es kommt also nur noch auf die Einer an. Sind deren 5, so ist die ganze Zahl durch 5 theilbar, sind deren nicht 5, so geht es auch nicht. Sind gar keine Einer da, in welchem Falle die Null die Stelle der Einer ausfüllt, so ist die Zahl durch 5 theilbar, also überhaupt in den beiden Fällen, welche die Antwort nennt.

5	
345	69
680	136

5	
400	80
360	72

6) Welche Zahlen sind durch 6 ohne Rest theilbar?

Antw. Alle diejenigen, welche durch 3 und durch 2 ohne Rest theilbar sind; d. h. diejenigen, deren Quersumme durch 3 theilbar ist und welche gerade Zahlen sind.

Denn wenn sich eine Zahl durch 2 und 3 ohne Rest theilen läßt, so ist also ihre Hälfte und ihr Drittel eine ganze Zahl. Der Unterschied zweier ganzen Zahlen ist auch eine ganze Zahl. Der Unterschied von $^1/_2$ und $^1/_3$ oder $^3/_6$ und $^2/_6$ ist aber = $^1/_6$ der Zahl. Da nun $^1/_6$ der ganzen Zahl eine ganze Zahl ist, so läßt sie sich durch 6 ohne Rest theilen.

(Wenn $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{3}$ ganze Zahlen sind, so ist auch $\frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{3a - 2a}{6} = \frac{a}{6}$ eine ganze Zahl.)

Z. B. 2 : 642 = 321
3 : 642 = 214
6 : 642 = 107

6	
642	107
8526	1421

7) Welche Zahlen sind durch 7 ohne Rest theilbar?

Um die Antwort zu finden, wählen wir ein Beispiel. Es sei die Frage, ob 82874 durch 7 ohne Rest theilbar sei.

82874 ist = 4 × 1 + 7 × 10 + 8 × 100 + 2 × 1000 + 8 × 10000. 4 durch 7 getheilt, läßt den Rest 4 (7 in 1 geht 0 mal, Rest 1, also in 4 Rest 4 × 1 = 4); 10 durch 7 getheilt, läßt den Rest 3; also 7 × 10 den Rest 7 × 3 = 21; 21 ist durch 7 theilbar, also auch 7 × 10, was auch unmittelbar für sich klar ist; wir können daher die 7 Zehner aus der Betrachtung ganz weglassen. 100 durch 7 getheilt, läßt den Rest 2, also 8 × 100 den Rest 8 × 2 = 16; 16 durch 7 getheilt, läßt den Rest 2. 1000 durch 7 getheilt, läßt den Rest 6, also 2 × 1000 den Rest 2 × 6 = 12, oder, wenn man daraus 7 entfernt, den Rest 5. 10000 durch 7 getheilt, läßt den Rest 4, 8 × 10000 also 8 × 4, oder mit Weglassung der Vielfachen von 7 den Rest 4. (Wir hätten auch, da 8

größer ist als 7, gleich 7 aus 8 weglassen können, um gleich den letzten Rest 1 × 4 übrig zu behalten.)

Zählen wir nun alle die gebliebenen Reste zusammen, so erhalten wir den Rest der Einer = 4

—	—	Zehner	= 0
—	—	Hunderter	= 2
—	—	Tausender	= 5
—	—	Zehntausender	= 4
	Summe der Reste		= 15

15 ist durch 7 nicht ohne Rest theilbar, also auch die Zahl 82874 nicht. Dieselbe läßt durch 7 getheilt denselben Rest, wie die Summe der Reste (15) durch 7 getheilt, nämlich 1. Wäre aber die Summe der Reste durch 7 theilbar gewesen, alsdann auch 82874.

Aus diesem Verfahren ergibt sich die Antwort. Es ist zu weitläuftig, um praktisch brauchbar zu sein. Will man wissen, ob eine Zahl durch 7 theilbar ist, so probirt man es.

8) Welche Zahlen sind durch 8 ohne Rest theilbar?

Antw. Alle diejenigen, deren Einer, Zehner und Hunderter (in eine Summe als Einer vereinigt oder in Einern ausgedrückt) durch 8 theilbar sind.

Weder der einzelne Einer, noch der einzelne Zehner, noch der einzelne Hunderter ist durch 8 theilbar, wohl aber der Tausender, denn $^{1000}/_{8} = 125$, also auch jede Anzahl Tausender und folglich auch alle höheren Einheiten als Tausender. Ob also eine Zahl durch 8 theilbar sei, dies hängt von den Hundertern, Zehnern und Einern ab. Ist deren Summe, d. h. also, die durch die 3 letzten Ziffern einer Zahl ausgedrückte Zahl, durch 8 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl; sonst nicht. Die Zahl 854232 ist durch 8 theilbar, da 232 es ist; $^{854232}/_{8} = 106779$.

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ 72280 & 9035 \\ \hline 240792 & 30099 \end{array}$$

9) Welche Zahlen lassen sich durch 9 ohne Rest theilen?

Antw. Alle diejenigen, deren Quersumme durch 9 theilbar ist.

Die Gründe sind dieselben, wie bei der Theilbarkeit der Zahlen durch 3. Wenn man einen Zehner, einen Hunderter, einen Tausender durch 9 theilt, so bleibt immer 1 zum Rest; folglich bleibt bei einer gewissen Anzahl Zehner, Hunderter 2c. und Einer, welche durch 9 dividirt werden, ein Rest, welcher der Summe aller Ziffern, d. h. der Quersumme gleich ist. Ist dieser Rest, d. h. die Quersumme, noch durch 9 theilbar, so ist es auch die Zahl selbst, sonst nicht.

Die Quersumme der Zahl 8424 ist 18; 18 ist durch 9 theilbar, folglich auch 8424; $^{8424}/_{9} = 936$; die Quersumme von 936 ist wieder 18, denn $9 + 3 + 6 = 18$; also ist 936 nochmals durch 9 theilbar. $^{936}/_{9} = 104$. Da die Quersumme von 104 (1 + 4

= 5) nicht mehr durch 9 theilbar ist, so ist es auch die Zahl 104 selbst nicht.

$$\frac{8052174}{9081675} \overset{9}{\Big|} \frac{894686}{1009075}$$

10) **Welche Zahlen sind durch 10 ohne Rest theilbar?**

Antw. Alle diejenigen, in deren Einerstelle eine Null steht.

Denn der Zehner ist durch 10 theilbar; nun kann aber jede Zahl, in deren Einerstelle eine Null steht, als eine Mehrheit von Zehnern angesehen werden; folglich ist jede solche Zahl auch durch 10 theilbar; sonst aber keine.

$$\frac{540}{6900} \overset{10}{\Big|} \frac{54}{690}$$

Kommen daher im Zähler und Nenner eines Bruches Nullen vor, so kann man sie, wenn ihre Anzahl gleich ist, gegen einander ausstreichen, oder, wenn ihre Anzahl ungleich ist, so viele, als die kleinere Anzahl beträgt.

$$^{600}/_{6900} = {}^{6}/_{69}; \quad ^{340}/_{800} = {}^{34}/_{80};$$

11) **Welche Zahlen sind durch 11 ohne Rest theilbar?**

Das Verfahren, welches wir oben bei der Zahl 7 anwandten, läßt sich bei allen Zahlen gebrauchen, und bietet daher eine **allgemeine** Auflösung der hier behandelten Aufgabe dar. Dieselbe besteht in folgenden Sätzen:

a. Man zerlegt die gegebene Zahl, deren Theilbarkeit geprüft werden soll, in ihre einzelnen Stellen;
b. Man untersucht, welchen Rest die gegebene Zahl, durch welche getheilt werden soll, in 10, 100, 1000 u. s. w. läßt;
c. Man multiplicirt diese Reste mit der Anzahl der Zehner, Hunderter u. s. w. der ersten Zahl und summirt diese Producte;
d. Man zählt die Einer zu diesen Producten der Reste;
e. Man untersucht, ob die dadurch entstehende Summe durch den gegebenen Theiler ohne Rest theilbar ist. Wenn ja, — so ist auch die fragliche Zahl ohne Rest theilbar; wenn nein — nicht. In letzterem Falle läßt auch die Zahl denselben Rest, wie die Summe der Reste.

Alles dieses wird durch folgendes Beispiel deutlicher. Wir fragen, ob 87254 durch 11 theilbar sei. Durch 11 getheilt läßt

1 Einer den Rest 1, also 4 E. 4 × 1 = 4,
1 Zehner — 10, — 7 Z. 7 × 10 = 70,
oder beide zusammen (74) den Rest 8,
1 Hunderter den Rest 1, also 2 H. 2 × 1 = 2,
1 Tausender — 10, — 7 T. 7 × 10 = 70 od. 4.
1 Zehntausender den Rest 1, also 8 Z. 8 × 1 = 8.

Die Summe der Reste ist also 8 + 4 + 2 + 8 = 22. 22 ist durch 11 theilbar, also auch 87274.

Diese Methode kann man auf alle Zahlen und alle Theiler anwenden. Da dieselbe aber an Brauchbarkeit abnimmt, je größer der Divisor wird, so folge hier noch eine andere Verfahrungsart, die Theilbarkeit mit 11 zu untersuchen. Die Einer, Hunderter, Zehntausender u. s. w., kurz die ungeraden Stellen einer Zahl, lassen so viel zum Rest, als die betreffende Ziffer Einer hat, also in obigem Beispiele $4 + 2 + 8 = 12$. Alle geraden Stellen einer Zahl lassen, durch 11 dividirt, so viel mal 10 zum Reste, als die betreffenden Ziffern Einer haben; also oben $5 \times 10 + 7 \times 10$. Nun kann 10 als $(11 - 1)$ angesehen werden; 7×10 also als $7 \times 11 - 7 \times 1$. Daraus folgt, daß man die Ziffern der geraden Stellen als negativ, die der ungeraden als positiv ansehen kann. Zieht man nun diese positiven und negativen Werthe zusammen, und bleibt kein Rest, oder läßt sich der Rest durch 11 theilen, so ist auch die betreffende Zahl durch 11 theilbar.

Z. B. 174526. Die positiven Reste sind $6 + 5 + 7 = 18$; die negativen $2 + 4 + 1 = 7$; $18 - 7 = 11$; also ist 174526 durch 11 theilbar.

$9450518 - (8 + 5 + 5 + 9) - (1 + 4) = 27 - 5 = 22$. Ja! *)

12) **Welche Zahlen sind durch 12 ohne Rest theilbar?**

Antw. Alle diejenigen, welche sich durch 3 und durch 4 theilen lassen, d. h. diejenigen, deren Quersumme durch 3 theilbar ist, und deren Zehner und Einer (in Einern ausgedrückt) sich durch 4 theilen lassen.

Wenn eine Zahl sich durch 3 und durch 4 ohne Rest theilen läßt, so ist also sowohl das Drittel als das Viertel derselben eine ganze Zahl, also auch der Unterschied des Drittels und des Viertels, d. h. das Zwölftel der Zahl, eine ganze Zahl. Folglich läßt sich jede Zahl, die sich durch 3 und durch 4 ohne Rest theilen läßt, auch durch $3 \times 4 = 12$ ohne Rest theilen. Ob sich aber eine Zahl durch 3 und durch 4 ohne Rest theilen läßt, erkennt man an den angegebenen Zeichen.

Die Quersumme der Zahl 634236 ist $6 + 3 + 4 + 2 + 3 + 6 = 24$; dieselbe ist durch 3 theilbar, überdies ist auch 36 durch 4 theilbar; folglich auch 634236 durch $3 \times 4 = 12$.

12

594240	49520
792504612	66042051

Anmerkung 1. In Nr. 6 wurde gezeigt, daß jede durch 2 und durch 3 theilbare Zahl auch durch 2×3 theilbar sei, und in Nr. 12 wurde gezeigt, daß jede durch 3 und durch 4 theilbare Zahl auch durch 3×4 theilbar sei. Man lasse sich dadurch nicht zu der Vermuthung oder zu dem Schlusse verleiten, daß jede durch 2 Zahlen theilbare Zahl auch durch das Product derselben theilbar sei. Denn das ist nicht. Die Zahl 36 z. B ist durch 12 und durch 4 theilbar; nicht aber durch 12×4. Doch aber stehen die beiden Fälle in Nr. 6 und in Nr. 12 unter einem allgemeinen Satze, welcher heißt: wenn eine Zahl durch 2 ganze Zahlen, deren Unterschied 1 ist, theilbar ist, so ist sie auch durch

*) Das Ausführlichere darüber findet sich in den Rheinischen Blättern, alte Folge, Band 1, Heft 3.

ihr Product theilbar. Gesetzt z. B., eine Zahl sei durch 8 und durch 9 theilbar, so ist also sowohl $\frac{1}{8}$ der Zahl, wie auch $\frac{1}{9}$ derselben eine ganze Zahl, also auch $\frac{1}{8}$ derselben — $\frac{1}{9}$ derselben $= \frac{9}{72} - \frac{8}{72} = \frac{1}{72}$. 72 ist aber das Product aus 8 und 9; folglich ist dieselbe Zahl auch durch $8 \times 9 = 72$ theilbar.

Der angezogene allgemeine Satz steht unter einem noch allgemeineren, ist einer der Fälle desselben, nämlich des folgenden Satzes: Wenn sich eine Zahl durch zwei andere, die Primzahlen unter sich sind, ohne Rest theilen läßt, so läßt sie sich auch durch das Product dieser „Primzahlen unter sich" ohne Rest theilen.

Dieser Satz ist eine Folge von einem andern, welcher heißt:

Zwei Primzahlen unter sich können in keiner kleineren Zahl aufgehen, als in ihrem Producte.

Daß sie in ihrem Producte aufgehen, folgt von selbst (§. 133, 3). Gingen sie nun beide in einer kleineren Zahl auf, z. B. in $\frac{1}{4}$ ihres Productes, so würde, wenn man sie durch die erste dividirte, $\frac{1}{4}$ der zweiten, und wenn man sie durch die zweite dividirte, $\frac{1}{4}$ der ersten entstehen. Diese Quotienten, diese Viertel einer jeden, müßten ganze Zahlen sein, weil sonst von keinem Aufgehen die Rede sein könnte. Dann hätten also die beiden Primzahlen unter sich den gemeinsamen Theiler 4, wären folglich keine Primzahlen, was gegen die Annahme, also unmöglich ist. Darum können sie in keiner kleineren Zahl, als ihr Product ist, aufgehen.

Jede Zahl nun, welche sich durch zwei „Primzahlen unter sich" theilen läßt, muß entweder ihrem Producte gleich oder ein Vielfaches dieses Productes sein. Wäre sie letzteres nicht, so könnte man von ihr ein Vielfaches des Productes der Primzahlen abziehen, daß eine kleinere Zahl als dieses Product übrig bliebe, welches sich dann (nach §. 133, 2) auch durch die Primzahlen müßte theilen lassen, was zufolge des Bewiesenen nicht möglich ist. — Eine Zahl also, die sich durch

3	und	4	theilen	läßt,	ist	auch durch	3 . 4 = 12	theilbar;
3	—	5	—	—	—	—	3 . 5 = 15	—
2	—	7	—	—	—	—	2 . 7 = 14	—
3	—	8	—	—	—	—	3 . 8 = 24	—
4	—	9	—	—	—	—	4 . 9 = 36	— u. s. w.

Daß der gegebene Beweis sich auf Primzahlen unter sich beschränkt, folgt daraus, daß, wenn sie nicht Primzahlen unter sich sind, also z. B. den gemeinschaftlichen Theiler 4 haben, sie dann auch nothwendig in dem Viertel ihres Products aufgehen.

Anmerkung 2. Weiter verfolgen wir die Untersuchungen über die Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen nicht. Auch überlassen wir es ganz (wie Alles überhaupt) der Einsicht des Lehrers, von vorstehendem Kapitel so viel mit- und vorzunehmen, an der gehörigen Stelle einzuschieben, oder im Zusammenhange zu betrachten, als es nach seinem Ermessen für seine Schüler gut ist. Nicht Alles, was vorstehend aufgeführt wurde, nützt der Praxis unmittelbar. Darnach allein aber ermißt man auch nicht überall den Werth und den Nutzen des Unterrichts. Wo die Verhältnisse sehr beschränkt sind, z. B. Zeit und Talent des Schülers, da läßt man es aber, und mit Recht, bei dem Nächsten, das in diesem Falle das Wichtigste ist, bewenden. Alsdann eignet man dem Schüler Einsicht, Gewandtheit und Fertigkeit in einem kleinern Kreise an. Immer aber sei das Erstrebte ein Ganzes, wenn auch nur ein kleines. Wo aber der Kreis des Wissens und Könnens größer gezogen werden kann, da beschränkt man sich auch nicht auf das kleinste, unentbehrlichste Ganze, sondern zieht freudig die Kreise mit größern Radien, besonders wenn, wie in vorstehendem Kapitel, die Untersuchung uns die innere Schönheit des Gegenstandes enthüllt. Der Hauptcharakter der Zahlenlehre, wie alles eigentlichen Unterrichtes, ist die Wahrheit. Nur selten tritt zu der Wahrheit die Schönheit. Wo es der Fall ist, und wo sie dem Sinne des Schülers rein und ungetrübt entgegen tritt, da gewinnt der Gegenstand einen neuen, ergreifenden Reiz; derselbe wirkt nun von zwei Seiten oder auf zwei Seiten des menschlichen Geistes ein. Um so mehr wird der Mensch von ihm ergriffen und für ihn

gewonnen. Wenn sich solches durch die Sache, nicht durch Worte, ergibt, da übt dieselbe von selbst eine gewaltige Macht über den Menschen aus, ihn nicht nur belehrend, sondern wahrhaft bildend und veredelnd. Stunden, in welchen dieses dem Gefühl des Lehrers kund wird, sind die, in welchen er sich unter den Schülern heimisch fühlt. Das bloße Wort wirkt Solches nicht und kennt Solches nicht. „Worte sind zwar gut; sie sind aber nicht das Beste. Das Beste wird nicht klar durch Worte."

Aufgaben.

1) Durch welche Zahlen sind folgende ohne Rest theilbar: 15, 26, 57, 93, 104, 783, 9745, 10040, 744, 3456, 9402168, 564200136?
2) Durch welche Zahlen lassen sich folgende Brüche aufheben: $^{6}/_{66}$, $^{30}/_{360}$, $^{120}/_{1220}$, $^{66}/_{748}$, $^{168}/_{560}$, $^{4030}/_{12240}$, $^{924}/_{756}$ rc.?

Mehr dergleichen Aufgaben!

Anhang II.

Berechnung der Raumgrößen.

Vorbemerkung. Nicht die ganze Raumlehre, nicht alle in derselben vorkommenden Berechnungen sollen hier abgehandelt werden. Es ist dies eigentlich der Gegenstand der Raum-, nicht der Zahlenlehre. Allein die Zahl wird doch auf den Raum angewandt; in so fern gehören dergleichen Berechnungen auch in die Zahlenlehre. Es sollen daher von den Berechnungen der Raumgrößen nur diejenigen hier vorgenommen werden, welche das gewöhnliche Leben berühren und ohne schwierige Entwickelungen und besondere Voraussetzungen verständlich sind. Wer mehr will, wende sich zu der Raumlehre selbst. An der Stelle, wo wir jetzt stehen, wenden wir die bisher behandelten Zahlgesetze, namentlich die Multiplication und Division, auf Raumgrößen an. Wir hätten dies auch gleich bei Abhandlung der Multiplication und Division in angewandten Zahlen thun können; allein da der vorzulegenden Aufgaben viele sind, so hielten wir es für besser, sie hier zusammenzustellen. Dieselben sind für das Leben und für die Ausbildung des Denkvermögens von größerer Wichtigkeit, als die oben mitgetheilten Berechnungen der Zeit. Denn das Leben bringt häufiger ihre Anwendung, und an dem Raume ist mehr zu betrachten als an der Zeit. Der Raum mit seinen verschiedenen Ausdehnungen übt das Anschauungsvermögen weit vielseitiger als die Zeit mit ihrer einzigen Ausdehnung. Raum und Zeit sind übrigens, wie den Lehrern wohl bekannt sein wird, die Grundformen des menschlichen Anschauungsvermögens, der Raum namentlich für die äußeren Dinge, die Zeit für die äußeren Dinge und für die inneren (geistigen) Zustände. Da nun das klare Denken und Begreifen der äußeren Dinge hauptsächlich von der Ausbildung des Anschauungsvermögens abhängt und man eigentlich nur so viel davon weiß, als man in klaren Anschauungen aufgefaßt hat, so folgt daraus, daß die Raumlehre für den Geist eine sehr tiefe, entwickelnde und bildende Kraft haben müsse, und zugleich folgt daraus die Bedingung, unter welcher der Unterricht in der Raumlehre fruchtbar sein wird.

Diese Bedingung für den fruchtbaren Unterricht in der Raumlehre heißt: alle Wahrheiten derselben müssen aus wirklichen, äußeren und inneren, Anschauungen entwickelt werden; alle Begriffe müssen sich auf Anschauungen gründen. Deßhalb muß der Lehrer zu den folgenden Uebungen einige Werkzeuge (Instrumente) herbeischaffen, nämlich: eine Stange von der Länge einer Ruthe, auf welcher die Eintheilung der Ruthe in 12 und 10 Fuß angebracht ist; ein Fuß jener Art sei in 12 Zoll und ein Zoll in 12 Linien, ein Fuß dieser Art in 10 Zoll und derselbe in 10 Linien eingetheilt; — eine Quadrat-

fläche von einem Fuß Länge (und einem Fuß Breite), welche auf der einen Seite in 144 Quadratzoll, und auf der andern in 100 Quadratzoll eingetheilt ist; — einen Würfel aus Holz, dessen Grundfläche in 100 Quadratzoll und dessen Höhe in 10 Zoll eingetheilt ist. Diese Gegenstände müssen dem Schüler vorgezeigt werden, damit er in klarer Anschauung die Größe dieser Grundmaße auffasse. Ohne diese klare Anschauung sind die nachfolgenden Uebungen Spielereien mit leeren Begriffen. Denn um dir zu zeigen, daß Anschauungen und praktische Erfahrungen hier unentbehrlich sind, frage ich dich: wie lang ist eine Ruthe? Du antwortest z. B.: 12 Fuß. Ich frage dann: wie lang ist der Fuß? Du antwortest etwa: 12 Zoll. Ich frage: wie lang ist der Zoll? Du antwortest: 12 Linien. Ich frage: wie lang ist die Linie? Hier wird das Antworten ein Ende haben, und dann wirst du fühlen, daß die Vorstellung der Länge der Linie, des Zolles, des Fußes &c. nicht aus Begriffen hergenommen, sondern aus der Anschauung erkannt wird. Diese Vorstellungen sind und müssen sein: anschauliche. *) Darum begründe die folgenden Sätze überall durch wirkliche Anschauungen; laß die Schüler demnächst die Länge des Fußes, Zolles &c. auf ihrer Tafel nachzeichnen, den Quadratfuß, Quadratzoll &c. darstellen, und wende die Sätze auf wirkliche Anschauungen in dem Raume, worin du dich mit den Schülern befindest, nämlich auf Länge, Breite, Höhe des Schulzimmers, seiner Geräthschaften &c. an, und laß sie die Ausdehnungen ihres Hauses, Gartens &c. abschreitend oder wirklich messend bestimmen! — Diese Bemerkungen werden hier vorausgeschickt, um sie nicht überall wiederholen zu müssen.

A. Linienberechnung.

§. 136. Begriff der Linie, ihre Eintheilung und Messung.

Unter einer Linie versteht man die Ausdehnung nach einer Richtung. Es gibt gerade und krumme Linien. Hier haben wir es nur mit geraden Linien zu thun. Die Eigenschaft der geraden Linie ist die Länge. Jede gerade Linie hat eine gewisse Länge, aber keine Breite und keine Dicke. Das Zeichen der Linie ist der Strich, welcher aber eine gewisse Breite und Dicke hat. Nach geraden Linien oder Längen bestimmt man die Größe der Ausdehnung der Gegenstände im Raume, der Gränzen der Fläche &c., indem man z. B. von der Länge, von der Breite (welches auch eine gerade Linie ist) einer Tischfläche, des Fußbodens, von der Länge eines Weges, der Höhe eines Baumes &c. spricht.

Man fühlt nun sehr bald das Bedürfniß, anzugeben, wie lang eine Linie sei. Dazu bedarf man eines Mittels. Dieses Mittel ist irgend eine Linie von bekannter und bestimmter Länge. Die Obrigkeit hat darüber Bestimmungen getroffen, welche in verschiedenen Ländern verschieden sind. In unserem Staate sind die gesetzlich festgesetzten Längenmaße die Ruthe, der Fuß, der Zoll, die Linie. Die Größe dieser Längen lernt man durch Anschauung kennen.

*) Daß sich mit den Anschauungen Begriffe verbinden, diese aus jenen entwickelt werden müssen, aus dem Beispiel das Gesetz, aus dem Gesetz die Regel, aus dem Concreten das Abstracte u. s. w., versteht sich von selbst, geschieht auch nachfolgend überall, wo es an rechter Stelle ist. — Der groß- und tiefsinnige Kant thut irgendwo den Ausspruch: „Anschauungen ohne Begriffe sind blind, Begriffe ohne Anschauungen sind leer.“ Was der Mann damit sagen will? Und ob wir Lehrer darnach verfahren?

Die Ruthe wird zweifach eingetheilt: in 12 und in 10 gleiche Theile, Fuß genannt; der Fuß wieder zweifach: in 12 und in 10 gleiche Theile, Zoll genannt; der Zoll ebenfalls zweifach: in 12 und 10 gleiche Theile, Linien genannt. Wenn nämlich die Ruthe (Längenruthe) in 12 Fuß getheilt wird, so werden diese Fuß in 12 Zoll, diese Zoll in 12 Linien getheilt; eben so gehören die Eintheilungen der Ruthe, Fuß und Zoll in 10 gleiche Theile zusammen.

Die eingeführten Zeichen für diese oft wiederkehrenden Größen sind: Ruthe = ^{0}, Fuß = $'$, Zoll = $''$, Linie = $'''$, und wenn man die Linien auch eintheilen will, in Striche oder Punkte; Striche = $''''$.

24 Ruthen = 24^{0}; 9 Fuß = $9'$; 4 Zoll = $4''$; 5 Linien = $5'''$; 3 Striche = $3''''$.

Aus dem Vorstehenden erhellet, daß, wenn Fuß, Zoll und Linien vorkommen, angegeben werden muß, ob die 12= oder die 10theilige (die Duodecimal= oder die Decimal=) Eintheilung gemeint sei, da der 12theilige Fuß nicht dem 10theiligen Fuß gleich ist ꝛc. Die Längen: Fuß, Zoll, Linien sind also ohne Angabe der Eintheilung nicht fest bestimmte Längen, wohl aber die Ruthe. Dieselbe hat eine beständige (constante) Größe, auf welche sich die Messung der Längen gründet. Nach der *zwölftheiligen* Eintheilung, welche gewöhnlich von den Handwerkern gebraucht wird, daher ein solcher Fuß auch Werkfuß oder *Werkschuh* *) (das Wort Fuß ist von der Länge des menschlichen Fußes hergenommen) genannt wird, ist:

die Ruthe = $12'$, der Fuß = $12''$, der Zoll = $12'''$.

Also die Ruthe = $12 \times 12'' = 144''$
$= 12 \times 12 \times 12''' = 1728'''$.

Der Fuß = $12 \times 12''' = 144'''$. Man stellt dies auch so neben einander:

$$1^{0} = 12' = 144'' = 1728'''$$
$$1' = 12'' = 144'''$$
$$1'' = 12''';$$

folglich ist $1''' = \frac{1}{12}'' = \frac{1}{144}' = \frac{1}{1728}{}^{0}$
$1'' = \frac{1}{12}' = \frac{1}{144}{}^{0}$
$1' = \frac{1}{12}{}^{0}$.

Nach der *zehntheiligen* Eintheilung ist

$$1^{0} = 10' = 100'' = 1000'''$$
$$1' = 10'' = 100'''$$
$$1'' = 10''';$$

folglich $1''' = \frac{1}{10}'' = \frac{1}{100}' = \frac{1}{1000}{}^{0}$
$1'' = \frac{1}{10}' = \frac{1}{100}{}^{0}$
$1' = \frac{1}{10}{}^{0}$.

Wenn nun irgend eine Länge *gemessen* werden soll, so muß bestimmt werden, wie viel Ruthen, Fuß, Zoll und Linien sie lang ist, oder wie viel Ruthen, Fuß, Zoll und Linien die zu messende Längen=Ausdehnung enthält. Die Größe einer Länge wird also nach der Anzahl der Ruthen, Fuß ꝛc., welche sie enthält, bestimmt. Die bekannten Längen: Ruthe, Fuß u. s. w. sind also die bekannten Grundeinheiten, auf welche man andere Längen zurückführt, womit man die=

*) Es gibt auch Gegenden, in welchen die Ruthe in 16 Werkschuh eingetheilt wird.

selben mißt. Messen heißt überhaupt, angeben, wie oft irgend eine bekannte Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Begreiflicher Weise muß die Einheit, mit welcher man eine Größe messen will, dieser Größe gleichartig sein. Längen werden mit Längen-Einheiten, Körper mit Körper-Einheiten, Gewichte mit Gewicht-Einheiten, Geldsummen mit Geld-Einheiten, Größen überhaupt mit andern Größen gleicher Art gemessen. Die Grund-Einheiten, mit welchen man mißt, heißen Maße (Gemäße). Ruthen, Fuß 2c. sind also die Grund-Einheiten oder Maße für Ausdehnungen in die Länge, und die Ruthe ist die festliegende eigentliche Grund-Einheit für Längen.

Im gemeinen Leben kommen noch andere Grundmaße vor: Daumbreiten, Handlängen oder Spannen, Schritte, Ellen, Klafter (ungefähr die Länge des Körpers in die Quere bei ausgespannten Armen, von den Fingerspitzen der einen Hand bis zu den Fingerspitzen der andern).

§. 137. Verwandlung der Längen (Resolution, Reduction und Verwandlung der zwölftheiligen Längen in zehntheilige und umgekehrt).

a. Resolution.

Aufgabe 1. 6 Ruthen 4 Fuß 3 Zoll 2 Linien zwölftheiligen Maßes (= zw. M.), wie viel Fuß, Zoll, Linien?

Auflösung. $1^\circ = 12'$; $6^\circ = 6 \times 12' = 72'$; $72 + 4' = 76'$; $1' = 12''$; $76' = 76 \times 12'' = 912''$; $912'' + 3'' = 915''$; $1'' = 12'''$; $915'' = 915 \times 12''' = 10980'''$; $10980''' + 2''' = 10982'''$. Also sind $6^\circ\ 4'\ 3''\ 2''' = 76'\ 3''\ 2'''$
$= 915''\ 2'''$
$= 10982'''$.

Aufgabe 2. 9 Ruthen 9 Fuß 8 Zoll 7 Linien (zehntheiligen Maßes (= zt. M.), wie viel Fuß, Zoll, Linien?

Auflösung. $1^\circ = 10'$; $9^\circ = 9 \times 10' = 90'$; $90' + 9' = 99'$; $1' = 10''$; $99' = 99 \times 10'' = 990''$; $990'' + 8'' = 998''$; $1'' = 10'''$; $998'' = 998 \times 10''' = 9980'''$; $9980''' + 7''' = 9987'''$. Also sind $9^\circ\ 9'\ 8''\ 7''' = 99'\ 8''\ 7'''$
$= 998''\ 7'''$
$= 9987'''$.

Hieraus lernen wir, daß man die Resolution der zehntheiligen Längenmaße kürzer bewerkstelligen könne. Die Anzahl der höheren Einheiten wird, um sie in die nächst niederen zu verwandeln, mit 10 multiplicirt, alsdann die Anzahl der nächst niederen addirt, diese Summe wieder mit 10 multiplicirt 2c. Um aber eine Zahl mit 10 zu multipliciren, braucht man derselben nur eine Null anzuhängen; z. B. $9^\circ = 90'$; $90' = 900''$; $900'' = 9000'''$. An die Stelle der Null tritt dann die schon gegebene Zahl der niederen Einheiten; man braucht dieselbe also nur unmittelbar an die Zahl der nächst höheren Einheiten anzurücken.

Z. B. $9^\circ\ 9' = 99'$; $99'\ 8'' = 998''$; $998''\ 7''' = 9987'''$. Folglich ganz kurz: $9^\circ\ 9'\ 8''\ 7''' = 9987'''$.

Fehlt die nächst niedere Einheit, so vertritt eine Null ihre Stelle; fehlen zwei niedere Einheiten, so vertreten zwei Nullen ihre Stellen.

3. B. 12° 5″ = 120′ + 5″ = 1205″;
64′ 7‴ = 6407‴;
15° 1‴ = 15001‴.

Mehr dergleichen Aufgaben über die Resolution der Längengrößen nach zehn- und zwölftheiligem Maße!

b. Reduction.

Aufgabe 1. 12009 Linien zw. M. — wie viel Zoll, Fuß, Ruthen?

Auflösung. Hier dividirt man mit der Reductionszahl 12 in 12009 Linien, um dieselben in Zoll zu verwandeln, die Anzahl der Zoll durch 12 ꝛc.

```
               12        12
12 | 12009 | 1000 | 83 | 6 Ruthen.
   | 12    | 96   | 72 |
     9 Lin. 40    11 Fuß
            36
            4 Zoll
```

12009‴ = 6° 11′ 4″ 9‴ zw. M.

Aufgabe 2. 12009 Linien zt. M. in Zoll, Fuß, Ruthen zu verwandeln!

Auflösung. Hier dividirt man mehrmals hinter einander, so lange es nöthig ist, mit 10, um die nächst höheren Einheiten zu finden.

```
               10        10
10 | 12009 | 1200 | 120 | 12 Ruthen
   | 10    | 10   | 10  |
     20      20     20
     20      20     20
       9 L.    0     " "
```

12009‴ = 12° 9‴ zt. M.

Beobachten wir hier den Gang der Rechnung, oder überlegen wir, daß eine Zahl durch 10 getheilt wird, wenn man die Stelle der Einer abschneidet, durch 100 getheilt wird, wenn man 2 Stellen, von der Rechten zur Linken, abschneidet, so kann man die Reduction des zehntheiligen Maßes sehr kurz vollführen. Zuerst schneidet man eine Stelle zur Rechten ab; die abgeschnittene Ziffer gibt die Anzahl der übrig bleibenden kleinsten Einheiten an, die übrigen Ziffern die Anzahl der Einheiten der nächst höheren Ordnung; hierauf schneidet man abermals eine Ziffer ab u. s. w.

Demnach sind 42358‴ zt. M. = 4235″ 8‴
= 423′ 5″ 8‴
= 42° 3′ 5″ 8‴
8900462‴ = 890046″ 2‴
= 89004′ 6″ 2‴
= 8900° 4′ 6″ 2‴.

c. Verwandlung des zwölftheiligen Maßes in zehntheiliges und umgekehrt.

Aufgabe 1. $11^0\ 5'\ 2''$ zw. M. — wie viel Ruthen, Fuß, Zoll ꝛc. zehnth. Maßes?

Auflösung. 11^0 zwölfth. Maßes sind auch 11^0 zehnth. Maßes. Die Ruthe ist eine feststehende (constante) Größe. Es sind also nur die $5'\ 2''$ zu verwandeln. Wir drücken dieselben in Theilen der Ruthe aus, weil die Ruthe die Mittelgröße ist, durch welche das zwölfth. und das zehnth. Maß mit einander verbunden sind. $5' = {}^5/_{12}{}^0$; $2'' = {}^2/_{144}{}^0$; ${}^5/_{12}{}^0 + {}^2/_{144}{}^0 = {}^{60}/_{144}{}^0 + {}^2/_{144}{}^0 = {}^{62}/_{144}{}^0$. $1^0 = 10'$ zehnth. M.; also sind ${}^{62}/_{144}{}^0 = {}^{62}/_{144} \times 10' = {}^{620}/_{144}{}'$, zt. M. $= 4' + {}^{44}/_{144}{}'$

$$= 4' + \left\{ \begin{array}{c} {}^{44}/_{144} \times 10'' \\ {}^{440}/_{144}{}'' \\ 3'' + {}^{8}/_{144}{}'' \end{array} \right\} = 4'\ 3'' + \left\{ \begin{array}{l} {}^{8}/_{144} \times 10''' \\ {}^{80}/_{144}{}''' \\ {}^{20}/_{36}{}''' \\ {}^{5}/_{9}{}''' \end{array} \right\}$$

Also sind $11^0\ 5'\ 2''$ zwölfth. M. $= 11^0\ 4'\ 3''\ {}^5/_9{}'''$ zehnth. M.

Aufgabe 2. $24^0\ 9'\ 8''\ 3'''$ zehnth. Maßes — wie viel in zwölftheiligem Maße?

Auflösung. Ruthen sind Ruthen; $24^0 = 24^0$.
$9'\ 8''\ 3'''$ zt. M. $= 983''' = {}^{983}/_{1000}{}^0$.

$$\begin{array}{r} 983 \\ 12 \\ \hline 1966 \\ 983 \\ \hline 11796 \\ 796 \\ 12 \\ \hline 1592 \\ 796 \\ \hline 9552 \end{array} \qquad \begin{array}{l} = {}^{983}/_{1000} \times 12' \text{ zwölfth. M.} \\ = {}^{11796}/_{1000}{}' \\ = 11' + {}^{796}/_{1000}{}' \\ = 11' + \left\{ \begin{array}{l} {}^{796}/_{1000} \times 12'' \\ {}^{9552}/_{1000}{}'' \\ 9 + {}^{552}/_{1000}{}'' \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 552 \\ 12 \\ \hline 1104 \\ 552 \\ \hline 6624 \end{array} \qquad = 11' + 9'' + \left\{ \begin{array}{l} {}^{552}/_{1000} \times 12''' \\ {}^{6624}/_{1000}{}''' \\ 6\,{}^{624}/_{1000}{}'''. \end{array} \right.$$

Also sind $24^0\ 9'\ 8''\ 3'''$ zt. M. $= 24^0\ 11'\ 9''\ 6\,{}^{624}/_{1000}{}'''$ zw. M.

Anmerkung. Die Auflösungen der vorstehenden Aufgaben lassen sich sehr schön übersichtlich durch Buchstaben ausdrücken. Unter den gebrauchten Buchstaben denke man sich beliebige Ziffern.

1) $a^0\ b'\ c'\ d'''$ zw. M. $= \left(a + \frac{b}{12} + \frac{c}{144} + \frac{d}{1728} \right)^0$

$= \left(12\ a + b + \frac{c}{12} + \frac{d}{144} \right)'$

$= \left(144\ a + 12\ b + c + \frac{d}{12} \right)''$

$= \left(1728 a + 144 b + 12 c + d \right)'''$

2) $a^0\ b'\ c''\ d'''$ zt. M. $= \left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} \right)^0$

$= \left(10\ a + b + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} \right)'$

$= \left(100\ a + 10\ b + c + \frac{d}{10} \right)''$

$= \left(1000 a + 100 b + 10 c + d \right)'''$

Oder in Decimalbrüchen:

$a^0\ b'\ c''\ d'''$ zt. M. $= a{,}bcd^0 = ab{,}cd' = abc{,}d'' = abcd'''$.

3) $a^0\ b'\ c''\ d'''$ (zwölfth. M.) $= \left(a + \frac{b}{12} + \frac{c}{144} + \frac{d}{1728} \right)^0$ zw. M.

$= \left(10\ a + \frac{10 b}{12} = \frac{10 c}{144} + \frac{10 d}{1728} \right)'$ zt. M.

$= \left(100\ a + \frac{100 b}{12} + \frac{100 c}{144} + \frac{100 d}{1728} \right)''$ zt. M.

$= \left(1000 a + \frac{1000 b}{12} + \frac{1000 c}{144} + \frac{1000 d}{1728} \right)'''$ zt. M.

4) $a^0\ b'\ c''\ d'''$ (zehnth. M.) $= \left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} \right)^0$ zt. M.

$= \left(12\ a + \frac{12 b}{10} + \frac{12 c}{100} + \frac{12 d}{1000} \right)'$ zw. M.

$= \left(144 a + \frac{144 b}{10} + \frac{144 c}{100} + \frac{144 d}{1000} \right)''$ zw. M.

$= \left(1728 a + \frac{1728 b}{10} + \frac{1728 c}{100} + \frac{1728 d}{1000} \right)'''$ zw. M.

in Decimalbrüchen $= 1728a + 172{,}8b + 17{,}28c + 1{,}728d$ zw. M.

Anmerkung. Das Ausführlichere über diese Resolutionen und Reductionen findet sich in Diesterweg's Anleitung zum Gebrauche des Leitfadens der Formen-, Größen- und Verbindungslehre, für Lehrer. Neue Aufl.

B. Flächenberechnung.

§. 138. Begriff der Fläche, Arten derselben.

Wenn wir einen Körper betrachten, so bemerken wir nur das Aeußere desselben. Dieses Aeußere ist nach zwei Richtungen ausgedehnt, nach Länge und Breite. Wir nennen dieses Aeußere, dieses nach

Länge und Breite ausgedehnte, Fläche. Eine Fläche ist also die Gränze eines Körpers und nach zwei Richtungen ausgedehnt. Wir nennen gewöhnlich die größere dieser Ausdehnungen Länge, die kleinere die Breite. Diese Flächen haben keine Dicke, und man denkt bei ihnen gar nicht an die Dicke, nur an die Größe des Raumes innerhalb der Gränzen der Fläche, d. h. an ihre Länge und Breite. Wie die Flächen die Gränzen der Körper sind, so sind Linien die Gränzen der Flächen.

Es gibt 2 Arten Flächen, gerade oder ebene und krumme Flächen. Ebene Flächen sind solche, in welche eine gerade Linie nach allen Richtungen paßt, mit welcher ein genau gearbeitetes Lineal (Linienzieher) überall zusammenfällt. Hat eine Fläche diese Merkmale nicht, so ist sie krumm. Wir betrachten hier bloß ebene Flächen.

§. 139. Messung der Quadratflächen.

Eine Quadratfläche oder schlechtweg ein Quadrat (Geviert) ist eine vierseitige Fläche, deren Länge und Breite einander gleich sind, oder genauer: welche von 4 gleichen Seiten eingeschlossen ist und 4 gleiche (= rechte) Winkel hat;

z. B. 

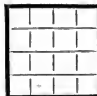
Jede der Seiten eines Quadrats kann man als Länge ansehen. Eine der an sie anstoßenden Seiten ist alsdann die Breite oder Höhe des Quadrats.

Da alle Seiten eines Quadrats einander gleich sind, so braucht man nur eine Seite eines Quadrats zu messen, um alle zu wissen. Beträgt nun eine Seite 1 Fuß; so nennt man eine solche Quadratfläche einen Quadratfuß; ist eine Seite eines Quadrats 1 Zoll lang, so heißt ein solches Quadrat Quadratzoll. Eine Quadratruthe ist demnach eine Quadratfläche, deren Seiten eine Ruthe lang sind. Klar ist es hiernach zugleich, was man unter einer Quadratlinie, einer Quadratelle, einer Quadratmeile versteht.

Gesetzt nun, daß die Seite eines Quadrats 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. Zoll lang wäre, wie groß würden alsdann die Flächen dieser Quadrate sein?







Wenn eine Seite eines Quadrats, folglich alle Seiten desselben, 2, 3, 4 ꝛc. Zoll lang sind, so kann man jede Seite in 2, 3, 4 ꝛc. gleiche Theile theilen, von welchen jeder einen Zoll lang sein wird. Verbindet man die gegen einander überstehenden Theilungspunkte durch gerade Linien mit einander, so wird die Quadratfläche in lauter Quadratzoll eingetheilt, und zwar enthält die Fläche, deren Seiten

2 Zoll lang sind, 4 Quadratzoll
3 — — — 9 —
4 — — — 16 —
5 — — — 25 —

Hieraus ersieht man, daß die Fläche eines Quadrats gefunden wird, wenn man eine Seite desselben mit sich selbst multiplicirt. Die Grundeinheit, womit die Größe der Flächen gemessen wird, ist eine Quadratfläche, deren Seite einer der gleichen Theile ist, in welchen die Länge der Seite angegeben ist. Hat z. B. die Seite eines Quadrats 5 Fuß Länge, so ist die Grundeinheit, das Maß für die Fläche des Quadrats, ein Quadratfuß. Demnach wird die Größe eines Quadrats durch jede seiner Seiten bestimmt.

Die Quadratfläche, deren Seite = 1″ ist = 1 Quad. Zoll = □Z. = □″
— — — — = 8′ — = 8 . 8 = 64 □′
— — — — = 5° — = 5 . 5 = 25 □°.

Nach der zwölftheiligen Eintheilung ist demnach
1 □° 12 × 12 = 144 □′
1 □′ 12 × 12 = 144 □″
1 □″ 12 × 12 = 144 □‴.

Also 1 □° = 144 □′ = 20736 □″ = 2985984 □‴
1 □′ = 144 □″ = 20736 □‴
1 □″ = 144 □‴

Nach der zehntheiligen Eintheilung ist
1 □° = 10 × 10 = 100 □′
1 □′ = 10 × 10 = 100 □″
1 □″ = 10 × 10 = 100 □‴

Folglich 1 □° = 100 □′ = 10000 □″ = 1000000 □‴
1 □′ = 100 □″ = 10000 □‴
1 □″ = 100 □‴.

Mit diesen Quadratflächen werden alle anderen Flächen gemessen. Immer sucht man anzugeben, wie viel Quadratmeilen, Quadratruthen, Quadratfuß ꝛc. eine Fläche hat, deren Größe bestimmt werden soll.

Aufgaben.

1) Wie groß ist die Fläche eines Quadrats, dessen Seite 5 Ruthen 7 Fuß zwölfth. Maßes lang ist?

Auflösung. 5 Ruthen 7 Fuß.

```
     12
    ----
     60
    + 7
    ----
     67
     67
    ----
    469
    402
144 | 4489 | 31 □° 25 □′.
    | 432  |
    ------
     169
     144
    ----
      25
```

Man verwandelt die Ruthen in Fuß, multiplicirt die Anzahl der Fuß mit sich selbst, und reducirt die gefundene Anzahl der Quadratfuß mit 144 auf Quadratruthen.

2) Wie groß ist die Fläche eines Gartens, welcher die Form eines Quadrats hat und der an jeder Seite 88′ 4″ zehnth. Maßes lang ist? (Antw. 78 $\square^0$ 14′ 56 $\square''$.)

Auflösung. Hier bringt man 88′ 4″ auf eine Benennung, nämlich auf Zoll; 88′ 4″ = 884″, welche die Länge einer Seite in Zollen angeben. Diese Zahl, mit sich selbst multiplicirt, gibt die Größe des Gartens in Quadratzoll an; wenn man diese durch 100 theilt, so erhält man die Anzahl der Quadratfuß ꝛc.

$$\begin{array}{r} 884 \\ 884 \\ \hline 3536 \\ 7072 \\ 7072 \\ \hline 781456 \end{array}$$

$781456\ \square'' = 7814\ \square'\ 56\ \square'' = 78\ \square^0\ 14\ \square'\ 56\ \square''$.

3) Der Fußboden eines quadratförmigen Zimmers ist 5° 8′ 9″ lang; wie groß ist die Fläche des Bodens, zehnth. Maßes? (Antw. 34 $\square^0$ 69 $\square'$ 21 $\square''$.)

Auflösung. Man drückt die Länge der Seiten in Zoll aus, multiplicirt diese Zahl mit sich selbst und reducirt.

5° 8′ 9″ = 589″

$$\begin{array}{r} 589 \\ 589 \\ \hline 5301 \\ 4712 \\ 2945 \\ \hline 346921 \end{array}$$

$346921\ \square'' = 34\ \square^0\ 69\ \square'\ 21\ \square''$.

4) 8 $\square^0$ 124 $\square'$ 15 $\square''$ 49 $\square'''$ sollen in Theilen der Ruthe, nämlich der Quadratruthe, demnächst in Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinien ausgedrückt werden, in zwölfth. Maße.

Auflösung:

a. $1\ \square'$ ist $= \frac{1}{144}\ \square^0$, folglich $124\ \square' = \frac{124}{144}\ \square^0$.
$1\ \square'' = \frac{1}{20736}\ \square^0$, folglich $15\ \square'' = \frac{15}{20736}\ \square^0$.
$1\ \square''' = \frac{1}{2985984}\ \square^0$, folglich $49\ \square''' = \frac{49}{2985984}\ \square^0$.

Also sind $8\ \square^0\ 124\ \square'\ 15\ \square''\ 49\ \square''' = (8 + \frac{124}{144} + \frac{15}{20736} + \frac{49}{2985984})\ \square^0$

$$= 8 + \frac{124 \times 144 \times 144 + 15 \times 144 + 49}{2985984}\ \square^0 = 8\,\frac{2573473}{2985984}\ \square^0.$$

b. $1\ \square^0 = 144\ \square'$; also $8\ \square^0 = 8 \times 144\ \square' = 1152\ \square'$;
$1152\ \square' + 124\ \square' = 1276\ \square'$.
$1\ \square'' = \frac{1}{144}\ \square'$; also $15\ \square'' = \frac{15}{144}\ \square'$.
$1\ \square''' = \frac{1}{20736}\ \square'$; also $49\ \square''' = \frac{49}{20786}\ \square'$.

Also sind $8\square^0\ 124\ \square'\ 15\ \square''\ 49''' = (1276 + \frac{15}{144} + \frac{49}{20736})\ \square'$

$$= 1276 + \frac{15 \times 144 + 49}{20736}\ \square' = 2275\,\frac{2209}{20736}\ \square'.$$

c. $1\ \square^0 = 20736\ \square''$; also $8\ \square^0 = 8 \times 20736\ \square'' = 165888\ \square'''$

1 □′ = 144 □″; also 124 □′ = 124 × 144 □″ = 17856 □″; 165888 □″ + 17856 □″ = 183744 □″; 183744 □″ + 15 □″ = 183759 □″.

1 □‴ = $\frac{1}{144}$ □″; also 49 □‴ = $\frac{49}{144}$ □″.

Folglich sind 8 □° 124 □′ 15 □″ 49 □‴ = 183759$\frac{49}{144}$ □″.

d. 1 □° = 2985984 □‴; also 8 □° = 8 × 2985984 □‴ = 23887872 □‴.
1 □′ = 20736 □‴; also 124 □′ = 124 × 20736 □‴ = 2571264 □‴.
1 □″ = 144 □‴; also 15 □″ = 15 × 144 □‴ = 2160 □‴.

$$\begin{array}{r} 23887872 \\ 2571264 \\ 2160 \\ 49 \\ \hline 26461345 \end{array}$$ □‴.

Also sind 8 □° 124 □′ 15 □″ 49‴ = 26461345 □‴.

5) 8 □° 124 □′ 15″ 49‴ zehnth. Maßes auszudrücken in Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinien.

a. 8 □° = 8 □°.
1 □′ = $\frac{1}{100}$ □°; also 124 □′ = $\frac{124}{100}$ □°.
1 □″ = $\frac{1}{10000}$ □°; also 15 □″ = $\frac{15}{10000}$ □°.
1 □‴ = $\frac{1}{1000000}$ □°; also 49 □‴ = $\frac{49}{1000000}$ □°.

Folglich sind 8 □° 124 □′ 15 □″ 49 □‴ = (8 + $\frac{124}{100}$ + $\frac{15}{10000}$ + $\frac{49}{10000000}$) □°

$$= 8 + \frac{124 \times 10000 + 15 \times 100 + 49}{10000000} □^0 = 9\ \frac{241549}{1000000} □^0.$$

b. 1 □° = 100 □′; also 8 □° = 8 × 100 □′ = 800 □′; 800 □′ + 124 □′ = 924 □′.
1 □″ = $\frac{1}{100}$ □′; also 15 □″ = $\frac{15}{100}$ □′.
1 □‴ = $\frac{1}{10000}$ □′; also 49 □‴ = $\frac{49}{10000}$ □′.

Folglich sind 8□° 124□′ 15□″ 49□‴ = (924 + $\frac{15}{100}$ + $\frac{49}{10000}$)□′

$$= 924 + \frac{15 \times 100 + 49}{10000} □' = 924\ \frac{1549}{10000} □'.$$

c. 1 □° = 10000 □″; also 8 □° = 8 × 10000 □″ = 80000 □″.
1 □′ = 100 □″; also 124 □′ = 124 × 100 □″ = 12400 □″.
80000 □″ + 12400 □″ + 15 □″ = 92415 □″.
1 □‴ = $\frac{1}{100}$ □″; also 49‴ = $\frac{49}{100}$ □″.

Folglich sind 8 □° 124 □′ 15 □″ 49 □‴ = 92415$\frac{49}{100}$ □″.

d. 1□° = 1000000□‴; also 8□° = 8 × 1000000□‴ = 8000000□‴.
1 □′ = 10000□‴; also 124□′ = 124 × 10000□‴ = 1240000□‴.
1 □″ = 100 □‴; also 15 □″ = 15 × 100 □‴ = 1500 □‴.

$$\begin{array}{r} 8000000 \\ 1240000 \\ 1500 \\ 49 \\ \hline 9241549 \end{array}$$ □‴.

Folglich sind 8 □° 124 □′ 15 □″ 49 □‴ = 9241549 □‴.

Anmerkung. Die beiden letzten Aufgaben enthalten eigentlich die Verwandlung der Flächenmaße in höhere und niedere Einheiten. Es bleibt dem Lehrer

überlassen, sie mitzunehmen, oder zu überschlagen. Sie eignen sich zur Privatarbeit für gereiftere Schüler. Für diejenigen Lehrer, welche allgemeine Darstellungsweise wünschen, wollen wir diese Aufgaben in Buchstabenausdrücken auflösen, und dann die Verwandlung der Flächengrößen zwölftheiligen Maßes in zehntheiliges und umgekehrt ebenfalls in allgemeinen Zeichen beifügen.

1) Verschiedener Ausdruck für $a\square^0\ b\square'\ c\square''\ d\square'''$ in $\square^0, \square', \square'', \square'''$ zwölfth. Maßes.

$$a\square^0\ b\square'\ c\square''\ d\square''' = \left(a + \frac{b}{144} + \frac{c}{20736} + \frac{d}{2985984}\right)\square^0$$
$$= \left(144\,a + b + \frac{c}{144} + \frac{d}{20736}\right)\square'$$
$$= \left(20736\,a + 144\,b + c + \frac{d}{144}\right)\square'',$$
$$= \left(2985984\,a + 20736\,b + 144\,c + d\right)\square''$$

2) Verschiedener Ausdruck für $a\square^0\ b\square'\ c\square''\ d\square'''$ in $\square^0, \square', \square'', \square'''$ zehnth. Maßes.

$$a\square^0\ b\square'\ c\square''\ d\square''' = \left(a + \frac{b}{100} + \frac{c}{10000} + \frac{d}{1000000}\right)\square^0$$
$$= \left(100\,a + b + \frac{c}{100} + \frac{d}{10000}\right)\square'$$
$$= \left(10000\,a + 100\,b + c + \frac{d}{100}\right)\square''$$
$$= \left(1000000\,a + 10000\,b + 100\,c + d\right)\square'''$$

oder in Decimalbrüchen $= a,0b\,0c\,0d\ \square^0$
$= a0b,0c0d\ \square'$
$= a0b0c,0d\ \square''$
$= a0\,b0\,c0\,d\ \square'''$.

Hier springt die Bequemlichkeit und leichte Uebersichtlichkeit der Decimalbruch-Rechnung in die Augen.

3) Verwandlung von $a\square^0\ b\square'\ c\square''\ d\square'''$ zwölftheiligen Maßes in zehntheiliges Maß.

$$a\square^0\ b\square'\ c\square''\ d\square''' = \left(a + \frac{b}{100} + \frac{c}{20736} + \frac{d}{2985984}\right)\square^0_{\text{zw.M.}}$$
$$= \left(100\,a + \frac{100\,b}{144} + \frac{100\,c}{20736} + \frac{100\,d}{2985984}\right)\square'_{\text{zt.M.}}$$
$$= \left(10000\,a + \frac{10000\,b}{144} + \frac{10000\,c}{20736} + \frac{10000\,d}{2985984}\right)\square''_{\text{zt.M.}}$$
$$= \left(1000000a + \frac{1000000b}{144} + \frac{1000000c}{20736} + \frac{1000000d}{2985984}\right)\square'''_{\text{zt.M.}}$$

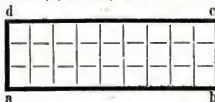
4) Verwandlung von $a\square^{0}\ b\square'\ c\square''\ d\square'''$ zehnth. M. in zwölfth. M.

$$a\square^{0}\ b\square'\ c\square''\ d\square''' = \left(a + \frac{b}{100} + \frac{c}{10000} + \frac{d}{1000000}\right)\square^{0}\ \text{zt. M.}$$
$$= \left(144\ a + \frac{144\ b}{100} + \frac{144\ c}{10000} + \frac{144\ d}{1000000}\right)\square'\ \text{zw. M.}$$
$$= \left(20736\ a + \frac{20736\ b}{100} + \frac{20736\ c}{10000} + \frac{20736\ d}{1000000}\right)\square''\ \text{zw. M.}$$
$$= \left(2985984a + \frac{2985984b}{100} + \frac{2985984c}{10000} + \frac{2985984d}{1000000}\right)\square'''\ \text{zw. M.}$$

oder in Decimalbrüchen $= a{,}0b0c0d\ \square^{0}$ zehnth. M.
$= 144.\ a{,}0b0c0d\ \square'$ zwölfth. M.
$= 20736.\ a{,}0b0c0d\ \square''$ zwölfth. M.
$= 2985984.\ a{,}0b0c0d\ \square'''$ zwölfth. M.

§. 140. Messung oder Berechnung des Flächeninhaltes rechtwinkliger Flächen überhaupt.

Außer dem Quadrate oder dem gleichseitigen rechtwinkligen Vierecke gibt es noch andere vierseitige Figuren. Wir betrachten von denselben nur noch die nicht gleichseitigen rechtwinkligen Vierecke, welche man **Rechtecke** (Rektangel) nennt. In demselben sind alle Winkel und die gegenüberstehenden Seiten einander gleich. Gewöhnlich nennt man die längere die **Länge**, die kürzere die **Breite** des Rechtecks, jene auch die **Grundlinie** (Basis), diese die **Höhe**.



In dem Rechtecke abcd ist z. B. ab (dc) die Länge oder Grundlinie, ad (bc) die Breite oder Höhe. In demselben sind, wie in allen Rechtecken, alle Winkel (als rechte Winkel) einander gleich und ab = dc, bc = ad. Die Größe der Fläche des Rechtecks hängt nicht von den Winkeln, sondern von den Seiten ab, sowohl von der Länge als von der Breite. Bei gleichbleibender Länge kann die Breite und damit die Fläche sich ändern, und bei gleichbleibender Breite kann die Länge sich verändern, und damit ändert sich auch die Fläche des Rechtecks. Sie wächst mit dem Wachsthum der Länge und mit dem Wachsthum der Breite; sie nimmt ab mit der Abnahme der Länge und mit der Abnahme der Breite. Die Größe eines Rechtecks hängt von der Länge **und** Breite desselben ab. Kennt man daher diese beiden Seiten, so ist dadurch die Fläche des Rechtecks bestimmt. Wir fragen nun, wie man die Größe der Fläche eines Rechtecks berechnet. Um dieses zu bewerkstelligen, muß die Größe der 2 aneinander liegenden Seiten des Rechtecks in Zahlen und zwar in denselben Einheiten bekannt oder gegeben sein. Angenommen, die Länge des Rechtecks ab betrage 9 Zoll, die Breite 3 Zoll, so wird das Rechteck, wenn man die einander gegenüberstehenden Theilungspunkte der Zoll mit einander durch gerade Linien verbindet, in 3×9 oder $9 \times 3 = 27$ Quadratzoll getheilt, und so groß ist die Fläche des Rechtecks.

Man findet daher die Fläche eines Rechtecks, wenn man die Zahlen, welche die Länge und Breite des Rechtecks in denselben Einheiten ausdrücken, mit einander multiplicirt. Dieses Product gibt uns die Menge der quadratförmigen Flächen an, in welche das Rechteck zerfällt und von welchen jede gleich ist demjenigen Quadrate, welches die Grundeinheit, in welcher die Länge und Breite des Rechtecks ausgedrückt sind, zur Einheit hat. Kurzweg drückt man diesen Satz so aus: Man findet die Fläche eines Rechtecks, wenn man die Länge mit der Breite multiplicirt, welcher kurze (ungenügende) Ausdruck aber nur dann zulässig ist, wenn die vorhergehenden Sätze begriffen sind. Sind Länge und Breite eines Rechtecks in Schuhen ausgedrückt, so ist die Grundeinheit für die Größe der Fläche ein Quadratschuh; sind Länge und Breite in Meilen angegeben, so ist die Grundeinheit der Fläche die Quadratmeile. Sind Länge und Breite nicht in gleichnamigen Zahlen ausgedrückt, so müssen dieselben vor der Multiplication gleichnamig gemacht werden. Die Länge eines Rechtecks sei z. B. = 10′ 4″, die Breite = 8′, so müssen Länge und Breite in Zoll angegeben und diese alsdann mit einander vervielfacht werden.

10′ 4″ = 104″ zehnth. M.; 8′ = 80″; 104 × 80 = 8320, nämlich 8320 mal die Grundfläche; d. h. den Quadratzoll, also 8320 □″; durch 100 getheilt, gibt es 83 □′ 20 □″. In der Multiplication von 104 und 80 vervielfachte man nun nicht 104 Zoll mit 80 Zoll; denn 2 benannte Zahlen können als solche bekanntlich nicht mit einander multiplicirt werden. Man sieht sie als unbenannte Zahlen an; ihr Product nennt uns die Menge der Quadrate, welche das Rechteck enthält und deren Seiten der Grundeinheit, in welcher die Seiten des Rechtecks ausgedrückt sind, gleich sind. — Sind die Länge und Breite des Rechtecks in gemischten Zahlen angegeben, so verwandelt man sie zuerst in Brüche und multiplicirt dieselben mit einander. Die Richtigkeit dieses Verfahrens zur Auffindung der Fläche kann man auch anschaulich nachweisen. Die Länge eines Rechtecks sei = $6\frac{1}{2}$′, die Breite $4\frac{3}{4}$ Fuß. Alsdann sind $6\frac{1}{2}$ mit $4\frac{3}{4}$ zu vervielfachen. Dieses Product kann entweder durch Vervielfachung aller Theile der gemischten Zahlen oder durch Vervielfachung der in Brüche verwandelten gemischten Zahlen geschehen.

$3/4$ $1/2$

$$\begin{array}{l} 6\frac{1}{2} \\ 4\frac{3}{4} \\ \hline 4 \times 6 = 24 \\ 4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ 6 \times \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \\ \hline 30\frac{7}{8} \,\square' . \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6\frac{1}{2} = \frac{13}{2} \\ 4\frac{3}{4} = \frac{19}{4} \\ \hline 6\frac{1}{2} \times 4\frac{3}{4} = \frac{13}{2} \times \frac{19}{4} \\ = \frac{247}{8} \\ = 30\frac{7}{8}. \end{array}$$

Die Multiplication der einzelnen Theile der beiden Zahlen ist in obiger Figur nachgewiesen und anschaulich gemacht. Dieselbe zeigt zuerst das Product 4 × 6 = 24□′. Rechts von denselben liegen die 4 × ½ = 2□′. Ueber denselben die 6 × ¾ = $^{18}/_{4}$ = 4½□′, und oben rechts in der Ecke ½ × ¾ = ⅜□′. In Summa also 24 + 2 + 4½ + ⅜ = 30⅞□′. — Die Richtigkeit des zweiten Products würde sich gleichfalls anschaulich nachweisen lassen, wenn man die Länge in $^{13}/_{2}$ und die Breite in $^{19}/_{4}$ Fuß eintheilte und die Theilungs-Linien zöge.

Anmerkung. Der Lehrer veranlasse die Schüler, auf ihren Tafeln die vorstehende Nachweisung mit andern Zahlen zu versuchen; er lasse sie Rechtecke zeichnen und theilen, die Rechtecke in dem Gesichtskreise der Schüler, die 6 Flächen des Zimmers, die Flächen der Tische, Thüren, Fenster rc. nach Länge, Breite und Flächenraum abschätzen, demnächst wirklich messen und berechnen, zugleich aber in verkleinertem (verjüngtem) Maßstabe zeichnen, entweder nach bloßem Augenmaße oder mit dem sogenannten verjüngten Maßstabe und dem Zirkelinstrumente (Passer). Die Einrichtung, die Verfertigungsart und der Gebrauch des verjüngten Maßstabes muß den Schülern gezeigt werden.

Aufgaben.

1) Eine Fläche (d. h. hier immer eine Fläche, welche die Figur eines Rechtecks hat) ist 4° 2′ 8″ lang und 1° 3′ breit (zwölfth.); wie groß ist ihr Flächenraum? (Antw. 5□° 40□′.)

Berechnung:

```
  4° 2′ 8″                 1° 3′
 × 12                     × 12
  50                        15
 × 12                     × 12
  608″                      30
   180                     15
 48640                     180″
 608
            144
144 | 109440□″ | 760□′ | 5□° 40□′.
      1008       720
       864        40
       864
         0
```

2) Eine Wiese ist 109′ 7″ lang und 82′ 3″ (zehnth.) breit; wie groß ist ihre Fläche? (Antw. 90□° 28□′ 31□″.)

Berechnung:

```
109′ 7″ = 1097″          82′ 3″ = 823″.
            823
           3291
          2194
         8776
        902831□″ = 90□° 28□′ 31□″.
```

3) Ein Feld ist 10° 7′ 3″ lang, 7° 3′ 4″ (zehnth.) breit; wie groß ist seine Fläche? (Antw. 78□° 75□′ 82″.)

Berechnung: 10° 7′ 3″ = 1073″ 7° 3′ 4″ = 734″

```
   1073″
    734
  ------
   4292
  3219
 7511
 --------
 787582□″ = 78□° 75□′ 82□″.
```

C. Körperberechnung.

§. 141. Begriff des Körpers und seines Grundmaßes, des Würfels (Cubus).

Körper heißt Alles, was einen begränzten Raum einnimmt. Nehmen wir in einem Körper einen Punkt an, so ist der Körper von diesem Punkte aus nach allen Richtungen ausgedehnt. Zieht man durch diesen Punkt eine gerade Linie, errichtet auf derselben in dem Punkte eine gerade Linie senkrecht, so kann man nur noch eine dritte Linie so ziehen, daß jede der drei Linien auf den beiden andern senkrecht steht. Weil also im Allgemeinen nur 3, nicht 4 oder mehr Linien sich durch einen Punkt so ziehen lassen, daß sie auf einander senkrecht stehen, so sagt man in dieser Beziehung, daß der Körper nur nach 3 Richtungen ausgedehnt sei. Die Linie ist nach einer, die Fläche nach 2, der Körper nach 3 Richtungen ausgedehnt. Die Ausdehnung der Linie heißt Länge, die Ausdehnungen der Fläche heißen Länge und Breite, die Ausdehnungen des Körpers Länge, Breite und Höhe. Statt Breite und Höhe sagt man auch zuweilen Tiefe oder Dicke. Diese 3 Ausdehnungen des Körpers können einander gleich oder ungleich sein. Ein solcher Körper, an welchem die 3 Ausdehnungen einander gleich sind, ist der Würfel = Cubus. Derselbe ist ein achteckiger Körper, welcher von 6 Flächen, die gleiche Quadrate sind, eingeschlossen ist. Alle Linien (Kantenlinien) an dem Würfel sind einander gleich. Ihrer stoßen in jeder Ecke 3 zusammen. Je 4 dergleichen begränzen eine Fläche. Diese Flächen stoßen rechtwinklig zusammen. Daher sind die Kanten rechtwinklige Kanten. In jeder dieser Flächen liegen 4 rechte Winkel; in Allem sind also am Würfel $6 \times 4 = 24$ rechte Winkel; an jeder Ecke stoßen 3 dieser Winkel zusammen; es gibt also am Würfel $^{24}/_{3} = 8$ Ecken. Jede der 6 den Würfel begränzenden Flächen ist einer andern Fläche gleichlaufend, und sie steht auf den 4 übrigen senkrecht. Kennt man eine der Kantenlinien des Würfels, d. h. weiß man, wie lang eine ist, so kennt man die Länge aller, denn alle sind einander gleich. Je nach der Länge dieser Kantenlinien bekommt der Würfel den Namen. Sind dieselben 1 Zoll lang, so heißt der Würfel Cubikzoll (= Würfelzoll); sind sie einen Fuß, eine Ruthe, eine Meile lang, so erhält er den Namen Cubikfuß, Cubikruthe, Cubikmeile; d. h. der Würfel nimmt einen Raum ein von der Größe eines Cubikzolles, -fußes ꝛc.

Berechnung des Cubikinhaltes der Körper.

Solche cubische Körper, deren Länge, Breite und Höhe dieselbe Größe und Ausdehnung haben, dienen zur Bestimmung der Größe des körperlichen oder cubischen Raumes oder des Cubikinhaltes der Körper überhaupt. Bei den Linien waren Längenruthen, Längenfuß rc., bei den Flächen Quadratruthen, Quadratfuß rc., bei den Körpern sind Cubikruthen, Cubikfuß rc. die Grundeinheiten, mit welchen die übrigen, ihnen gleichartigen Größen gemessen werden. Bei Körpern wird nämlich bestimmt, wie oft sie irgend eine körperliche Grundeinheit, z. B. den Cubikzoll, Cubikfuß, enthalten. Wenn eines Würfels Seite (folglich auch seine Breite und Höhe) 1 Zoll lang ist, so beträgt sein körperlicher Inhalt 1 Cubikzoll (= 1 C. Z.)

Ist seine Länge (folglich auch seine Breite und Höhe) 2 Zoll, so beträgt jede Seitenfläche des Würfels = 2 × 2 = 4 Quadratzoll. Bis zu einer Höhe von 1 Zoll liegen auf diesen 4 Quadratzoll 4 Cubikzoll, und von da bis zur Höhe von 2 Zoll liegt noch eine Schicht von 4 Cubikzoll; also ist der Cubikraum dieses Cubus = 2 × 2 × 2 = 8 Cubikzoll. Aus denselben Gründen ist der cubische Raum, welchen ein Würfel einnimmt, dessen Länge

= 3″	ist,	3 ×	3 ×	3 =	27	C. Z.
= 4″	—	4 ×	4 ×	4 =	64	C. Z.
= 5″	—	5 ×	5 ×	5 =	125	C. Z.
= 6″	—	6 ×	6 ×	6 =	216	C. Z.
= 7″	—	7 ×	7 ×	7 =	343	C. Z.
= 10″	—	10 ×	10 ×	10 =	1000	C. Z.
= 20″	—	20 ×	20 ×	20 =	8000	C. Z.

Es folgt daraus die Regel: Um den körperlichen Inhalt (den Rauminhalt, Cubikinhalt) eines Würfels zu finden, multiplicirt man die Zahl, welche die Länge desselben angibt, mit sich selbst und dieses Product abermals mit derselben Zahl. Das dadurch entstehende Product drückt die Anzahl derjenigen körperlichen Grundeinheiten aus, welche der Würfel enthält, und von welchen jede einzelne der cubischen Grundeinheit des Würfels gleich ist, die durch die Einheiten, in welchen die Länge angegeben ist, bestimmt wird. Wenn die Länge eines Würfels = 5′ ist, so ist die körperliche Grundeinheit, durch welche die Größe des Würfelraumes bestimmt werden soll, 1 Cubikfuß. Die Anzahl der Cubikfuß, welche der Würfel enthält, ist nun = 5 × 5 × 5 = 125.

(Man thut wohl, die eben aufgestellte Regel durch einen Würfel, welcher in kleinere Würfel zerschnitten ist, zu versinnlichen, also, daß die Schüler die aufzustellenden Sätze selbst finden.)

Aus dem Bisherigen erhellet, wie man cubische Räume auf niedere und höhere Einheiten bringt, d. h. resolvirt und reducirt. Die in dieser Hinsicht aufzulösenden Fragen sind: Wie viel niedere Einheiten hat eine Cubikruthe, ein Cubikfuß rc.? Wie führt man niedere Einheiten auf höhere zurück?

a. Zwölftheilig.

$1^\circ = 12' = 144'' = 1728'''$.
$1\square^\circ = 144\square' = 20736\square'' = 2985984\square'''$.
1 C. R. = 12 × 12 × 12 C. Fuß = 1728 C. F.
= 144 × 144 × 144 C. Z. = 2985984 C. Z.
= 1728 × 1728 × 1728 C. L. = 5159780352 C. L.

b. Zehntheilig.

$1^\circ = 10' = 100'' = 1000'''$.
$1\square^\circ = 100\square' = 10000\square'' = 1000000\square'''$.
1 C. R. = 10 × 10 × 10 = 1000 C. F.
= 100 × 100 × 100 = 1000000 C. Z.
= 1000 × 1000 × 1000 = 1000000000 C. L.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß Cubikruthen durch Multiplication mit 1728 und 1000 in Cubikfuß, mit 2985984 und 1000000 in Cubikzoll, mit 5159780352 und 1000000000 in Cubiklinien verwandelt werden. Eben so erhellet leicht, daß der zwölftheilige Cubikfuß = 12 × 12 × 12 = 1728 C. Zoll und der zehntheilige = 10 × 10 × 10 = 1000 C. Zoll ist. Deßgleichen ist der zwölftheilige Cubikzoll = 12 × 12 × 12 = 1728 C. Linien, der zehntheilige Cubikzoll = 10 × 10 × 10 = 1000 C. Linien. Man löst daher Cubikruthen, Cubikfuß, Cubikzoll jedesmal durch Multiplication mit 1728 oder 1000 in nächst niedere Einheiten auf, und umgekehrt führt man niedere Einheiten durch Division mit 1728 und 1000 auf höhere zurück.

Aufgabe 1. 124 C. R. 648 C. F.; wie viel Cubikzoll, zwölfth. und zehnth.?

Auflösung. 124 C. R. = 124 × 1728 C. F. zwölfth. = 124 × 1000 C. F. zehnth.

```
1000
 124
------
124000
 + 648
------
124648
 × 1000 C. Z.
------
124648000 C. Z. zehnth.
```

```
  1728
   124
  ------
  6912
 3456
1728
  ------
 214272
  + 648
  ------
 214920
 × 1728 C. Z.
  ------
 1719360
 429840
1504440
214920
---------
371381760 C. Z. zwölfth.
```

Aufgabe 2. (5094 C. F. + 942 C. Z. + 1245 C. L.) × 35 — wie viel Cubikruthen, Cubikfuß, Cubikzoll und Cubiklinien zehntheiligen Maßes?

Auflösung. Entweder multiplicirt man zuerst die Cubiklinien mit 35, verwandelt dieselben in C. Z., multiplicirt nun die Cubikzoll mit 35, addirt die vorhergefundene Anzahl Cubikzoll hinzu, reducirt dieselben auf Cubikfuß rc. Oder man verwandelt Alles in Cubiklinien, multiplicirt nun mit 35 und reducirt dann. Wir wählen das letztere Verfahren.

(5094 C. F. + 942 C. Z. + 1245 C. L.) × 35.
= 5094000 + 942 C. Z. + 1245 C. L.
= 5094942 C. Z. + 1245 C. L.
= 5094942000 C. L. + 1245 C. L.
= 5094943245 C. L. × 35
× 35

25474716225
15284829735

178323013575
= 178323013 C. Z. + 575 C. L.
= 178323 C. F. + 13 C. Z. + 575 C. L.
= 178 C. R. + 323 C. F. + 13 C. Z. + 575 C. L.

Wir ersehen daraus, daß die Resolution und Reduction zehntheiliger Cubikmaße sehr leicht ist. In jenem Falle hängt man den höheren Einheiten jedesmal 3 Nullen an, in diesem schneidet man von den niederen Einheiten 3 Stellen ab, u. s. w.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, dessen Länge = 5 Ruthen 11 Fuß zwölfth.?

Berechnung: 5 R. 11 F.
× 12

60
+ 11

71
× 71

71
497

5041
× 71

5041
35287

1728 | 357911 C.F. | 207 C. R. 215 C. F. = 207 C° 215 C′.
3456

12311
12096

215

Man verwandelt die Ruthen und Fuß in Fuß, = 71′, multiplicirt dieselben mit sich selbst und dieses Product abermal mit 71; dann reducirt man die Cubikfuß auf Cubikruthen.

Aufgabe 4. Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, dessen Länge $24\frac{3}{5}$ Fuß zwölftheiligen Maßes beträgt?

Berechnung: $24\frac{3}{5}' = \frac{123}{5}'$.

$\frac{123}{5} \times \frac{123}{5} \times \frac{123}{5}$

Man richtet die gemischte Zahl $24\frac{3}{5}$ ein $= \frac{123}{5}$, multiplicirt dieselbe mit sich selbst, das Product nochmals mit $\frac{123}{5}$, zieht die Ganzen heraus und reducirt.

```
       123      5
       123      5
    ------   ----
       369     25
      246       5
     123     ----
    ------    125
     15129
       123
    ------
     45387
    30258
   15129   1728
125 | 1860867 | 14886 C'. | 8 C°. 1062 117/125 C'.
    | 125     | 13824
    ---------  ---------
      610        1062 C'.
      500
    ------
     1108
     1000
    ------
     1086
     1000
    ------
      867
      750
    ------
      117/125 C'.
```

§. 142. Berechnung des Rauminhaltes anderer Körper.

Wir betrachten hier nur solche Körper, deren Gestalt dem Würfel ähnlich ist, d. h. solche, welche ebenfalls rechtwinklige Kanten haben und von 6 ebenen Figuren begränzt sind, von welchen je 2 einander gegenüberstehende gleichlaufend und Rechtecke sind (senkrechte Parallelepipeda). Eine dieser Seitenflächen wird als die Grundfläche des Körpers angesehen; 2 an einanderstoßende Seiten derselben bestimmen die Länge und Breite des Körpers und die auf der Grundfläche senkrecht stehende Linie die Höhe (Dicke) des Körpers. Diese Ausdehnungen, Länge, Breite und Höhe, können alle ungleich, oder 2 derselben können einander gleich sein. Dieser Umstand hat auf die Art der Berechnung des cubischen Inhaltes keinen Einfluß. Angenommen, die Länge der Grundfläche (des Körpers), sei 6', die Breite derselben (desselben) 5', so hat die Grundfläche $6 \times 5 = 30\square'$. Beträgt nun die Höhe des Körpers 1', so ist sein körperlicher Raum $= 1 \times 30$ C'. So oft er 1' hoch ist, so oft beträgt sein Rauminhalt 30 Cubikfuß. Wäre die Höhe $= 4'$, so hätte er $4 \times 30 = 120$ C'. Hieraus folgt die Regel: Um den körperlichen Raum eines **rechtwinkligen** (von 6 Rechtecken eingeschlossenen) **Körpers zu berechnen, multiplicirt man die Zahlen, welche die Länge, Breite und Höhe des Körpers ausdrücken, mit einander.** Das Product nennt die Anzahl der Würfel, welche der

Körper enthält, von denen jeder zur Seitenlänge eine der Grundeinheiten hat, in welchen die Seiten des Körpers ausgedrückt sind.

Anmerkung. Diesen Satz gewinnt man leicht auf dem Wege der Anschauung. Der Lehrer zeigt einen Körper vor, welcher von Rechtecken begränzt wird, wozu allenfalls ein Buch dienen kann. Alsdann werden Länge, Breite und Höhe angegeben, die Größe der Grundfläche wird gesucht rc.

Hier zeigt man zu gleicher Zeit, daß es gleichgültig sei, welche Seitenfläche des Körpers als Grundfläche angesehen wird.

Oder man legt mehrere kleine einander gleiche Würfel zusammen, so daß sie einen rechtwinkligen Körper bilden. Dies kann bei derselben Anzahl der Würfel oft auf mehrfache Weise geschehen. 60 Cubikzoll z. B. können so gelegt werden, daß der Körper 5″ lang, 4″ breit, 3″ hoch, oder 6″ lang, 5″ breit und 2″ hoch u. s. w. ist.

Aufgabe 1. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Holzhaufens, welcher 10′ lang, 8′ breit, 6′ hoch ist? (Antw. 480 C′.)

Auflösung. 10′ lang, 8′ breit, gibt eine Grundfläche von 10 × 8 = 80□′; 6′ hoch gibt auf derselben 6 Schichten, von denen jede 80 C′. enthält; überhaupt also 6 × 80 = 480 C′.

Aufgabe 2. Wie viel Cubikfuß Luft sind in einem Zimmer, welches 25′ lang, 18′ breit, 14′ hoch ist? (Antw. 6300 C′.)

Auflösung. Die Größe des Fußbodens des Zimmers beträgt 25 × 18□′ = 450□′; diese mit der Höhe = 14 multiplicirt, = 450 × 14 = 6300, gibt die Anzahl der Cubikfuß im Raume des Zimmers, folglich auch die Anzahl der Cubikfuß Luft.

Aufgabe 3. Ein Brunnentrog ist 14′ 2″ lang, 10′ breit, 4′ 8″ tief, zehnth. Maßes, wie viel Cubikfuß enthält er? (A. 681 3/5 C′.)

Ausrechnung: 14′ 2″ = 142″; 10′ = 100″; 4′ 8″ = 48″.

```
   × 100
  ------
   14200
      48
  ------
   1136
   568
  ------
  681600
```

681600 C″. = 681 C′. 600 C″. = 681 3/5 C′.

§. 143. Vermischte Aufgaben über Raumberechnungen.

Aufgabe 1. Um wie viel ist der zehntheilige (Decimal=) Fuß größer als der zwölftheilige (Duodecimal=) Fuß? (Antw. Um $1/60^0$ oder 1/5 Duod. F. oder 1/6 Dec. F.)

Auflösung. 1 Dec. F. = $1/10^0$, 1 Duod. F. = $1/12^0$. Der Unterschied des Dec. F. und Duod. F. ist also = $1/10^0 - 1/12^0 = 12/120 - 10/120 = 2/120 = 1/60^0$ oder = 12/60 Duod. F. = 1/5 Duod. F. = 10/60 = 1/6 Dec. F. Also ist der Decimal=Fuß um 1/60 Ruthe oder um 1/5 Duod. F. oder um 1/6 Dec. F. größer als der Duod. F.

Aufgabe 2. Um wie viel ist der zwölftheilige Zoll kleiner als der zehntheilige? (A. Um $11/3800^0$ = 198/475 Duod. Z. = 11/38 Dec. Z.)

Auflösung. Da die Ruthe für beide Eintheilungen dieselbe Größe hat, so muß man, damit die Größen, von welchen die Rede ist,

in derselben Einheit ausgedrückt seien (ohne welches die Vergleichung unmöglich ist), sie in Theilen der Ruthen ausdrücken.

1 Duod. Z. = $^1/_{12}{}' = {}^1/_{144}{}^0$; 1 Dec. Z. = $^1/_{10}{}' = {}^1/_{100}{}^0$. Also ist jener um $^1/_{100}{}^0 - {}^1/_{144}{}^0 = {}^{144}/_{14400} - {}^{100}/_{14400} = {}^{44}/_{14400}{}^0$ kleiner als dieser; $^{44}/_{14400}{}^0 = {}^{11}/_{3800}{}^0$.

$$^{11}/_{3800} = \frac{11 \times 144}{3800} = {}^{1584}/_{3800} = {}^{198}/_{475} \text{ Duod. Z.}$$
$$= \frac{11 \times 100}{3800} = {}^{1100}/_{3800} = {}^{11}/_{38} \text{ Dec. Z.}$$

Aufgabe 3. Zahlen, sowohl ganze als gebrochene und gemischte, ins **Quadrat** zu erheben.

Auflösung. Wir sahen eben, daß die Fläche eines Quadrats gefunden werde, wenn man eine Seite des Quadrats mit sich selbst multiplicirt. Solche Zahlen, welche das Product zweier gleichen Factoren sind, heißen die **Quadratzahlen** der Factoren. Denn sie geben die Größe der Quadratflächen an, deren Seite durch einen der Factoren ausgedrückt wird.

Die	Quadratzahl	von	1	ist	=	1	×	1	=	1
»	»	»	2	»	=	2	×	2	=	4
»	»	»	3	»	=	3	×	3	=	9
»	»	»	4	»	=	4	×	4	=	16
»	»	»	5	»	=	5	×	5	=	25
»	»	»	6	»	=	6	×	6	=	36
»	»	»	7	»	=	7	×	7	=	49
»	»	»	8	»	=	8	×	8	=	64
»	»	»	9	»	=	9	×	9	=	81
»	»	»	10	»	=	10	×	10	=	100
»	»	»	20	»	=	20	×	20	=	400
»	»	»	100	»	=	100	×	100	=	10000

u. s. w.

Veranschaulichung:

```
.   . .   . . .   . . . .   . . . . .
    . .   . . .   . . . .   . . . . .
          . . .   . . . .   . . . . .  rc.
                  . . . .   . . . . .
                            . . . . .
```

Diejenigen Zahlen, durch deren Multiplication die Quadratzahlen entstehen, heißen die Quadratwurzeln der Quadratzahlen.

1	ist	die	Quadratwurzel	von	1
2	»	»	»	»	4
3	»	»	»	»	9
4	»	»	»	»	16
10	»	»	»	»	100
20	»	»	»	»	400
100	»	»	»	»	10000

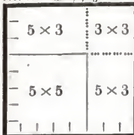
Betrachten wir die obige Reihe der Quadratzahlen aller Quadratwurzeln von 1 bis 10, nämlich 1, 4, 9, 16 rc., so sehen wir,

daß nicht alle ganzen Zahlen Quadratzahlen ganzer Zahlen*) seyn können; 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 rc., sind nicht Quadratzahlen ganzer Zahlen. Von ihnen läßt sich daher auch die Quadratwurzel nicht so ohne Weiteres angeben. Auch soll dies hier nicht weiter auseinander gesetzt werden. Nur so viel sieht der Schüler ein, daß die Quadratwurzel von 13 zwischen 3 und 4 liegt, von 30 zwischen 5 und 6 rc.

Wie groß ist das Quadrat von 42? (A. $42 \times 42 = 1764$.) Man kann 42 auch in 2 beliebige Theile zerlegen und aus ihnen das Quadrat zusammensetzen. Z. B.

$$42 = 40 + 2; \text{ also } 42 \times 42 = (40 + 2) \cdot (40 + 2)$$
$$= 40 \times 40 + 40 \times 2 + 40 \times 2 + 2 \times 2$$
$$= 40 \times 40 + 2 \times 40 \times 2 + 2 \times 2$$

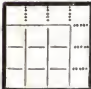
d. h. die Quadratzahl einer aus zwei Theilen bestehenden Quadratwurzel (40 + 2) besteht aus der Quadratzahl des ersten Theils (40×40) + dem doppelten Producte des ersten Theils in den zweiten Theil ($2 \times 40 \times 2$) + der Quadratzahl des zweiten Theils (2×2). Dieses läßt sich sehr schön anschaulich zeigen. Wir wählen dazu eine kleinere Zahl, z. B. 8, welche wir beliebig zerlegen, z. B. in 5 + 3.



Beschreiben wir über einer Linie = 8 ein Quadrat, und ziehen wir durch die 5ten Theilungspunkte, wie in der Figur, die Theilungslinien, so wird das ganze Quadrat in 4 Theile zerlegt, von welchen der eine Theil $= 5 \times 5$, zwei andere jeder $= 5 \times 3$, der vierte $= 3 \times 3$ ist.

Brüche werden ins Quadrat erhoben, wenn man sie mit sich selbst, d. h. Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, oder das Quadrat des Zählers und das Quadrat des Nenners bildet.

Das Quadrat von $\frac{1}{2}$ ist $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
» » » $\frac{1}{3}$ » $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
» » » $\frac{1}{4}$ » $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
» » » $\frac{1}{10}$ » $= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$
» » » $\frac{3}{4}$ » $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$



Dieses kann leicht anschaulich gemacht werden. Wir nehmen von einer Seite eines Quadrats z. B. $\frac{3}{4}$, und verzeichnen über diesen $\frac{3}{4}$ ein Quadrat, so springt es in die Augen, daß das Quadrat derjenigen Linie, welche $= \frac{3}{4}$ des Ganzen ist, $\frac{9}{16}$ des ganzen Quadrats sei.

Die Quadratwurzel eines Bruchs wird gefunden, wenn man die Quadratwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner nimmt. Die Quadratwurzel aus $\frac{1}{25}$ ist $= \frac{1}{5}$, aus $\frac{16}{25} = \frac{4}{5}$. Die Quadratwurzel der meisten Brüche läßt sich nicht unmittelbar angeben.

*) Mehr läßt sich hier nicht angeben. Das Ausführlichere siehe prakt. Uebungsbuch III., Abschn. 8 und zweiter Theil dieses method. Handbuchs!

Soll eine gemischte Zahl ins Quadrat erhoben werden, so richtet man sie ein und multiplicirt sie nun mit sich selbst. Z. B. das Quadrat von $5\frac{1}{2}$ = Quadrat von $\frac{11}{2} = \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{11 \times 11}{2 \times 2} = \frac{121}{4} = 30\frac{1}{4}$.

Aufgabe 4. Ein Hofraum ist eben so breit als lang und zwar 5° 4′ 6″ zehnth.; wie groß ist sein Flächenraum? (A. 29□° 81□′ 16□″.)

Aufgabe 5. Ein Baumhof ist 22° 4′ zwölfth. lang und eben so breit. Auf jede Quadratruthe soll ein Baum gepflanzt werden, von welchen jeder 10 Sgr. kostet. Was wird die Baumanlage kosten? (Antw. 166 $\frac{7}{27}$ Thlr.)

Aufgabe 6. Ein Gutsbesitzer verkauft von einem Acker der 54° 4′ zehnth. lang und eben so breit ist, ein Stück, welches 12° 3′ lang und breit ist, die Quadratruthe zu 7 Thlr. 9 Sgr. Wie viel Geld erhält er für das verkaufte Stück, wie viel bleibt ihm übrig, und wenn das Uebrige als Quadrat angesehen würde, wie lang würde ungefähr eine Seite desselben sein? (Antw. 1104 Thlr. $12\frac{1}{2}$ Sgr.; 2808□° 7□′; 52° 9′.)

Aufgabe 7. Eine Kirche soll 162′ 8″ zwölfth. lang und halb so breit werden. Wie viel Raum wird sie einnehmen? (Antw. 91□° 126□′ 32□″.)

Aufgabe 8. Ein Stück Leinwand ist $28\frac{1}{2}$ Ellen lang und $\frac{7}{4}$ Ellen breit. Wie groß ist die Fläche desselben? (A. $49\frac{7}{8}$□ Ellen.)

Aufgabe 9. Ein Landmann besitzt ein Gut, welches 7 Hufen 5 Morgen groß ist. Wie viel □Ruthen beträgt der Flächeninhalt? 1 Hufe = 30 Morgen, 1 Morgen = 180 □Ruthen. (Antw. 38700□°.)

Aufgabe 10. Ein Saal ist 36′ lang, 28′ breit, 18′ hoch; wie groß ist der Fächenraum des Fußbodens, der Decke und der 4 Seitenwände? (Antw. 4320□′ = 43,2□° zehnth.)

Auflösung. Je zwei einander gegenüberstehende Wände sind einander gleich; die Decke = dem Fußboden, die beiden längeren und die beiden kürzeren Wände. Decke und Fußboden sind 36′ lang und 28′ breit; jede hat also 36 × 28 = 1008□′, beide zusammen 2 × 1008 = 2016□′. Jede der beiden längeren Seitenwände ist 36′ lang 18′ hoch, hat also 36 × 18 = 648□′, beide zusammen also 2 × 648 = 1296□′. Jede der kürzeren Wände ist 28′ lang, 18′ hoch, hat also 28 × 18 = 504□′, beide zusammen also 2 × 504 = 1008□′. Alle sechs Flächen enthalten also 2016 + 1296 + 1008 = 4320□′ = 43,2□° zehnth.

Aufgabe 11. Eine Schulstube ist 24′ lang 16′ breit. In derselben stehen 14 Pulte, jedes 9′ lang $2\frac{3}{4}$′ breit und 2 Tische, jeder 4′ lang $2\frac{1}{2}$′ breit. Wie viel Raum bleibt zum Durchgehen noch übrig? (Antw. $17\frac{1}{2}$□′.)

Auflösung. Der Flächenraum der Schulstube ist 24 × 16 = 384□′. Jedes Pult nimmt $9 \times 2\frac{3}{4} = 24\frac{3}{4}$□′, alle Pulte also $14 \times 24\frac{3}{4} = 346\frac{1}{2}$□′ ein. Jeder Tisch nimmt $4 \times 2\frac{1}{2} = 10$□′,

beide zusammen 20□′ Raum ein. Die Pulte und Tische besetzen also einen Raum von $346\frac{1}{2} + 20 = 366\frac{1}{2}$□′. Es bleibt also noch ein Raum von $384 - 366\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$ □′ leer.

Aufgabe 12. Eine Schulstube von 32′ Länge und 25′ Breite soll besetzt werden mit 16 Pulten à 10′ Länge $1\frac{3}{4}$′ Breite. Ein Schrank nimmt 8□′, der Sitz des Lehrers 10□′, der Ofen $2\frac{1}{2}$□′ Raum ein. Nun sollen die Pulte so gestellt werden, daß sie je 4 und 4 dicht neben einander stehen und daß der von den Pulten, dem Schranke, dem Lehrersitze und dem Ofen unbesetzte Raum sich in der Mitte als Kreuzgang befindet. Man will wissen, wie groß der leer bleibende Raum und wie groß der Raum ist, welchen die beiden Gänge in der Mitte gemeinschaftlich haben? (Antw. Der leer bleibende Raum ist $499\frac{1}{2}$□′ und das den beiden Gängen gemeinschaftliche Rechteck ist 132□′ groß.)

Auflösung. Wir berechnen zuerst den Flächenraum der Schulstube, dann den Flächenraum der Pulte, ziehen diesen sammt dem Raume des Schulschrankes, des Lehrersitzes und des Ofens von jenem ab, so bleibt uns die Größe der Fläche des Kreuzganges übrig. Stehen die Pulte mit der längeren Wand des Zimmers gleichlaufend, so bleibt in der Mitte ein rechteckförmiger Raum, welchen beide Kreuzgänge gemeinschaftlich haben. Die Größe desselben läßt sich leicht finden, da man die Länge und Breite des Zimmers und der Pulte kennt.

Größe der Schulstube = $32 \times 25 = 800$□′.

Raum eines Pultes = $10 \times 1\frac{3}{4} = 17\frac{1}{2}$□′, aller Pulte = $16 \times 17\frac{1}{2} = 280$□′.

Raum der Pulte, des Schrankes, des Sitzes, des Ofens = $280 + 8 + 10 + 2\frac{1}{2} = 300\frac{1}{2}$□′.

Leer bleibender Raum = $800 - 300\frac{1}{2} = 499\frac{1}{2}$□′.

Länge des Zimmers = 32′, Länge zweier Pulte = $2 \times 10 = 20$′.

Ueberschuß = 32′ — 20′ = 12′.

Breite des Zimmers = 25′, Breite von 8 Pulten = $8 \times 1\frac{3}{4}$′ = 14′.

Ueberschuß = 25′ — 14′ = 11′.

Größe des Rechtecks in der Mitte = $12 \times 11 = 132$□′.

Aufgabe 13. Aus dem gegebenen Flächeninhalte eines Rechteckes und einer Seite desselben die andere Seite zu finden.

Auflösung. Der Flächeninhalt ist das Product der beiden Zahlen, welche die Länge der Seiten angeben. Gegeben oder bekannt sind also das Product zweier Factoren und der eine Factor. Wenn aber ein Factor und das Product desselben in einen andern noch unbekannten Factor gegeben ist, so wird dieser andere Factor gefunden, wenn man das Product durch den gegebenen Factor dividirt. Um daher aus dem Flächeninhalte und einer Seite eines Rechtecks die andere Seite zu finden, dividirt man die Zahl des Flächeninhaltes mit der Zahl der gegebenen Seite.

Wenn z. B. ein Rechteck eine Seite von 6′ Breite und 60□′ Inhalt hat, so ist die andere, an jene anstoßende, Seite = $\frac{60}{6}$ = 10′.

Aufgabe 14. Ein Graben nimmt einen Flächenraum von 2000□, ein; er ist 7′ breit. Wie lang ist er? (Antw. $285\frac{5}{7}$′.)

Aufgabe 15. Eine Wiese hat einen Flächeninhalt von 16 Morgen und ist 1024′ lang (zehnth.); wie breit ist sie im Durchschnitte? (Antw. $281\frac{1}{4}$′.)

Auflösung. 1 Morgen = 180 □°, 16 Morgen = 16 × 180 = 2880 □° = 2880 × 100 □′ = 288000 □′. Die Breite der Wiese beträgt also $^{288000}/_{1024}$ = $281\frac{1}{4}$′.

Aufgabe 16. Wie breit ist ein Stück Land von 300 □°, wenn dasselbe 10, 30, 50, 100, 300° lang ist? (Antw. $^{300}/_{10}$° = 30°, $^{300}/_{30}$° = 10°, $^{300}/_{50}$° = 6°, $^{300}/_{100}$° = 3°, $^{300}/_{300}$°, = 1°.)

Aufgabe 17. Wie lang ist ein Stück Leinwand, welches 140 Quadratellen beträgt und $^3/_4$ Ellen breit ist? Antw. $\frac{140}{^3/_4}$ = $^{560}/_3$ = $186\frac{2}{3}$ Ellen.)

Aufgabe 18. Zur Tapezirung einer Wand braucht man 32 Ellen Tapeten, welche $^5/_4$ Ellen breit sind; wie viel wird man von einer Tapete gebrauchen, welche $^7/_4$ Ellen breit ist? (Antw. $22\frac{6}{7}$.)

Auflösung. 32 Ellen $^5/_4$ Ellen breit, geben eine Fläche von 32 × $^5/_4$ = 40 Quadratellen. Diese sollen mit einer Tapete von $^7/_4$ Ellen Breite bedeckt werden; also muß man so viel Ellen haben, daß ihre Anzahl mit $^7/_4$ multiplicirt 40 gibt. Demnach ist ihre Anzahl = $\frac{40}{^7/_4}$ = $^{160}/_7$ = $22\frac{6}{7}$.

Aufgabe 19. Zur Bekleidung einer Wand gebraucht man 580 Fuß Bretter à $1\frac{1}{2}$′ Breite; wie viel Fuß Bretter wird man zu demselben Zwecke nöthig haben, wenn dieselben um $^1/_4$′ schmäler sind? (Antw. 696′.)

Auflösung. Die Größe der Fläche, welche beschlagen werden soll, ist 580 × $1\frac{1}{2}$ = 870 □′. Die nun zu nehmenden Bretter sind $1\frac{1}{2}$ — $^1/_4$ = $1\frac{1}{4}$′ breit, also bedarf man ihrer

$$\frac{870}{1\frac{1}{4}} = \frac{870}{^5/_4} = 174 \times 4' = 696'.$$

Aufgabe 20. A wünscht durch den Acker des B, welcher 240° lang und 20° breit ist, einen Weg führen zu dürfen, von $1\frac{1}{2}$° Breite. B erlaubt dies unter der Bedingung, daß ihm an der Länge seines Ackers doppelt so viel von dem Gute des A zugesetzt werde, als er durch den Weg verloren hat. Um wie viel muß sein Acker länger gemacht werden? (Antw. Um 36°.)

Auflösung. B verliert 240 × $1\frac{1}{2}$ = 360 □°. Derselbe will also 2 × 360 = 720 □° ersetzt haben. Da dies durch Verlängerung des Ackers geschehen soll, so muß derselbe um so viel Fuß verlängert werden, daß die Breite mit dem Zusatze multiplicirt 720 zum Producte gibt. Die Breite ist 20°, also ist die Anzahl der Ruthen, um welche der Acker verlängert werden muß, = $^{720}/_{20}$ = 36.

Aufgabe 21. Ein Schreiner verfertigt einen Kasten von 10′ Länge, 4′ Breite, 5′ Tiefe (auswendig), aus Brettern, welche $1\frac{3}{4}$ Zoll (zwölfth.) dick sind. Wie viel beträgt der innere Flächeninhalt? (Antw. 1 □° 22 □′ $36\frac{3}{4}$ □″.)

Auflösung. Die innere Tiefe ist um die Dicke der Bretter, d. h. um $1\frac{3}{4}''$ geringer als die äußere, folglich $5' - 1\frac{3}{4}'' = 5 \times 12 - 1\frac{3}{4} = 60 - 1\frac{3}{4} = 58\frac{1}{4}''$. Die innere Länge des Kastens ist um 2 Mal die Bretterdicke, d. h. um $2 \times 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}$ Zoll kleiner, als die äußere, d. h. $10' - 3\frac{1}{2}'' = 120 - 3\frac{1}{2} = 116\frac{1}{2}''$. Die innere Breite ist ebenfalls um $3\frac{1}{2}''$ kleiner als die äußere, folglich $4' - 3\frac{1}{2}'' = 48'' - 3\frac{1}{2} = 44\frac{1}{2}''$.

Der innere Flächeninhalt (ohne Deckel) besteht aus dem Boden, den 2 längern und den 2 kürzern Seitenwänden. Der Boden ist $116\frac{1}{2}''$ lang, $44\frac{1}{2}''$ breit. Sein Flächenraum also:

$$116\frac{1}{2} \times 44\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 233 \quad 89 \\ 89 \\ \hline 2097 \\ 1864 \\ \hline 4 \mid 20737 \mid 5184\frac{1}{4} \text{ □''}. \end{array}$$

Die längeren Seitenwände sind $116\frac{1}{2}''$ lang und $58\frac{1}{4}''$ tief. Die Flächen derselben sind also $2 \times 116\frac{1}{2} \times 58\frac{1}{4}$ □″ groß.

$$116\frac{1}{2} \times 58\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 233 \quad 233 \\ 233 \\ \hline 699 \\ 699 \\ 466 \\ \hline 8 \mid 54289 \mid 6786\frac{1}{8} \text{ □''} \\ 2 \\ \hline 13572\frac{1}{4} \text{ □''}. \end{array}$$

Die kürzeren Seitenwände sind $44\frac{1}{2}''$ breit und $58\frac{1}{4}''$ tief. Ihre Flächen sind also $= 2 \times 44\frac{1}{2} \times 58\frac{1}{4}$ □″ groß.

$$44\frac{1}{2} \times 58\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 89 \quad 233 \\ 233 \\ \hline 267 \\ 267 \\ 178 \\ \hline 8 \mid 20737 \mid 2592\frac{1}{8} \text{ □''} \\ 2 \\ \hline 5184\frac{1}{4} \text{ □''}. \end{array}$$

Der innere Flächeninhalt des Kastens beträgt also:

$$\begin{array}{r|l|l} & 5184\tfrac{1}{4}\ \square'' & \\ & 13572\tfrac{1}{4}\ \square'' & \\ & 5184\tfrac{1}{4}\ \square'' & \\ \hline 144 & 23940\tfrac{3}{4}\ \square'' & 166\ \square' \\ & 144 & \\ \hline & 954 & \\ & 864 & \\ \hline & 900 & \\ & 864 & \\ \hline & 36\tfrac{3}{4}\ \square''. & \end{array}$$

$166\ \square'\ 36\tfrac{3}{4}\ \square'' = 1\square^0$
$22\ \square'\ 36\tfrac{3}{4}\ \square''$

Aufgabe 22. Ein Garten von 17° 8′ Länge und 12° 9′ Breite zehnth. M. enthält eine unfruchtbare Strecke von 2° 4′ Länge und 2° 3′ Breite. Wie viel fruchtbares Land enthält der Garten? (Antw. 224 □° 10 □′.)

Auflösung. Man berechnet die Fläche des ganzen Gartens und der unfruchtbaren Strecke, zieht diese von jener ab, so hat man die Größe des fruchtbaren Landes.

17° 8′ = 178′ 12° 9′ = 129′ 2° 4′ = 24′ 2° 3′ = 23′

$$\begin{array}{r} 178 \\ 129 \\ \hline 1602 \\ 356 \\ 178 \\ \hline 22962\ \square' \\ 552\ \square' \\ \hline 22410\ \square' = 224\ \square^0\ 10\ \square'. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ 23 \\ \hline 72 \\ 48 \\ \hline 552\ \square' \end{array}$$

Aufgabe 23. Ein Landmann zieht auf einem Stücke Land von 36° 10′ Länge und 32° 8′ zwölfth. M. Breite sein Gemüse und sein Obst. Dasselbe ist durch 2 von beiden Seiten mitten durchgehende Wege in 4 gleiche Theile getheilt, welche eine Breite von 8′ haben.

Das erste Viertel ist in Rabatten getheilt, auf welchen der Spargel wächst, jede Rabatte ist 64′ lang 20½′ breit, und der zwischen zweien befindliche Weg ½′. Wie viel sind der Rabatten?

Das zweite Viertel ist in einzelne Gemüseländer vertheilt, von welchen jedes im Durchschnitt 2° 4′ lang und 2° 2′ breit ist. Wie viel Gemüseländer sind vorhanden?

Das dritte Viertel soll in 12 Länder getheilt werden, von welchen jedes im Durchschnitt 8′ Breite erhält. Welche Länge wird man ihnen geben können?

Das vierte Viertel ist mit Bäumen bewachsen, von welchen jeder 20 □′ Raum einnimmt. Wie viel Bäume sind vorhanden?

Auflösung. Man berechne die Größe des Landes, die Größe der Fläche der Wege, zieht diese von jener ab und theilt durch 4. Dann kennt man die Größe jedes Viertels.

Bei dem ersten Viertel berechnet man die Größe einer Rabatte sammt Weg, wobei die Anzahl der Rabatten der Anzahl der Wege gleich angenommen werden kann. Dann sieht man zu, wie oft die Größe einer Rabatte sammt Weg in dem Flächeninhalte des Viertels enthalten ist &c. Die Ausrechnung wird das Weitere zeigen.

36° 10′	32° 8′	36° 10′ × 8′	(Fläche des einen Weges)
12	12	442′	
72	64	8	
36	32	3536 □′	
432	384		
10	8		
442	392	32° 8′ × 8′	(Fläche des andern Weges)
392		392′	
884		8	
3978		3136 □′	
1326			
173264 □′ Größe des Landes			

3536 □′
3136 □′
6672 □′ = Größe der Wege

weniger dem mittlern gemeinschaftlichen Stücke, welches zweimal berechnet worden ist, also einmal, nämlich $8 \times 8' = 64$ □′ wieder abgezogen werden muß. Die Größe der Wege ist also 6672 □′ — 64 □′ = 6608 □′. Diese von der Größe des Landes abgezogen, gibt die Größe des bebauten Landes.

173264 □′
6608 □′
4 | 166656 | 41664 □′ (Größe eines Viertels.)
16
6
4
26
24
25
24
16
16
= =

Länge einer Rabatte = 64′
Breite sammt Weg = 21′
Größe einer Rabatte = 1344 □′

$$\text{Anzahl der Rabatten} = \frac{41664'}{1344'} = 31$$

Größe eines Gemüselandes $= 2^0\ 4' \times 2^0\ 2'$
$= 28' \times 26'$
$= 728\ \square'$

Anzahl derselben $= \dfrac{41664\ \square'}{728\ \square'} = 57^{3}/_{13}$

Breite eines Stück Landes des dritten Viertels $= 8'$
— der zwölf Stücke . . . . $= 12 \times 8' = 96'$

derselben . . . . $= \dfrac{41664\ \square'}{96'} = 434'$

Also die eines derselben . . . . $= \dfrac{434'}{12} = 36^{1}/_{6}'$

Anzahl der Bäume des vierten Viertels . $= \dfrac{41664\ \square'}{20} = 2083.$

Anmerkung. Der Schüler muß zur größeren Anschaulichung über diese Aufgabe und ähnliche eine Zeichnung entwerfen.

Aufgabe 24. In einem Hause sollen 20 Thüren neu angestrichen werden. Unter diesen 20 Thüren befinden sich 16 größere und 4 kleinere; jene sind 14' hoch, 5' breit, diese 8' hoch, 4' breit. Der Anstreicher verlangt für jeden Quadratfuß 1 Sgr. 2 Pf.; wie hoch kommt das Anstreichen der Thüren zu stehen? (A. 97 Thlr. 2 Sgr.)

Auflös. Flächeninhalt einer größern Thüre $= 14 \times 5 = 70\ \square'$
— der 16 » Thüren $= 16 \times 70 = 1120\ \square'$
— auf beiden Seiten $= 2 \times 1120 = 2240\ \square'$
— einer kleineren $= 8 \times 4 = 32\ \square'$
— der 4 » $= 4 \times 32 = 128\ \square'$
— auf beiden Seiten $= 2 \times 128 = 256\ \square'$

Größe der anzustreichenden Fläche $= 2240\square' + 256\square' = 2496\square'$

Kosten: $= 2496 \times 1$ Sgr. 2 Pf.
= 2496 Sgr. + 4992 Pf.
= 2496 Sgr. + 416 Sgr.
= 2912 Sgr.
= 97 Thlr. 2 Sgr.

Aufgabe 25. Zahlen, sowohl ganze als gebrochene und gemischte in den Cubus zu erheben.

Auflösung. Cubikzahlen heißen diejenigen Zahlen, welche durch Multiplication dreier gleichen Factoren entstanden sind. Da 27 $= 3 \times 3 \times 3$, so ist 27 die Cubikzahl oder der Cubus von 3, und 3 die Cubikwurzel von 27. Unter der Cubikwurzel einer Zahl versteht man also einen der 3 gleichen Factoren, durch deren Multiplication die Zahl entstanden ist.

Die Cubikzahl	von	1 =	1 ×	1 ×	1 =	1
—	—	2 =	2 ×	2 ×	2 =	8
—	—	3 =	3 ×	3 ×	3 =	27
—	—	4 =	4 ×	4 ×	4 =	64
—	—	5 =	5 ×	5 ×	5 =	125
—	—	6 =	6 ×	6 ×	6 =	216
—	—	7 =	7 ×	7 ×	7 =	343
—	—	8 =	8 ×	8 ×	8 =	512

Die Cubikzahl von 9 = 9 × 9 × 9 = 729
— — — 10 = 10 × 10 × 10 = 1000
— — — 20 = 20 × 20 × 20 = 8000
— — — 100 = 100 × 100 × 100 = 1000000 u. s. w.

Wir erfahren daraus, daß die Cubikzahl dadurch gebildet wird, daß man die Quadratzahl nochmals mit der Wurzel multiplicirt. Man stellt die Wurzeln von 1 bis 10, ihre Quadrat- und Cubikzahlen auch in einem Täflein zusammen, welches man das Wurzeltäflein genannt hat.

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Wir sehen daraus, daß zwischen 1 und 1000 nur 8 Zahlen liegen, welche als Cubikzahlen ganzer Zahlen angesehen werden können. Die Cubikwurzel von 216 ist 6, die von 343 ist 7, die Cubikwurzeln aller ganzen Zahlen also, welche zwischen 216 und 343 liegen, sind größer als 6 und kleiner als 7, bestehen also aus einer ganzen Zahl und einem Bruche. — Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt die Cubikwurzel von 30, 130, 230, 330, 430, 530, 630, 730, 830, 930?

Welches sind die Cubikzahlen von 24, 212, 864, 784 ꝛc.?

Z. B. von 24 : 24
24
96
48
576
24
2304
1152
13824

Welches ist der Cubus von 8° 4′ 2″ zehnth.?

842
842
1684
3368
6736
708964
842
1417928
2835856
5671712
596947688 Cubikzoll
= 596947 Cub. Fuß + 688 Cubikzoll
= 596 C. Ruth. 947 C. F. 688 C. Z.

Mehr dergleichen Aufgaben, in zehn- und zwölftheiligem Maße!

Um die Cubikzahlen von Brüchen zu bilden, multiplicirt man sie mit sich selbst und dieses Product abermals mit dem Bruche. Gemischte Zahlen werden zuerst eingerichtet.

Der Cubus von $^1/_2$ ist = $^1/_2 \times ^1/_2 \times ^1/_2 = ^1/_8$
— — — $^1/_4$ » = $^1/_4 \times ^1/_4 \times ^1/_4 = ^1/_{64}$
— — — $^3/_4$ » = $^3/_4 \times ^3/_4 \times ^3/_4 = ^{27}/_{64}$
— — — $2^1/_2 = ^5/_2$ ist = $^5/_2 \times ^5/_2 \times ^5/_2 = ^{125}/_8 = 15^5/_8$;
— — — $3^1/_3 = ^{10}/_3$ ist = $^{10}/_3 \times ^{10}/_3 \times ^{10}/_3 = ^{1000}/_{27} = 37^1/_{27}$.

Die Cubikwurzel von Brüchen wird also gefunden, indem man aus Zähler und Nenner die Cubikwurzel zieht. Die Cubikwurzel von $^{64}/_{125} = ^4/_5$, von $^{343}/_{1000} = ^7/_{10}$.

Zwischen welchen Brüchen liegen die Cubikwurzeln von $^{100}/_{130}$, $^{200}/_{490}$, $^{645}/_{913}$, $^{730}/_{999}$ ꝛc.?

Aufgabe 26. In einem Kasten befinden sich 4 Würfel A, B, C, D. Die Kantenlinie von A ist $5\frac{2}{5}$ Zoll, die von B $8\frac{1}{2}$, die von C $10\frac{3}{4}$, die von D $\frac{7}{8}$ Zoll zwölftheil. M. lang. Wie viel Raum nehmen alle Würfel zusammen ein? (Antw. 1 Cub. F. $286\frac{35571}{64000}$ Cub. Z.)

Ausrechnung:

A: $5\frac{2}{5} = \frac{27}{5}$; $\frac{27}{5} \times \frac{27}{5} \times \frac{27}{5}$.

27
27
———
729
27
———
125 | 19683 | $157\frac{58}{125}$ C. Z.
125
———
718
625
———
933
875
———
58

B: $8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$; $\frac{17}{2} \times \frac{17}{2} \times \frac{17}{2}$.

17
17
———
119
17
———
289
17
———
2023
289
———
8 | 4913 | $614\frac{1}{8}$ C. Z.

C: $10\frac{3}{4} = \frac{43}{4}$; $\frac{43}{4} \times \frac{43}{4} \times \frac{43}{4}$.

43
43
———
129
172
———
1849
43
———
64 | 79507 | $1242\frac{19}{64}$ Cub. Z.
64
———
155
128
———
270
256
———
147
128
———
19

D: $\frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{343}{512}$.

64000

$A = 157\frac{58}{125}$ | $512 \times 58 = 29696$
$B = 614\frac{1}{8}$ | $8000 \times 1 = 8000$
$C = 1242\frac{19}{64}$ | $1000 \times 19 = 19000$
$D = \frac{343}{512}$ | $125 \times 343 = 42875$

$A + B + C + D = 2014\frac{99571}{64000}$ | $\frac{99571}{64000} = 1\frac{35571}{64000}$
= 1 Cub. Fuß $286\frac{35571}{64000}$ Cub. Zoll.

Aufgabe 27. Aus einem cubischen Körper, dessen Seite 24′ $8\frac{1}{2}$″ zehnth. Maß lang ist, werden 2 cubische Körper herausgeschnit-

ten, deren Seiten 10′ $4\frac{3}{4}$″ und 3′ $8\frac{1}{3}$″ lang sind, wie groß ist der übrigbleibende cubische Raum? (Antw. 14 Cub. Ruth. 139 Cub. Fuß $729\frac{863}{1728}$ Cub. Zoll.)

Auflösung. Man sucht durch Erhebung der Zahl 24′ $8\frac{1}{2}$″ in den Cubus den Cubikinhalt des ganzen Körpers, dann durch Erhebung der Zahlen 10′ $4\frac{3}{4}$″ und 3′ $8\frac{1}{3}$″ in den Cubus die Größe der wegzunehmenden cubischen Räume, und zieht letztere von ersterem ab.

1) 24′ $8\frac{1}{2}$″ = $248\frac{1}{2}$″ = $\frac{497}{2}$″; $\frac{497}{2} \times \frac{497}{2} \times \frac{497}{2}$.

```
     497
     497
    ----
    3479
   4473
  1988
  ------
  247009
     497
 -------
 1729063
2223081
988036
---------
8 | 122763473 | 15345434⅛ C.″
```

2) 10′ $4\frac{3}{4}$″ = $104\frac{3}{4}$ = $\frac{419}{4}$″.

```
     419
     419
    ----
    3771
    419
  1676
  ------
  175561
     419
 -------
 1580049
 175561
702244
----------
64 | 73560059 | 1149375 59/64 C.″
     64
     --
      95
      64
      ---
      316
      256
      ---
       600
       576
       ---
        240
        192
        ---
         485
         448
         ---
          379
          320
          ---
           59
```

3) 3′ $8\frac{1}{3}$″ = $38\frac{1}{3}$″ = $\frac{115}{3}$″.

```
     115
     115
    ----
     575
    115
   115
   -----
   13225
     115
  ------
   66125
  13225
 13225
---------
27 | 1520875 | 56328 19/27 Cub. Zoll.
     135
     ---
      170
      162
      ---
        88
        81
        ---
         77
         54
         ---
         235
         216
         ---
          19
```

4)

```
                        1728
  1149375 59/64   | 27 × 59 = 1593
    56328 19/27   | 64 × 19 = 1216
  ---------------------------------
  1205704 1081/1728 |       2809/1728 = 1 1081/1728
```

5)

```
  15345434          1/8 = 216/1728
   1205704 1081/1728    = 1081/1728
  ----------------------------------
  14139729     +      863/1728 C. Z. = 14 C. Rth.
                      139 C. F. 729 863/1728 C. Z
```

Aufgabe 28. In einem Walde stehen 2 Holzhaufen; der eine ist 20′ lang, 16′ breit, 10′ hoch; der andere ist 14′ lang, 12′ breit, 5′ hoch zwölfth. M.; wie viel Cubikfuß enthalten beide zusammen, und welches ist der Werth dieses Holzes, wenn der Cubikfuß zu 1 Sgr. 4 Pf. verkauft wird? (Antw. 4040 Cub. Fuß und 179 Thlr. 16 Sgr. 8 Pf.)

Auflösung. Man multiplicirt eines jeden Haufens Länge, Breite und Höhe mit einander, nimmt ihre Summe und multiplicirt die Anzahl der Cubikfuß mit 1 Sgr. 4 Pf.

Ausrechnung:

$20 \times 16 \times 10$

16	
120	
20	
320	
10	
3200 Cub. Fuß.	

$14 \times 12 \times 5$

14	
12	
28	
14	
168	
5	
840	

3200
840
4040 Cub. Fuß.

4040×1 Sgr. 4 Pf. $= 4040 \times 1\frac{1}{3}$ Sgr.
$= 4040 + 1346\frac{2}{3}$ Sgr.
$= 5386\frac{2}{3}$ Sgr.
$=$ 179 Thlr. 16 Sgr. 8 Pf.

Aufgabe 29. Eine Straße von 5 Stunden Länge und 16 Fuß Breite soll 4′ hoch mit Sand befahren werden; wie viel Schachtruthen (= 144 C. F.) Sand braucht man dazu, wie viel Fuhren sind nöthig, wenn der Wagenkasten 6′ lang 4′ breit 3′ tief ist, und was kostet die Herbeischaffung des Sandes, wenn jede Fuhre mit 7 Sgr. 2 Pf. bezahlt wird? (A. $26666\frac{2}{3}$ Schachtruthen, $53333\frac{1}{3}$ Fuhren, 12740 Thlr. 22 Sgr. $2\frac{2}{3}$ Pf.)

Auflösung. Da die Straße 5 Stunden $= 5 \times 12000$ Fuß $=$ 60000′ lang und 16 Fuß breit ist, so beträgt ihr Flächenraum $600000 \times 16 = 960000$ □′. Da der Sand 4′ hoch werden soll, so sind $960000 \times 4 = 3840000$ C. F. Sand herbeizuschaffen. Eine Schachtruthe ist $= 144$ Cub. Fuß. So oft daher 144 Cub. Fuß in 3840000 Cub. Fuß enthalten sind, so viele Schachtruthen sind erforderlich, nämlich $^{3840000}/_{144} = 26666\frac{2}{3}$ Schachtruthen.

Der Wagen ist 6′ lang 4′ breit 3′ tief, enhält also $6 \times 4 \times 3 = 72$ C. F. $= \frac{1}{2}$ Schachtruthe. So oft nun $\frac{1}{2}$ Schachtruthe zu fahren ist, so viel Fuhren müssen gethan werden, nämlich $2 \times 26666\frac{2}{3} = 53333\frac{1}{3}$ Fuhren.

Jede Fuhre kostet 7 Sgr. 2 Pf., alle Fuhren zusammen also
$53333\frac{1}{3} \times 7$ Sgr. 2 Pf.
7

$373333\frac{1}{3}$ Sgr. = 4 Pf.
8888 — $10\frac{2}{3}$ Pf.

382222 Sgr. $2\frac{2}{3}$ Pf. = 12740 Thlr. 22 Sgr. $2\frac{2}{3}$ Pf.

Aufgabe 30. Aus dem gegebenen Cubikinhalte eines Körpers und zweien Ausdehnungen desselben die dritte zu finden.

Auflösung. Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Körpers wird durch Multiplication der drei senkrecht auf einander stehenden Ausdehnungen desselben, der Länge, Breite und Höhe mit einander, gefunden. Unter den Bedingungen der Aufgabe ist das Product dieser 3, und außerdem sind 2 derselben, folglich auch das Product dieser 2 gegeben. Man findet daher die dritte Ausdehnung, wenn man jenes Product der 3 Factoren durch das Product der beiden Factoren, d. h. die Zahl, welche den Cubikinhalt ausdrückt, durch das Product der beiden gegebenen Ausdehnungen dividirt. Wird die Länge des Körpers gesucht, so dividirt man den Körperinhalt durch das Product der Breite und Höhe, oder zuerst durch die Breite und den entstehenden Quotienten durch die Höhe, so hat man die Länge. Wird die Breite gesucht, so theilt man den Körperinhalt durch das Product der Länge und Höhe. Wird die Höhe gesucht, so dividirt man den Cubikinhalt durch das Product der Länge und Breite.

Der Cubikinhalt eines Körpers sei z. B. = 1200 Cub. Fuß, die Breite desselben = 20′, die Höhe = 3′, wie groß ist die Länge?

Antwort. $\frac{1200}{20 \times 3} = {}^{1200}/_{60} = 20'$.

Oder man dividirt mit der Höhe 3 in 1200, so erhält man den Quadratinhalt der Grundfläche = ${}^{1200}/_{3} = 400\Box'$. Diese durch die Breite 20′ getheilt, gibt die Länge = ${}^{400}/_{20} = 20'$.

Aufgabe 31. Eine Gartenmauer enthält 7920 Cub. Fuß; sie ist 120′ lang und 12′ hoch; wie dick ist sie? (A. $5\frac{1}{2}'$.)

Auflösung. $\frac{7920}{120 \times 12} = {}^{7920}/_{1440} = 5\frac{1}{2}'$.

Oder: Da die Mauer 7920 Cub. Fuß enthält und 12′ hoch ist, so nimmt ihre Grundfläche einen Quadratraum von ${}^{7920}/_{12}$ $= 660\Box'$ ein; diese Fläche durch die Länge 120′ getheilt, gibt die Dicke = ${}^{660}/_{120} = 5\frac{1}{2}'$.

Aufgabe 32. Ein Bäcker will einen Kasten haben, welcher 2736 Cubikfuß Mehl faßt; derselbe soll 45′ lang, 19′ breit werden; wie hoch muß der Schreiner ihn machen? (A. $3\frac{1}{5}'$.)

Ausrechnung: $\frac{2736}{45 \cdot 19} = {}^{2736}/_{855} = 3\frac{1}{5}'$.

Aufgabe 33. Ein Wasserbehälter soll 704 Cub. F. Wasser enthalten und 22 Fuß lang gemacht werden; welche Breite und Höhe muß man ihm geben?

Auflösung. Da derselbe 704 Cub. F. fassen und 22′ lang werden soll, so ist das Product der Breite in die Höhe = ${}^{704}/_{22}$ = 32; da aber nichts weiter bestimmt ist, so kann man die Breite

oder Höhe willkürlich nehmen. Ist aber die Breite einmal angenommen, so ist auch die Höhe bestimmt und umgekehrt, weil das Product beider = 32 bestimmt ist. Will man Breite und Höhe nun in ganzen Zahlen oder vollen Fuß haben, so muß man 32 in je 2 Factoren zerlegen, welche ganze Zahlen sind, nämlich in 32 × 1, 16 × 2, 8 × 4, und nun macht man die Breite des Kastens = 32′, die Höhe = 1′, oder die Breite = 1′ und die Höhe = 32′; die Breite = 16′ oder 2′, und die Höhe = 2′ oder 16′; die Breite = 8′ oder 4′ und die Höhe = 4′ oder 8′.

Dies gibt 6 verschiedene Antworten der Aufgabe, welche alle richtig sind. Will man die Breite oder Höhe auch in Brüchen oder gemischten Zahlen ausdrücken, so gibt es der richtigen Antworten und Auflösungen unzählige. Solche Aufgaben, welche mehr als eine richtige Antwort zulassen, heißen **unbestimmte** Aufgaben. Sie entstehen dadurch, daß nicht Bestimmungsstücke genug gegeben sind.

Aufgabe 34. Wie viel Malter Roggen enthält ein Getreidehaufe, welcher 18′ lang, 12′ breit und 3′ hoch ist, wenn das Malter $1\frac{4}{5}$ Cubikfuß enthält? (Antw. 360 Malter.)

Auflösung. Da der Haufe 18′ lang 12′ breit ist, so nimmt er eine Quadratfläche von 18 × 12 = 216□′ ein, und bei einer Höhe von 3′ einen Cubikraum von 216 × 3 = 648 Cub. F. Nun sind $1\frac{4}{5}$ Cub. F. = 1 Mltr. So oft daher $1\frac{4}{5}$ Cub. F. vorhanden sind, so oft ist ein Malter da. Wie oft $1\frac{4}{5}$ Cub. F. vorhanden sind, erfährt man, wenn man mit $1\frac{4}{5}$ in 648 dividirt; $1\frac{4}{5}$: 648 = 9 : 3240 = 360 Mal; also enthält der Haufen 360 Malter.

Aufgabe 35. Wie viel Ctnr. Roggen enhält ein Haufen, welcher 30′ lang 20′ breit 8′ hoch ist, wenn ein Mltr. Roggen 72 Pfd. wiegt? (Antw. 1745 Ctnr. 50 Pfd.)

Auflösung. Der Cubikinhalt des Haufens ist = 30 × 20 × 8 = 4800 Cub. Fuß; $1\frac{4}{5}$ Cub. F. sind 1 Malter. Wie oft $1\frac{4}{5}$ in 4800 enthalten sind, so viel Malter sind es. $1\frac{4}{5}$: 4800 = 9 : 24000 = $2666\frac{2}{3}$, also $2666\frac{2}{3}$ Malter. Ein Malter wiegt 72 Pfd.; $2666\frac{2}{3}$ Malter $2666\frac{2}{3}$ × 72 Pfd.

$2666\frac{2}{3}$ Pfd.
72
5332
18662
48

Die Anzahl der Pfd. durch 110 dividirt gibt die Anzahl der Ctnr.

110 | 192000 | 1745 Ctnr. 50 Pfd.
110
820
770
500
440
600
550
50

Aufgabe 36. Wie schwer ist eine Menge Gold, welche 10' lang 4" breit $1\frac{1}{2}$" zehnth. M. dick ist, wenn der Cubikfuß Wasser 66 Pfd. wiegt und Gold $19\frac{1}{2}$ Mal so schwer als Wasser ist? (Antw. $772\frac{1}{5}$ Pfd.)

Auflösung. Der Raum, welchen die Menge Gold einnimmt, ist $= 100 \times 4 \times 1\frac{1}{2}$ Cub. Z. $= 600$ Cub. Z.; 1000 Cub. Z. = 1 Cub. F. Wasser wiegen 66 Pfd.; also 600 Cub. Z. $^6/_{10}$ oder $^3/_5$ Mal 66 Pfd. $= {}^{198}/_5 = 39\frac{3}{5}$ Pfd.; Gold ist $19\frac{1}{2}$ Mal so schwer als Wasser, folglich wiegt jenes Gold: $19\frac{1}{2} \times 39\frac{3}{5}$ Pfd. $= {}^{198}/_5 \times {}^{39}/_2 = \frac{198 \times 39}{2 \times 5} = {}^{7722}/_{10} = 772\frac{1}{5}$ Pfd.

Aufgabe 37. Eine Stange Roheisen hat eine Länge von 21', eine Breite von $2\frac{1}{2}$', eine Dicke von $\frac{1}{3}$'. Roheisen ist $7\frac{1}{5}$ Mal so schwer als Wasser. Wie viel Ctnr. wiegt die Stange Eisen? (Antw. 75 Ctnr. 66 Pfd.)

Auflösung. Der Cubikinhalt des Eisens ist $= 21 \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ Cub. F. $= 21 \times {}^5/_2 \times {}^1/_3 = {}^{105}/_6 = 17\frac{1}{2}$ Cub. F. Ein Cub. F. Wasser wiegt 66 Pfd., ein Cub. F. Roheisen, da dasselbe $7\frac{1}{5}$ Mal so schwer ist als Wasser, $7\frac{1}{5} \times 66$ Pfd.; folglich $17\frac{1}{2}$ Cub. Fuß Roheisen $17\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{5} \times 66$ Pfd. $= {}^{35}/_2 \times {}^{36}/_5 \times 66$ Pfd.

```
  66
  36
 ----
 396
198
 ----
2376
  35
 -----
11880
7128  110
 ------
10 | 83160 | 8316 Pfd. | 75 Ctnr.
             770
             ---
              616
              550
              ---
               66 Pfd.
```

Anmerkung. Diese Aufgaben werden hinreichen. Findet der Lehrer sie nicht ausreichend, so wird er sie leicht vermehren können. Und wer noch andere Aufgaben über Raumberechnungen wünscht, wendet sich am besten zur Raumlehre selbst. — Eine große Menge Uebungsaufgaben findet sich in dem dritten Theile des prakt. Rechenbuches.



In demselben Verlage sind erschienen:

Lorentz, Dr. R., Die allgemeine Geschichte der Völker und ihrer Cultur. Ein Handbuch. 4 Bände groß Octav (80 Bogen enthaltend). 3 Thlr.

Wenn es in unseren Tagen ein Zeichen von Selbstständigkeit des Charakters und Urtheils ist, sich in äußerer Lebensstellung frei von dem Einflusse der sich diametraliter entgegenstehenden Partheien zu halten und wenn eine solche Selbstständigkeit alles Lob verdient; so ist dies eben so anerkennenswerth, wenn in Schriftwerken, besonders historischen, ein freies wohlbegründetes Urtheil ohne Rücksicht auf herrschende Partheiansichten, mögen sie rechts oder links herkommen, hervortritt und als Hauptbestreben die Erforschung oder gründliche Darstellung der Wahrheit sich zeigt. Mit diesen einleitenden Worten machen wir auf das oben genannte Lorentz'sche Werk aufmerksam, dessen einzelne Theile bei ihrem Erscheinen in den geachtetsten literarischen Blättern eine anerkennende Beurtheilung gefunden. Als wesentlichste Eigenschaften des Buches wurden überall gründliche Kenntniß des historischen Materials, einsichtsvolle Behandlung desselben und eine bei aller Freisinnigkeit besonnene Beurtheilung der historischen Thatsachen hervorgehoben, — Eigenschaften, welche nicht grade alltäglich sind und nicht allzu häufig in den neuesten Geschichtswerken von ähnlicher Bestimmung sich finden. (Man vergleiche die Beurtheilungen in der allgemeinen Schulzeitung 1837 Nr. 192, 1838 Nr. 64, 1841 Nr. 53 und 61; Jenaer Literaturzeitung 1838 Nr. 218, 1841 Nr. 106; Pölitz Jahrbücher 1837 Bd. 2, S. 471, 1839 S. 95; Berliner Literarische Zeitung 1838 Nr. 4; Rheinische Blätter für Erziehung und Unterricht von Diesterweg 27r Band, 3s Heft 1843 u. a. m.) Fassen wir nun das Werk seiner Bestimmung nach näher ins Auge, so stellt sich als solche Folgendes heraus. Zunächst dient es dem Lehrer, der bei seinem historischen Unterrichte einen kurzen Abriß (von vorne herein war der in vielen Auflagen verbreitete chronologische Abriß von Kohlrausch berücksichtigt) oder Leitfaden eingeführt, als sehr wesentliches Mittel, den historischen Stoff zur erweiternden Ausführung des im Leitfaden Angeführten zu ergänzen. Auch Schüler oberer Klassen höherer Lehranstalten werden es mit großem Nutzen bei der Ausarbeitung und Repetition des in der Schule Vorgetragenen benutzen können. Macht nun das hier hervorgehobene eine weniger beschränkte, bei der Darstellung wichtigerer Begebenheiten ausführlichere Fassung des Stoffes nothwendig, so ist zugleich auch die Behandlung von der Art, daß sie einem größeren gebildeten Publikum, das in der Geschichte Belehrung und Unterhaltung sucht, ganz und gar angemessen ist. Besonders dienen noch diesem Zwecke 1) die dem ersten Bande vorgesetzte allgemeine Einleitung, welche mit großer Klarheit die ganze Summe historischer Elementarbegriffe erläutert und eine gute Uebersicht über den Umfang des historischen Studiums gibt, 2) die jedem Zeitalter vorangestellten besonderen Einleitungen, welche die Eigenthümlichkeiten eines jeden kurz und in bestimmten Umrissen zusammenfassen. Eine der verdienstlichsten und dem Interesse eines gebildeteren Publikums besonders entsprechenden Seiten des ganzen Werkes aber zeigt sich in der Art und Weise, wie der Verfasser die Geschichte der Cultur in besonderen, am Schlusse jeder Hauptperiode befindlichen Abschnitten, behandelt. Durch die vernünftige Mitte, die er hier zwischen magerem Namenaufzählen und ins Weite gehenden Erörterungen über Literatur und Kunst zu halten weiß, gibt er dem, der sich belehren will, hinreichenden Stoff und regt zu weiterer Selbstthätigkeit an.

Der erste Band des Werkes behandelt die alte Geschichte; der zweite die des Mittelalters, bis auf Karl V.; der dritte die neuere Zeit, bis zur französischen Revolution: der vierte die neueste Zeit. Schon aus dieser Eintheilung des Stoffes nach den Bänden sieht man, daß der Verf., je näher er der Gegenwart kam, desto ausführlicher wurde und so das dem Interesse der Jetztzeit am nächsten Liegende auch als solches behandelt hat, — eine Eigenschaft, welche das Buch von anderen ähnlichen auf eine sehr vortheilhafte Weise unterscheidet. Ein anderer Vorzug ist noch der, daß der Verf. als ein in seiner Wissenschaft gründlich gebildeter Mann einen großen Theil der historischen Quellen, besonders die der alten Geschichte, selber genau kennt und in

dieser Beziehung von Anderen nichts aufs Gerathewohl anzunehmen braucht und daß er, wo er Andere benutzt, im Stande ist, die neuesten für unumstößlich geltenden Forschungen von unhaltbaren Hypothesen wohl zu sondern, und hierdurch gerade hat er seinem Buche auch einen wissenschaftlichen Werth verliehen, der vielen anderen weit verbreiteten Büchern der Art fehlt, die unbekümmert um den Stand der Forschung oft nichts thun als ihre Vorgänger ausschreiben.

Außer den vielen früher erschienenen sehr günstigen Beurtheilungen dieses Werkes enthält das „Beiblatt zum Archiv für Natur, Kunst, Wissenschaft und Leben Nr. 12, 1843" noch folgendes unter der Ueberschrift Bücherschau:

„Dr. R. Lorentz, die allgemeine Geschichte der Völker und ihrer Cultur. Elberfeld. Büschler'sche Verlagsbuchhandlung 1837 — 40. 4 Bd. gr. 8. (16 gGr.) — Völker-, nicht Fürstengeschichte, oder doch letztere nur in so weit, als sie bestimmend auf die Völker und ihre cultur-historische Entwickelung einwirkten, ist der Gegenstand dieses reichhaltigen, lichtvollen und anziehenden Werkes, das seinen Gegenstand bis auf unsere Tage fortführt. Ueberall stellt sich eine Selbstständigkeit des Urtheils und eine besonnene Freimüthigkeit heraus, und Bearbeitung aller Zeiträume zeugt von gleicher Sorgfalt und gleicher Quellenkenntniß. Vorzüglich machen wir auf die wissenschaftlichen und die literarischen Uebersichten, welche den einzelnen Perioden beigefügt sind, aufmerksam, da sich dieselben in keinem Werke ähnlichen Umfanges und ähnlicher Tendenz in gleichem Reichthume finden und eine Literaturgeschichte der Erfindungen in sich vereinen.

Die Preise der einzelnen Bände sind: der 1ste 1 Thlr., der 2te 1 Thlr. 10 Sgr., der 3te 1 Thlr. der 4te 20 Sgr.

Lorentz, Dr. R., de rebus sacris et artibus veterum Tarentinorum. 10 Sgr.

— „ — veterum Tarentinorum res gestae. Spec. I. 10 Sgr.

— „ — veterum Tarentinorum res gestae. Spec. II. 10 Sgr.

Heuser, P., Methodisch geordnete Uebungen und Aufgaben zum Kopfrechnen, für Lehrer in Elementarschulen und höheren Lehranstalten. 8. 2te verm. Auflage. 1843. 7 Sgr.

Daraus besonders abgedruckt:

Aufgaben zum Kopfrechnen für Schüler in Elementarschulen und höheren Lehranstalten. 8. 1842. 3¾ Sgr.

Daß das Kopfrechnen eines der besten Mittel der Verstandesbildung ist, weiß jeder kundige Lehrer. Dies ist es jedoch nur dann, wenn der Lehrer auf die rechte Weise dabei verfährt, und die Uebungen und Aufgaben methodisch fortschreiten und in einander greifen. So ist dieses Kopfrechenbuch abgefaßt; der Lehrer gebrauche es nur zweckmäßig, so wird er sich von dem besten Erfolge bald überzeugen.

Diesterweg, Dr. F. A. W., und **P. Heuser,** Auflösungen der Aufgaben in dem practischen Rechenbuche für Elementar- und höhere Bürgerschulen. Dritte sehr verb. u. nach den neuesten Aufl. des ersten, zweiten u. dritten Uebungsbuches verm. Aufl. 8½ Bog. gr. 8. mit 15 geom. Fig. ½ Thlr.

Diesterweg, Dr. F. A. W., und **P. Heuser,** Praktisches Rechenbuch für die untern und mittlern Klassen der Elementarschulen, so wie auch für Mädchenschulen. Zweite Aufl. 7 B. 5 Sgr.

Obgleich das praktische Rechenbuch von Diesterweg und Heuser, besonders das erste und zweite Uebungsbuch desselben, eine über alles Erwarten gute Aufnahme gefunden und sehr verbreitet ist: so wurde doch von manchen Lehrern die gegründete Bemerkung gemacht, daß das erste Uebungsbuch Manches enthalte, was für die untern und mittlern Klassen der Elementarschulen zu

schwierig und für Mädchenschulen nicht passend sein möchte. Dafür wurde der Wunsch ausgesprochen, eine zweckmäßig geordnete Reihe von Uebungen und Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben für diese Klassen zu besitzen. Mit Vergnügen sind die Verfasser dem Wunsche der Lehrer entgegen gekommen, und bieten hiemit ein practisches Rechenbuch für diese Kreise dar, welches, so hoffen sie zuversichtlich, ihren Wünschen entsprechen wird. Als eine besondere empfehlenswerthe Eigenschaft für die Elementarschulen unsers deutschen Vaterlandes ist noch zu bemerken, daß die Aufgaben in Betreff der Münzen nach den drei Hauptgeldsorten Deutschlands in Thlr., Ggr., Pf., Thlr., Sgr., Pf., und in Gld. und Krz. eingerichtet sind.

Aus der allgemeinen Schulzeitung, 10 Mai 1838, Nr. 73:

„Dieses neue Rechenbuch ist für solche Schulen bearbeitet, die genöthigt sind, sich beim Rechenunterrichte auf das Nothwendigste und Unentbehrlichste zu beschränken. Solcher Schulen gibt es, wie die Verfasser richtig bemerken, gar viel; auch dürfte in Mädchenschulen oder in dem Mädchenunterrichte überhaupt eine Beschränkung der Forderungen in Betreff des arithmetischen Wissens und Könnens oft am rechten Orte sein. Demnach war es gewiß ein glücklicher Gedanke, eine Schrift wie die vorliegende zu verfassen.

Gesangbuch für Schulen. Von **E. Langenberg** und **J. Hufschmied**. 15 Bog. 7½ Sgr. Parthiepreis bei 20 Ex. nur 5 Sgr.

Wie der Erwachsene in der Kirche sein Gesangbuch hat, so wollen die Herausgeber dem Kinde ein Schulgesangbuch geben, aus welchem ihm bis in das höhere Alter diese Töne des geistigen Lebens in anmuthvoller Weise fortklingen. Sie reichen zu dem Ende eine Auswahl von 136 Schul-, 31 Festliedern; von 33 Liedern, die sich auf den christlichen Glauben, und 59, die sich auf das christliche Leben beziehen, denen sie (was noch in keinem Schulgesangbuche geschah) die Melodien, 100 an der Zahl, in Noten beifügen. Auswahl und Redaction der einzelnen Lieder zeugen nicht nur von Fleiß, sondern auch von christlichem Sinne und angemessener Gemüthlichkeit. (Lit. Ztg. Berl. 1839. Nr. 26.)

Heuser, P., Das Wissenwürdigste aus der Münz-, Maß- und Gewichtskunde, eine Zugabe zu jedem practischen Rechenbuche für Real- u. Bürgerschulen. 12½ Sgr.

Dieses Werkchen enthält ein Verzeichniß der jetzt bestehenden Münzen, bürgerlichen Maße und Gewichte, und deren Eintheilung, so wie eine diese Gegenstände betreffende lehrreiche historische Darstellung. In Betreff des Münzwesens gibt es einen belehrenden Unterricht über die bestehenden Münzfuße Deutschlands, insonderheit über den neuen 24½ Guldenfuß, von welchem es die Verordnungen und die gesetzlichen Vorschriften der zum Zollverein gehörenden Staaten mittheilt. Der Verfasser schmeichelt sich, den Jünglingen, welche sich der Handlung oder dem Fabrik- und Gewerbewesen widmen, so wie Lehrern der Rechenkunst an Real- und Bürgerschulen, ja selbst Kaufleuten und Geschäftsmännern hiermit ein eben so anziehendes als nützliches Büchlein darzubieten.

Heuser, P., Der Jugendfreund. Ein Lehr- und Lesebuch für Stadt- und Landschulen. Erster Theil. 3. Aufl. 10 Bog. 6¼ Sgr. Parthiepreis 25 Ex. 3¾ Thlr. (à 4½ Sgr.) Zweiter Theil. 18½ Bogen. 12½ Sgr. Parthiepreis 20 Ex. 6 Thlr. (à 9 Sgr.) — Dasselbe, erster Theil, mit Bildern, eingebunden 15 Sgr. (Ein sehr passendes Geschenk für Kinder von 8 bis 12 Jahren.)

Der erste Theil ist für Kinder von 8 bis 12 Jahren, der zweite von 12 bis zum Ende ihrer Schulzeit bestimmt. Jeder Theil besteht aus einem Lesetheile und aus einem Lehrtheile. Der Lesetheil bietet mannigfaltigen und hinreichenden Stoff zum natürlichen und ausdrucksvollen Lesen dar; der Lehrtheil enthält das zur allgemeinen Menschen- und Bürgerbildung nothwendige Material. Dem gegebenen Lehrstoffe liegt in seiner Aufeinanderfolge der Entwicke-

lungs- und Bildungsgang des menschlichen Geistes zum Grunde, welcher mit dem Einzelnen, dem Anschaulichen beginnt, und weiterhin in das Gebiet der Verstandes- und der Gemüthswelt übergeht. Der Verfasser hat für sich die Ueberzeugung gewonnen, daß nur auf diesem Wege die Elementarschulen zur wahren Volksbildung etwas beitragen können.

Langenberg, E., Die schwierigsten Aufgaben im ersten Uebungsbuche des Diesterweg-Heuser'schen Rechenbuches auf möglichst verschiedene Weise erklärend aufgelöst. Mit einer Vorrede von **Dr. F. A. W. Diesterweg.** 2. Aufl. 8 B. gr. 8. $12\frac{1}{2}$ Sgr.

Schon die Bevorwortung des Herrn Dr. Diesterweg bürgt für die belehrende Tendenz dieses Buches. Meist sind zu einer Aufgabe 2-, 3-, 4-, 5-, 6- ja 7fache Auflösungen durch Raisonnement mitgetheilt. Werden die Schüler auf diese Weise mündlich und schriftlich angeleitet, die Aufgaben zu lösen, so muß das geistlose Fortschlendern, der geisttödtende Mechanismus, das blinde Arbeiten, diese Dämonen des Lebens und der Schule, verschwinden.

— „ — Dasselbe vom zweiten Uebungsbuche. 10 B. 8. 25 Sgr.

— „ — Dasselbe vom dritten Uebungsbuche. Mit 124 geometrischen Figuren. gr. 8. 1842. 25 Sgr.

Heuser, P., Uebersicht der merkwürdigsten Begebenheiten aus der allgemeinen Weltgeschichte, für die unteren und mittleren Klassen höherer Lehranstalten, synchronistisch dargestellt. 2. verm. und verb. Auflage. 5 Sgr.

Dieses Werkchen ist größtentheils aus der Schule hervorgegangen. Es soll für den Schüler ein historisches Gedächtniß- und Erinnerungsbüchlein sein, welches die Hauptdata der Geschichte entweder in kurzen Sätzen oder in Namen mit einem bezeichnenden Attributivworte enthält. Hierin unterscheidet es sich von den bisher erschienenen Werken dieser Art, und darf der Verfasser von seinen Erfahrungen auf die Zweckmäßigkeit seiner Arbeit schließen, so müßten diese wenigen Bogen Lehrern und Schülern willkommen sein.

Kohlrausch, Fr., Kurze Darstellung der deutschen Geschichte. 5. verb. und verm. Aufl. 14 Bog. gr. 8. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Der Herr Verfasser gibt in dieser Darstellung ein klares, anschauliches und durch Wärme der Darstellung sich empfehlendes Bild der äußern und inneren Entwickelungsgeschichte unserer Nation. Sie eignet sich daher ganz besonders zur Lectüre für alle diejenigen, die zu weitläufigem Lesen historischer Werke zu wenig Zeit haben, und dennoch ein Interesse für vaterländische Geschichte hegen und befriedigen wollen; so wie sie auch den Bürger- und Elementarschulen, in denen man dem so wichtigen Bildungselement des Unterrichts in der vaterländischen Geschichte einige Zeit widmet, unter den vorhandenen Hülfsmitteln am besten als Leitfaden und Repetitionsbuch dienen kann.

Rechenbuch für Elementarschulen mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse in Landschulen, bearb. von J. Rohs. 8. Erstes Heft: Das Rechnen mit ganzen Zahlen. Preis $2\frac{1}{2}$ Sgr. Zweites Heft: Die Bruchrechnung, $2\frac{1}{2}$ Sgr.

Das erste Heft, für die zweite (Mittel-) Klasse einer Elementarschule, besonders auf dem Lande, bestimmt, umfaßt das Rechnen mit ganzen (unbenannten und benannten) Zahlen. In Schulen, wo die Kinder oft häuslicher Verhältnisse wegen früh entlassen werden müssen, und daher nur den nothdürftigsten Anforderungen genügen, werden diese Rechenhefte mit Erfolg benutzt werden können, da das erste Heft dem Schüler schon ein Ganzes bietet, nach dessen Durcharbeitung er im Stande ist, die einfachsten im Leben vorkommenden Berechnungen selbst zu machen. Das zweite Heft, die Bruchrechnung, beginnt den Rechenkursus der ersten (Ober-) Klasse, beschließt denselben zwar nicht (noch 2 Hefte folgen) fördert aber doch den Schüler so weit, daß er den Anforderungen des gewöhnlichen Lebens im Rechnen genügt.